Práctico 5

Espacios Productos

1. Sea I un conjunto de índices. Escribimos $I = J \cup K$, donde J, K son no vacíos y disjuntos. Sean X_i, Y_i espacios topológicos.
a) Probar que $\prod_{i\in I} X_i \simeq \left(\prod_{j\in J} X_j\right) \times \left(\prod_{k\in K} X_k\right)$.
b) Si $X_i \simeq Y_i$ para todo $i \in I$, probar que $\prod_{i\in I} X_i \simeq \prod_{i\in I} Y_i$.

2. Sean X_i, $i \in I$, espacios topológicos, y para cada $i \in I$, sea A_i un subconjunto de X_i.
a) Probar que, si I es finito, $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^\circ = \prod_{i\in I} A_i^\circ$.
b) Probar que lo anterior puede no ser cierto si I es infinito.
c) Estudiar las relaciones entre $\overline{\prod_{i\in I} A_i}$ y $\prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

3. Sean X_1, X_2 dos espacios topológicos, y A_1, A_2 subconjuntos de X_1, X_2, respectivamente. Probar que

$$\mathrm{Fr}(A_1 \times A_2) = \left(\mathrm{Fr}(A_1) \times \overline{A}_2\right) \cup \left(\overline{A}_1 \times \mathrm{Fr}(A_2)\right).$$

4. Probar que la topología del orden lexicográfico sobre $\mathbb{R}^2$ es la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ denota la estructura de espacio topológico discreto sobre $\mathbb{R}$ y el segundo factor tiene la estructura usual de espacio topológico.

5. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que la topología de X es la menos fina que hace que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sea continua.

6. Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \times Y \to Z$ una función. Para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, definimos las funciones

$$f_x : Y \to Z,\ f_y : X \to Z, \qquad f_x(y') := f(x,y'),\ f_y(x') := f(x',y).$$

a) Probar que, si f es continua, entonces las funciones f_x y f_y son continuas, para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$.
b) Mostrar que la recíproca no vale.

7. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos.
a) Probar que, si $\prod_{i\in I} X_i$ es separable, entonces cada X_i es separable.
b) Probar que, si I es numerable, entonces vale la recíproca de a).
c) Demostrar que $\prod_{i\in I} X_i$ es conexo por curvas si y sólo si cada X_i es conexo por curvas.

8. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $a \in X = \prod_{i\in I} X_i$. Probar que el conjunto de elementos de X que difieren de a en un número finito de coordenadas es denso en X.

9. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Probar que el espacio producto $X = \prod_{i\in I} X_i$ es N_1 (respectivamente, N_2) si y sólo si cada X_i es N_1 (respectivamente N_2) y todos, salvo una cantidad numerable, son indiscretos.

10. Sea X un espacio topológico.
a) Probar que la aplicación diagonal $D : X \to X \times X$, $D(x) = (x,x)$, es continua.
b) Probar que $D(X)$ es cerrado en $X \times X$ si y sólo si X es T_2.

11. Sean X, Y dos espacios topológicos, y A, B subconjuntos compactos de X e Y, respectivamente. Probar que si W es un entorno de $A \times B$ en $X \times Y$, entonces existen U y V abiertos en X e Y respectivamente tales que $A \times B \subset U \times V \subset W$.

12. Sean X e Y espacios topológicos. La *topología de la convergencia puntual* corresponde a la topología producto en $Y^X = \prod_{x \in X} Y$, donde consideramos:

$$Y^X = \{f : X \to Y : f \text{ es una función}\}.$$

Si $x_i \in X$ y $U_i \subseteq Y$ son abiertos, para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\{f \in Y^X : f(x_i) \in U_i\}$$

es un elemento de la base usual de la topología producto.
La *topología compacto abierta* se define como sigue: en Y^X consideremos la topología cuya sub-base son los conjuntos

$$M(K,U) = \{f \in \mathscr{C}(X,Y) : f(K) \subset U\},$$

donde K es un compacto en X, U un abierto en Y y $\mathscr{C}(X,Y)$ denota el subespacio de funciones continuas.
Probar que la topología de la convergencia puntual es menos fina que la topología compacto abierta.