ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRÁCTICO 3

(1) Contar las aplicaciones de $X_3 = \{1, 2, 3\}$ en $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Mostrar que hay m^3 aplicaciones de X_3 en $X_m = \{1, 2, \dots, m\}$, con $m \geq 1$.

(2) (a) ¿ Cuántos números de 5 dígitos hay? (No se permite que comiencen con 0).
(b) ¿ Cuántos números de 5 dígitos pares hay?
(c) ¿ Cuántos números de 5 dígitos existen con sólo un 3?
(d) ¿ Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?
(e) ¿ Cuántos números capicúas de a lo sumo 5 dígitos hay?

(3) ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?

(4) ¿Cuántos números impares de cuatro cifras hay?

(5) ¿ Cuántos números múltiplos de 5 y menores que 4999 hay?

(6) En los boletos viejos de ómnibus, venía un número de 5 cifras (podían empezar con 0), y uno tenía un *boleto capicúa* si el número lo era.
a) ¿Cuántos boletos capicúas había?
b) ¿Cuántos boletos había en los cuales no hubiera ningún dígito repetido?

(7) Las patentes viejas tenían una letra indicativa de la provincia y luego 6 dígitos. (En algunas provincias, Bs. As. y Capital, tenían 7 dígitos, pero ignoremos eso por el momento). Las nuevas tienen 3 letras y luego 3 dígitos. ¿Hay más patentes viejas o nuevas?

(8) Si uno tiene 8 CD distintos de Rock, 7 CD distintos de música clásica y 5 CD distintos de cuartetos.
a) ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?
b) ¿ Cuántas formas hay de seleccionar tres CD, uno de cada tipo?
c) Un sonidista en una fiesta de casamientos planea poner 3 CD, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?

(9) Mostrar que si uno arroja un dado n veces, hay $\frac{6^n}{2}$ formas distintas de obtener una suma par.

(10) ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?

(11) ¿Cuántos subconjuntos de $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ contienen al menos un impar?

(12) El truco se juega con un mazo de 40 cartas, y se reparten 3 cartas a cada jugador. Obtener el 1 de espadas (el *macho*) es muy bueno. También lo es, por otros motivos, obtener un 7 y un 6 del mismo palo (*tener 33*). ¿Qué es más fácil: obtener el macho, o tener 33?

(13) ¿ Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres?

(14) ¿ De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 profesores y 7 estudiantes, si:
a) No hay restricciones en la selección?
b) El comité debe tener exactamente 2 profesores?
c) El comité debe tener al menos 3 profesores?
d) El profesor X y el estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?

(15) En una clase hay n chicas y n chicos. Dar el número de maneras de ubicarlos en una fila de modo que todas las chicas estén juntas.

(16) ¿ De cuántas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa circular?

(17) a) ¿ De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 hombres y 6 mujeres en una mesa circular si nunca deben quedar dos mujeres juntas?
b) Idem, pero con 10 hombres y 7 mujeres.

(18) a) ¿ De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA?
b) Idem con las palabras ALGEBRA, GEOMETRIA.

(19) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?

(20) ¿ Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?

(21) Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar que se verifica

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

(22) Probar que para todo $i,\ j,\ k \in \mathbb{N}_0$ vale

$$\binom{i+j+k}{i}\binom{j+k}{j} = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

(23) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:
(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.
(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

(24) Probar que para todo natural n vale que

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$