Práctico 7

Convergencia

1. Sea X un espacio topológico, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X.
a) Probar que, si $\{x_n\}$ tiene rango finito, entonces posee alguna subsucesión constante.
b) Probar además que un punto $x \in X$ es un punto de aglomeración de $\{x_n\}$ si y sólo si todo entorno de x tiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$.

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ una biyección. Probar que todo número real es punto de aglomeración de $\{f(n)\}$.

3. Probar que un espacio métrico compacto es completo (es decir, que toda sucesión de Cauchy converge).

4. Consideramos $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. Decidir cuáles de las siguientes sucesiones convergen:
- $(1,0,0,0,\ldots)$, $(1/2,1/2,0,0,\ldots)$, $(1/3,1/3,1/3,0,\ldots)$, $\ldots$
- $(1,1,1,1,\ldots)$, $(0,1/2,1/2,1/2,\ldots)$, $(0,0,1/3,1/3,\ldots)$, $\ldots$
- $(1,1,1,1,\ldots)$, $(0,2,2,2,\ldots)$, $(0,0,3,3,\ldots)$, $\ldots$

5. Sea X un espacio topológico N_1 y T_1.
a) Sea x un punto de acumulación de $\{x_n\}$. Probar que entonces x es punto de aglomeración.
b) Mostrar que la recíproca no es cierta en general.

6. Probar que si A es un subconjunto de un espacio topológico X, entonces $x \in X$ es punto de acumulación de A si y sólo si existe una red en $A - \{x\}$ que converge a x.

7. Sean X, Y dos espacios topológicos, $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ una red en X que converge a $x \in X$ e $(y_\alpha)_{\alpha\in J}$ una red en Y que converge a $y \in Y$. Probar que $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in J}$ converge a (x,y) en $X \times Y$.

8. Probar que el conjunto de puntos de aglomeración de una red en X es cerrado.

9. Sean X,Y espacios topológios, en donde X es T_2 e Y es compacto. Sea $f : X \to Y$ una función tal que el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$. Probar que f es continua.

10. Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en X. Probar que f es continua.

11. Sea X un espacio topoógico. Decimos que $A \subset X$ es un *retracto* de X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que la restricción de r a A es la identidad de A.
Probar que si A es un retracto de X entonces A es cerrado en X.

12. Sea $X := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. Dados $x, y \in X$, definimos:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

Probar que:

a) d es una distancia en X;

b) Si $B(0,1) = \{x \in X : \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < 1\}$ entonces $\overline{B(0,1)}$ no es compacto;

c) (X,d) es un espacio métrico completo (toda sucesión de Cauchy converge).

13. Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una isometría, es decir que satisface $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ para todo $x, y \in X$. Probar que f es una biyección.
Ayuda: Si $x \in X - f(X)$ definir $\{x_n\}$ de la siguiente manera: $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$ y probar que $d(x_n, x_m) > d(x, f(X))$ si $n \neq m$.

14. Probar que un polinomio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cerrada.

Ejercicios adicionales.

15. Una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se dice un *homomorfismo* si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ un homomorfismo continuo. Probar que f es una transformación lineal.

(b) Mostrar que no todo homomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuo. *Ayuda*: recordar que $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial tiene dimensión infinita (no numerable).

Dado un espacio métrico (X,d), probaremos que existe una isometría de X en otro espacio métrico (Y,D), el cual es completo y se denomina la *completación* de X.

16. Sea $\tilde{X}$ el conjunto de sucesiones de Cauchy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ de puntos de X. Definimos

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Denotamos $[\mathbf{x}]$ a la clase de equivalencia de $\mathbf{x}$, y denotamos por Y al conjunto de clases de equivalencia. Definimos $D : Y \times Y \to \mathbb{R}$ de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$D([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia, y demostrar que D es una distancia (en primer lugar, probar que D está bien definida).

b) Sea $h : X \to Y$, $h(x) = [(x, x, \ldots)]$. Probar que h es una isometría, que establece un homeomorfismo de X con su imagen.

c) Probar que $h(X)$ es denso en Y. Para ello, dada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, probar que $h(x_n) \to [\mathbf{x}]$ en Y.

d) Probar que si A es un subconjunto denso en un espacio métrico (Y', d'), tal que toda sucesión de Cauchy en A converge en Z, entonces Z es completo.

e) Probar que (Y,D) es completo.

17. Sean $h : (X,d) \to (Y, D_1)$, $g : (X,d) \to (Z, D_2)$ dos isometrías, las cuales establecen un homeomorfismo de X con sus respectivas imágenes. Asumimos que Y y Z son completos. Probar que existe una isometría $f : \overline{h(X)} \to \overline{g(X)}$ tal que $f|_{h(X)} = g \circ h^{-1}$.
Nota: Este último resultado establece la unicidad de la completación.