# Práctico 4

## Compacidad

**1.** Sea $X$ un espacio topológico.

a) Probar que la unión finita de conjuntos compactos en $X$ es un compacto.

b) Probar que la intersección de dos compactos puede no ser compacta.

c) Asumimos ahora que $X$ es Hausdorff. Probar que la intersección de una familia arbitraria de compactos es compacta.

**2.** Sea $X$ un espacio compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ continua.

a) Probar que si $A \subset \mathbb{R}$ es compacto no vacío, entonces $A$ tiene un máximo y un mínimo.

b) Probar que $f$ alcanza valor máximo y valor mínimo.

c) Probar que si $f > 0$, entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$, para todo $x \in X$.

**3.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homomorfismo continuo; es decir, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que $f(x) = ax$ para algún $a \in \mathbb{R}$, y por lo tanto es un homeomorfismo, si no es nulo.

**4.** Sea $X$ un espacio compacto, $Y$ un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Probar que $f$ es cerrada. En particular, probar que si $f$ es biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

Mostrar que la condición de compacidad de $X$ es necesaria.

**5.** Sea $X$ un espacio métrico.

a) Probar que si $K \subset X$ es compacto y $x_0 \in X$, existe $y_0 \in K$ tal que $d(x_0, K) = d(x_0, y_0)$.

b) Probar que dados dos compactos $K_1, K_2$ en $X$, existen $x_i \in K_i$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$.

c) Dar un contraejemplo para b) en caso que $K_1$ o $K_2$ no sea compacto.

**6.** Una función $f : (X, d) \to (X', d')$ es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Probar que si $X$ es compacto y $f$ continua, entonces $f$ es uniformemente continua.