Práctico 8

Propiedades de Separación

1. Dar ejemplos de espacios topológicos X tales que:
(a) X es regular, no T_1 y no T_2;
(b) X es no regular y no T_2;
(c) X es T_2 y no regular.

2. Probar que si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios regulares entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ es regular.

3. (a) Si X es un espacio regular y K es un subconjunto compacto de X entonces $\bar{K}$ es compacto.
(b) Dar un ejemplo de un espacio en el cual no se cumple (a).

4. Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia cerrada en X.
(a) Si U es abierto en X, probar que la unión de las clases de equivalencia contenidas en U es un abierto.
(b) Supongamos ahora que toda clase de equivalencia es finita. Probar que:
(i) Si X es T_2, entonces $X/\sim$ es T_2.
(ii) Si X es regular, entonces $X/\sim$ es regular.

5. Sea $f : X \to Y$ una función continua, sobre y cerrada. Sea $A \subset Y$ cerrado tal que $f^{-1}(A) \subset U$, con U abierto. Probar que existe V abierto en Y tal que $A \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset U$.

6. (a) Probar que la imagen de un espacio normal por una función continua y cerrada es un espacio normal.
(b) Hallar ejemplos donde la parte (a) no se cumple si la función no es cerrada.

7. Sea $X = [0,1]$, $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y τ la topología en X que tiene como base a los abiertos de $(0,1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ y a los conjuntos $I_a = \{x \in X : x < a \text{ y } x \notin D\}$ con $0 < a < 1$. Probar que X es T_2 y no es regular ni compacto.

8. Sean $X = (-1,0) \cup (0,1)$, $B_{a,b} = X \cap (a,b)$. Consideremos la siguiente topología en X:

$$\tau = \{B_{a,b} : a \in [-1,0]\,, b \in [0,1]\}.$$

Probar que X es normal y no es T_2.

9. Sea X un espacio completamente regular y $K \subset X$ un subconjunto compacto. Si U es un entorno abierto de K, probar que existe una función continua f de X en $I = [0,1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ 1 & x \notin U. \end{cases}$$

10. Probar que el producto arbitrario de espacios topológicos T_1 (respectivamente, completamente regular) es T_1 (respectivamente, completamente regular).

11. El producto de espacios normales puede no ser normal. Para ello considerar $\mathbb{R}$ con la topolgía generada por los intervalos semiabiertos $[a,b)$, y $\mathbb{R}^2$ con la topología producto. Probar que este espacio es regular y no es normal.

12. (a) La imagen de un espacio localmente compacto por una función continua y abierta es localmente compacta.
(b) La parte (a) no se cumple si la función no es abierta.

13. (a) Sean A un conjunto denso en un espacio topológico X y U abierto en X. Probar que $U \subset \overline{(A \cap U)}$.
(b) Sea X un espacio T_2 e $Y \subset X$ localmente compacto y denso. Probar que Y es abierto en X.

14. Sea X localmente compacto y regular, y sea Y un abierto en X. Probar que Y es localmente compacto.

15. Probar que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una unión numerable de conjuntos cerrados.

16. (a) Probar que si una topología en X lo hace compacto y T_2, ninguna topología estrictamente más fina o estrictamente menos fina lo hace compacto y T_2.
(b) Dar una topología en $\mathbb{R}$ que lo haga compacto y T_2.
(c) ¿Es cierto que todo conjunto admite a lo sumo una topología que lo hace compacto y T_2?

17. Sea $I = [0,1]$ y sea I^I con la topología producto.
(a) Probar que I^I es compacto, T_2, conexo y normal.
(b) Si $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, probar que $\prod_{i \in I} A$ es un subespacio de I^I que no es normal.