Práctico 8 bis

Compactificación de Alexandroff

Este práctico está dedicado a probar que todo espacio localmente compacto (y Hausdorff) X puede verse como un subespacio denso de un espacio compacto (Hausdorff). Aclaremos que existen varias maneras de compactificar un espacio. Por ejemplo, el intervalo abierto $(0,1)$ puede pensarse como la circunferencia S^1 menos un punto, o también como $(0,1) \subset [0,1]$. En el primer caso necesitamos agregar un punto que no pertenece al espacio, en tanto que en el segundo caso agregamos dos.

La construcción que veremos a continuación es la llamada *compactificación por un punto* o *compactificación de Alexandroff*.

1. Sea X un espacio topológico. Sean ∞ un punto que no pertenece a X, y $X^* := X \cup \{\infty\}$. Consideramos la siguiente familia de subconjuntos de X^*:

$$\tau = \{U : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{V : \infty \in V \text{ y } X^* - V \text{ es cerrado y compacto en } X\}.$$

(a) Probar que τ es una topología para X^*.

(b) Probar que la inclusión $i : X \to X^*$ es continua y establece un homeomorfismo de X sobre su imagen. Más aún, si X es no compacto, entonces $i(X)$ es denso en X^*. *Nota*: aquí es importante que los términos de la segunda parte de τ sean complementos de cerrados de X.

(c) Probar que X^* es compacto. *Sugerencia*: si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento por abiertos de X^*, entonces ∞ está en algún abierto $U \in \mathscr{U}$.

(d) Probar que X^* es Hausdorff si y sólo si X es Hausdorff y localmente compacto. *Nota*: localmente compacto proviene de poder separar ∞ de cada punto de X.

Observación. La compactificación Alexandroff de un espacio X es única, salvo homeomorfismos. De este modo, hablamos de *la* compactificación de Alexandroff, en lugar de *una* compactificación de Alexandroff.

Si X es compacto, entonces ∞ es un punto aislado de X^* (es decir, $\{\infty\}$ es abierto y cerrado en X^*). Recíprocamente, si ∞ es un punto aislado de X^*, entonces X es cerrado y por ende compacto. Luego X es denso en X^* si y sólo si X es no compacto.

2. (a) Probar que $(\mathbb{R}^n)^*$ es homoemorfo a S^n. *Sugerencia*: usar la proyección estereográfica.

(b) Probar que D^n/S^{n-1} es homeomorfo a S^n, en donde $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

3. Probar que la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$, con la topología discreta, es homeomorfa a $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$.