# Práctico 6

## Espacios cocientes

1. Sean $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y $\sim_i$ relaciones de equivalencia abiertas en $X_i$. Definimos en el espacio producto la relación de equivalencia $(x_i) \sim (y_i)$ si y sólo si $x_i \sim_i y_i$ para todo $i \in I$. Probar que $(\prod_i X_i)/\sim$ es homeomorfo a $\prod_i (X_i/\sim_i)$.

2. Probar que el toro $n$-dimensional es homeomorfo a $(S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

3. Sean $I = [-1,1]$, $X = I/\sim_1$, $Y = I/\sim_2$, donde $\sim_1$ está dada por la partición $\{\frac{1}{2}, 1\}$, $\{x\}$, $x \neq \frac{1}{2}, 1$, y $\sim_2$ está dada por la partición $\{\frac{1}{2}, 1\}$, $\{-\frac{1}{2}, -1\}$, $\{x\}$, $x \neq \pm\frac{1}{2}, \pm 1$. Probar que $X$ no es homeomorfo a $Y$.

4. Sea $X = \mathbb{R}$ y $\sim$ la relación de equivalencia dada por $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Probar que la relación de equivalencia no es cerrada y que la topología cociente en $\mathbb{R}/\sim$ es la indiscreta.

5. Sea $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Consideramos la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $|x| = |y|$.
   a) Probar que la proyección canónica $p : X \to X/\sim$ es abierta y cerrada.
   b) Probar que $X/\sim \simeq \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

6. Sea $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,0) \in X : x \in \mathbb{R}\}$ y $\sim$ la relación de equivalencia asociada a la partición de $X$ formada por $A$ y los subconjuntos $\{(x,y)\}$ tales que $y \neq 0$.
   a) Probar que la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/\sim$ es cerrada pero no abierta.
   b) Hallar una familia de entornos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la clase de equivalencia de $A$ en $X/\sim$ tales que $\bigcap V_n = \{A\}$.
   c) Probar que $X/\sim$ no es $N_1$, y decidir si es $T_2$.
   * d) Probar que para cada entero no negativo $m$ la sucesión $\{(m, \frac{1}{n+1}) | n \in \mathbb{N}\}$ converge en el espacio cociente. Por otro lado, probar que si $\{N_n\}$ es una subsucesión de $\mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{(n, \frac{1}{N_n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ no converge a $A$.

7. Sea $X = \mathbb{R} - \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, 1, -1\}$ y $\sim$ la relación de equivalencia en $X$ asociada a la partición cuyos elementos son $\mathbb{Z} - \{0\}$, $\{0\}$ y los conjuntos de la forma $\{x, \frac{1}{x}\}$, para cada $x$ tal que $0 < |x| < 1$.
   a) Probar que la proyección canónica no es abierta ni cerrada.
   b) Probar que $G(\sim)$ es cerrado pero que el espacio cociente $X/_\sim$ no es $T_2$.

8. a) En $S^n$, $n \geq 2$, consideramos la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $x = \pm y$. Probar que $S^n/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n$.
   b) Probar que si en $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ se identifica los puntos antipodales del borde de $S^{n-1}$ (es decir, identificamos $x$ con $-x$, para cada $x$ tal que $|x| = 1$), entonces $B^n/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n$.

c) Si $M$ es la cinta de Mooebius y $\theta : I^2 \longrightarrow M$ es la aplicación canónica, probar que $\theta(I \times \{0\} \cup I \times \{1\})$ es homeomorfo a $S^1$.
d) Probar que el proyectivo complejo $n$-dimensional, $\mathbb{C}P^n$ es homeomorfo al cociente de $S^{2n+1}$ por la relación de equivalencia: $x \sim y$ sii existe $\lambda \in S^1$ tal que $x = \lambda y$ (aquí estamos identificando $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$).

**9.** Sea $X$ un espacio topológico, y $\sim$ una relación de equivalencia en $X$.
a) Probar que si $X$ es localmente conexo entonces $X/\sim$ es localmente conexo.
b) Supongamos que la clase de equivalencia de cada punto es un conexo de $X$ y que el cociente $X/\sim$ es conexo. Probar que $X$ es conexo.

**10.** Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un espacio topológico $X$ tal que la proyección $p: X \to X/\sim$ es cerrada y las clases de equivalencias son compactas. Probar que si $X$ es $T_2$ (respectivamente $N_2$) entonces $X/\sim$ es $T_2$ (respectivamente $N_2$).

**11.** En un espacio topológico $X$ se definen el *cono* de $X$ y la *suspensión* de $X$ respectivamente por

$$CX := (X \times [0,1])/\sim_1, \qquad SX := (X \times [-1,1])/\sim_2,$$

donde $\sim_1$ es la relación de equivalencia que identifica $(x,1)$ con $(x',1)$ y $\sim_2$ identifica $(x,1)$ con $(x',1)$ y $(x,-1)$ con $(x',-1)$ para todo par de puntos $x,x' \in X$.
Probar que $SS^n$ es homeomorfo a $S^{n+1}$ y $CS^n$ es homeomorfo a $D^{n+1}$.

**12.** Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$. Probar que:
a) $f$ induce una función continua $\tilde{f} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$;
b) más aún, $\tilde{f}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}P^2$ con su imagen.

**Ejercicios adicionales.**

**13.** a) Probar que los grupos $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{U}(n)$ son compactos.
b) Probar que $\mathrm{O}(n)$ no es conexo.

**14.** Identificamos a $\mathrm{SO}(n-1)$ con el siguiente subgrupo de $\mathrm{SO}(n)$:

$$\mathrm{SO}(n-1) = \{A \in \mathrm{SO}(n) : Ae_1 = e_1\}, \qquad \text{donde } e_1 = (1,0,\dots,0).$$

Definimos en $\mathrm{SO}(n)$ la relación de equivalencia $A \simeq B$ si y sólo si $B^{-1}A \in \mathrm{SO}(n-1)$, y denotamos el espacio cociente por $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$. Probar que:
a) $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ es homeomorfo a $S^{n-1}$.
b) $\mathrm{SO}(n)$ es conexo.
c) $\mathrm{O}(n)$ tiene dos componentes conexas.

**15.** Probar que el grupo $\mathrm{U}(n)$ es homeomorfo a $S^1 \times \mathrm{SU}(n)$. En particular $\mathrm{U}(n)$ es conexo.

**16.** Consideramos en $[0,1]$ la partición cuyas clases de equivalencia son $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y los conjuntos unipuntuales $\{x\}$ si $x \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sea $\theta : [0,1] \to [0,1]/\sim$ la correspondiente aplicación cociente.
(a) Probar que $\theta$ es abierta pero no cerrada.
(b) Probar que $X$ no es $T_2$. ¿$G(\sim)$ es cerrado en $[0,1] \times [0,1]$?
(c) Decidir si $[0,1]/\sim$ es $N_1$, localmente conexo.