ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRÁCTICO 3

(1) Contar las aplicaciones de $X_3 = \{1, 2, 3\}$ en $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Mostrar que hay m^3 aplicaciones de X_3 en $X_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, con $m \geq 1$.

Respuesta: En general el número de aplicaciones posibles entre dos conjuntos finitos, $f : N \to M$ es m^n donde n es el número de elementos del primero y m el del segundo. Para ver esto en nuestro ejemplo constatamos que tenemos 4 maneras distintas de asignar valores a 1, 4 maneras distintas a 2 y 4 a 3. Como estas maneras son independientes las unas de las otras, ya que por ejemplo podemos asignar a 1 y 2 el número 2, el número total de maneras de asignar valores a los tres elementos es $4 \times 4 \times 4 = 4^3$.

(2) (a) ¿Cuántos números de 5 dígitos hay? (No se permite que comiencen con 0).

Respuesta: Tenemos que contar las posibles aplicaciones de los lugares relativos de números de 5 cifras en el conjunto de dígitos. Para las cuatro primeras cifras podemos tener números del 0 al 9, es decir 10^4 posibilidades. Para el último lugar tenemos solo las posibilidades 1 al 9 o sea 9 posibilidades, por lo tanto el número total de posibilidades (y asi de posibles números de 5 dígitos) es $9 * 10^4 = 90.000$. Es decir los números del 10.000 (inclusive) al 99.999

(b) ¿Cuántos números de 5 dígitos pares hay?

Respuesta: Se trata aqui (supongo) de formar todos los posibles números con solo dígitos pares (distinto de formar números pares). Para las primeras cuatro cifras tenemos 5 posibilidades para cada una,(los números $0, 2, 4, 6, 8$) o sea 5^4 posibilidades. Para la última tenemos solo 4 (los números $2, 4, 6, 8$). O Sea un total de $4 \times 5^4 = 2400$ números.

(c) ¿Cuántos números de 5 dígitos existen con sólo un 3?

Respuesta: Si el 3 está en una de las primeras 4 cifras tenemos $8 \times 9^3 = 5.832$, ya que una estará ocupada con el 3 y las otras solo pueden tener números distintos de 3 por lugar que puede ocupar el tres. Como hay 4 posibles lugares tenemos un total de 23.328 posibilidades. Si el 3 está en la última cifra, entonces las posibilidades son $9^4 = 6.561$. Tenemos asi un total de 29.889 números continiendo un solo 3.

(d) ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?

Respuesta: Los números capicua de 5 dígitos estan determinados por las tres últimas cifras, ya que dada cualquier número de 3 cifras puedo construir un único número capicúa agregando dos cifras más al principio. Pero los números de 3 cifras son $9 \times 10^2 = 900$.

(e) ¿Cuántos números capicúas de a lo sumo 5 dígitos hay?

Respuesta: Los números capicúa de 4 dígitos se puede formar de manera única a partir de números de dos cifras y por lo tanto tenemos $9 \times 10 = 90$ de ellos. Los de 3 cifras son también equivalentes a números de dos cifras y por lo tanto tenemos otros 90, finalmente tenemos 9 de dos cifras y otros 10 de una cifra (si es que lo incluimos en la definición de números capicúa). Tenemos asi 1099 capicúas de a lo sumo 5 dígitos.

(3) ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?

Respuesta: Aqui solo podemos usar números del conjunto $\{1, 1, 2, 2, 0, 0\}$. Para la última cifra tenemos 2 posibilidades, (ya que esta no puede ser 0, solo puede ser 1 o 2). Para la siguiente (quinta) nos quedan 5 (ya que un elemento ya ha sido elejido), para la cuarta 4 (ya que dos elementos ya han sido elejidos). Siguiendo asi tenemos entonces $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ posibilidades para, digamos, el 1 en la última cifra. pero hasta aqui hemos contado como distintas dos combinaciones que solo difieren en, por ejemplo, cual de los dos números 2 ocupan uno u otro lugar. Teniendo en cuenta que hay dos 2's y dos 0, debemos dividir por 4. O sea formamos solo 30 números. Sumando ahora las posibilidades cuando el 2 esta en la última cifra (y por lo tanto hay dos 1 y dos 0) obtenemos un total de 60 números distintos.

(4) ¿Cuántos números impares de cuatro cifras hay?

Respuesta: En la última cifra tenemos solo 5 posibilidades ($\{1, 3, 5, 7, 9\}$) y por lo tanto el número total es: $9 \times 10^3 \times 5 = 45.000$

(5) ¿Cuántos números múltiplos de 5 y menores que 4999 hay?

Respuesta: Son todos los números que la última cifra pueden tener $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (o sea cinco posibilidades) y en la primera solo $\{0, 5\}$. Por lo tanto hay $5 \times 10^2 \times 2 - 1 = 99$. Ya que tenemos que descontar el número 0.

(6) En los boletos viejos de ómnibus, venía un número de 5 cifras (podían empezar con 0), y uno tenía un *boleto capicúa* si el número lo era.

a) ¿Cuántos boletos capicúas había?

b) ¿Cuántos boletos había en los cuales no hubiera ningún dígito repetido?

Respuesta: a) Dado las tres primeras cifras del número queda determinado un único número capicá, aquel que tiene como cuarta cifra la segunda del número dado y como quinta la primera. Por otro lado, dado un boleto capicúa obtenemos un número de tres de tres o menos cifras al quitarle las cuarta y última cifras. Por lo tanto hay tantos boletos capicúas como números de hasta tres cifras, o sea 10^3.

b) Si no repetimos dígitos para la última cifra tenemos 10 posibilidades (el 0 esta incluido). Para la anteultima tenemos solo 9 (ya que la usada en el última cifra ya no puede ser usada. Siguiendo asi vemos que tenemos un total de $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 10!/5! = 30240$ boletos sin números repetidos.

(7) Las patentes viejas tenían una letra indicativa de la provincia y luego 6 dígitos. (En algunas provincias, Bs. As. y Capital, tenían 7 dígitos, pero ignoremos eso por el momento). Las nuevas tienen 3 letras y luego 3 dígitos. ¿Hay más patentes viejas o nuevas?

Respuesta: Las patentes viejas tenian una de 24 letras (no estaban todas pues hay más letras que provincias) y luego 6 dígitos, que como en el caso de los boletos podian comenzar con cero. Por lo tanto las posibilidades son $24 \times 10^6 = 24.000.000$. Las patentes nuevas tienen 3 letras y 3 dígitos o sea tenemos un total de $27^3 \times 10^3 = 19.683.000$ posibles patentes nuevas.

(8) Si uno tiene 8 CD distintos de Rock, 7 CD distintos de música clásica y 5 CD distintos de cuartetos.

a) ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?

b) ¿Cuántas formas hay de seleccionar tres CD, uno de cada tipo?

c) Un sonidista en una fiesta de casamientos planea poner 3 CD, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?

Respuestas: Aqui consideraremos dos selecciones distintas incluso si difieren en orden, ya que el orden en que pueden ser puestos los CD's puede ser importante.

a) Para seleccionar 1 no interesa de que tipo es y por lo tanto estamos tomando uno del conjunto total. Como este tiene $8 + 7 + 5 = 20$ elementos, ese es el número de formas de seleccionar 1.

b) Si seleccionamos uno de cada tipo tenemos entonces 8 posibilidades para el de Rock, por cada una de ellas 7 para el de música clásica y por cada una de estas 5 para los cuartetos. O sea un total de $8 \times 7 \times 5 = 280$ posibilidades. Pero en estas no hemos contemplado el orden. Como a cada una de estas selecciones las podemos ordenar de 6 maneras distintas ((R,Cl,Cu), (Cu,R,Cl), (Cl,R,Cu), (R,Cu,Cl), (Cl,R,Cu), (Cu,R,Cl)), tenemos un total de 1680 selecciones.

c) Hay dos maneras de encontrar el resultado, una es buscar todas las posibles combinaciones con 3 CD's de una clase y todas las con 2 CD's de una clase y otro de otra. La suma nos

da el resultado buscado. Otra es encontrar todas las selecciones posibles y de estas sustraer todas las selecciones que tienen un CD de cada clase, es decir todas las encontradas en el punto b). Para el segundo método tenemos $20 \times 19 \times 18 - 1680 = 5160$ selecciones. Para el primer método tenemos todas las selecciones de 3 CD's de Rock $RRR = 8 \times 7 \times 6 = 336$ todas las de Clásica $ClClCl = 7 \times 6 \times 5 = 210$ y todas las de cuartetos $CuCuCu = 5 \times 4 \times 3 = 60$, más todas las combinaciones de dos de un estilo y otra de otro,
$RClCl = 8 \times (7 \times 6) = 336$,
$RCuCu = 8 \times (5 \times 4) = 160$,
$ClRR = 7 \times (8 \times 7) = 392$,
$ClCuCu = 7 \times (5 \times 4) = 140$,
$CuRR = 5 \times (8 \times 7) = 280$,
$CuClCl = 5 \times (7 \times 6) = 210$,
Pero estas últimas no tienen todas las combianciones posibles, ya que la primera por ejemplo no incluye las combinaciones $ClRCl$ ni la $ClClR$. Para contarlas correctamente multiplicamos todas ellas por $3 = 3!/2!$ Tenemos asi, un total de
$336 + 210 + 60 + 3 \times (336 + 160 + 392 + 140 + 280 + 210) = 606 + 3 \times (1518) = 5160$

(9) Mostrar que si uno arroja un dado n veces, hay $\frac{6^n}{2}$ formas distintas de obtener una suma par.
Respuesta: Si lo arrojamos $n-1$ veces tenemos 6^{n-1} posibilidades, para cada una de ellas tenemos 3 posibilidades más en el último tiro: $\{1, 3, 5\}$ si la suma fue impar o $\{2, 4, 6\}$ si la suma fue par, por lo tanto tenemos un total de $3 \times 6^{n-1} = 6 \times 6^{n-1}/2 = 6^n/2$ posibles sumas pares.

(10) ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?
Respuesta: Son todos números de cuatro o menos cifras, supongamos que tenemos un 5 en la última (cuarta), y un 7 en la tercera, luego nos quedan 8 posibilidades (ya que debemos excluir el 5 y el 7) para la segunda y 8 para la primera, o sea un total de 8^2 posibilidades. Permutando el 7 al segundo o primer lugar tenemos un total de 3×8^2. Permutando ahora el 5 entre todos los posibles lugares (4), tenemos un total de $4 \times 3 \times 8^2$ números.

(11) ¿Cuántos subconjuntos de $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ contienen al menos un impar?
Respuesta: Los conjuntos que contienen al menos un impar son aquellos que no todos sus elementos son pares, por lo tanto su número es igual al total de conjuntos posibles menos aquellos construidos con solo elementos pares. Pero como el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n el número de conjuntos con al menos un impar es: $2^{10} - 2^5 = 1024 - 32 = 992$.

(12) El truco se juega con un mazo de 40 cartas, y se reparten 3 cartas a cada jugador. Obtener el 1 de espadas (el *macho*) es muy bueno. También lo es, por otros motivos, obtener un 7 y un 6 del mismo palo (*tener 33*). ¿Qué es más fácil: obtener el macho, o tener 33?
Respuesta: El número de jugadas donde puede salir el macho es $\binom{39}{2} = \frac{39!}{37!2!} = \frac{39 \times 38}{2} = 741$ ya que si tomo el macho luego tengo ese número de posibles combinaciones acompañándolo. (la división por 2 es porque el orden en que aparecen estas cartas no interesa). La cantidad de manos en las que pueden aparecer el 7 y el 6 de bastos es 38, ya que quedan 38 cartas restantes para elejir una. Pero como los 33 pueden ser de cualquier palo, tenemos un total de $4 \times 38 = 152$ manos posibles. Por lo tanto es mucho más facil sacar el ancho que tener 33.

(13) ¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres?

Respuestas: Tenemos que elegir 3 mujeres de un total de 6 donde el orden no importa, por lo tanto ese número es $\binom{6}{3} = 20$ y luego 2 hombres de un total de 4, o sea $4 choose 2 = 6$ elecciones, para un total de 120 posibles comités.

(14) ¿De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 profesores y 7 estudiantes, si:

a) No hay restricciones en la selección?
b) El comité debe tener exactamente 2 profesores?
c) El comité debe tener al menos 3 profesores?
d) El profesor X y el estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?

Respuesta:

a) Si no hay restricciones entonces tenemos un total de 11 personas entre las cuales debemos elegir 5 y por lo tanto tenemos $\binom{11}{5} = \frac{11!}{6!5!} = 462$ posibles comités.

b) En este caso tenemos que elegir 2 profesores del grupo de 4, $\binom{4}{2} = 6$ y por cada una de estas elecciones podemos elegir 3 estudiantes de entre 7, o sea tenemos un total de $\binom{4}{2}\binom{7}{3} = 210$ posibilidades.

c) En este caso elegimos podemos elegir 3 profesores de entre los 4 y luego elegimos a dos personas más entre los estudiantes, es decir tenemos un total de $\binom{4}{3}\binom{7}{2}$ posibilidades. O bien podemos elegir 4 profesores de entre 4, o sea una única posibilidad y luego 1 estudiante entre 7 o sea 7 posibilidades. El total es entonces: $4 \times 21 + 1 \times 7 = 84 + 7 = 91$.

d) El número de posibilidades es igual al número total (calculado en el punto a) más arriba) menos el número de posibilidades donde ambos X e Y han sido elegido. Pero estas últimas se calculan elegiendo a estas dos personas primero y luego eligiendo a las restantes 3 del conjunto de las 9 que quedan, o sea $462 - \binom{9}{3} = 462 - 84 = 378$

(15) En una clase hay n chicas y n chicos. Dar el número de maneras de ubicarlos en una fila de modo que todas las chicas estén juntas.

Respuesta: Tenemos $(n + 1)!$ maneras de distribuir los chicos y una distribución cualquiera del bloque de chicas. Pero hay $n!$ posibles distribuciones dentro del bloque de chicas y por lo tanto tenemos un total de $(n + 1)!n!$ posibles filas de chicos y chicas con las últimas juntas.

(16) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa circular?

Respuesta: Tenemos $8! = 40.320$ manera de ordenar consecutivamente 8 personas, pero como la mesa es circular debemos considerar como iguales aquellos ordenamientos que solo difieran en una rotación de la mesa. Como para cada posible distribución hay 8 posibles rotaciones que nos dan configuraciones distintas entonces debemos dividir el número anterior por 8, obteniendo asi $7! = 5.040$ posibles distribuciones.

(17) a) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 hombres y 6 mujeres en una mesa circular si nunca deben quedar dos mujeres juntas?

b) Idem, pero con 10 hombres y 7 mujeres.

Respuestas: a) Esto significa que debemos elegir ambos conjuntos por separado y luego intercalarlos, por ejemplo sentando al primer hombre elejido en la silla 1, luego la primer mujer en la silla 2 y asi sucesivamente. Por lo tanto tenemos $6!^2 = 518.400$ posibilidades. Pero a estas debemos sustraerles las configuraciones obtenidas por rotar las sillas alrededor de la mesa. Como hemos supuesto hay un hombre en la primer silla, el número de rotaciones incluidas es solo 6 (y no 12) y por lo tanto el resultado es 86.400

b) Supongamos que tenemos 10 hombres y 10 mujeres, usando el razonamiento del punto anterior tendremos $10! \times 9! = 1.316.818.944.000$ posibilidades, pero como faltan 3 mujeres tenemos que descontar todas las posibles combinaciones de las tres sillas vacias, ya que todas estas darán la misma configuracion final, o sea debemos dividir por 3!, obteniendo asi $10! \times 9!/3! = 219.469.824.000$ posibles distribuciones.

(18) a) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA?
b) Idem con las palabras ALGEBRA, GEOMETRIA.
Respuestas: a) Tenemos 10 letras por lo tanto tenemos 10! maneras de ordenarlas, pero como algunas letras se repiten tendríamos en ese conteo maneras idénticas, para corregir esto dividimos por el número de combinaciones posibles de cada letra repetida entre si, o sea 2! para la M y la T y 3! para la A. Obtenemos asi $10!/2!/2!/3! = 151.200$ maneras distintas de ordenar estas letras.
b) Para ALGEBRA tenemos $7!/2! = 2.0520$. Para GEOMETRIA tenemos $9! = 362.880$ maneras.

(19) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?
Respuesta: En ese caso podemos ordenar las vocales y las consonantes por separado y luego alternarlas. Tenemos asi: $2 \times (5!/3!) \times (5!/2!/2!) = 2 \times 20 \times 30 = 1.200$ El primer 2 corresponde al hecho que podemos comenzar la palabra con una consonante o una vocal.

(20) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?
Respuesta: Si consideramos los lados del polígono tenemos tantas diagonales como pares de vértices elegidos de a dos, o sea $n(n-1)/2$. Donde dividimos por 2 pues el orden no interesa para determinar la diagonal. Si a estos le restamos los lados (n) obtenemos: $n(n-1)/2-n = n(n-3)/2$ que es la respuesta correcta. Esta fórmula se puede probar también por inducción, para $n = 3$ tenemos un triángulo y por lo tanto 0 diagonales. Suponemos es valida para n lados y ahora, partiendo de un polígono de $n+1$ y dividiendo al mismo en un triángulo y un polinomio de n lados vemos que el número de diagonales es el de un polígono de n lados más $(n-3)+1 = n-2$. Donde, $n-3$ son las diagonales extra del vértice del triángulo que quedó fuera del polígono de n lados y el 1 viene del lado de dicho polígono que tiene en común con el triángulo y que ahora se combierte en una diagonal más.

(21) Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar que se verifica

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{k}{m} &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k!}{(k-m)!m!} \\
&= \frac{n!}{(n-m)!m!}\frac{(n-m)!}{(n-k)!(k-m)!} \\
&= \frac{n!}{(n-m)!m!}\frac{(n-m)!}{((n-m)-(k-m))!(k-m)!} \\
&= \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}
\end{aligned}$$

(22) Probar que para todo $i,\, j,\, k \in \mathbb{N}_0$ vale
$$\binom{i+j+k}{i}\binom{j+k}{j} = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\binom{i+j+k}{i}\binom{j+k}{j} &= \frac{(i+j+k)!}{((i+j+k)-i)!i!}\frac{(j+k)!}{((j+k)-j)!j!} \\
&= \frac{(i+j+k)!}{(j+k)!i!}\frac{(j+k)!}{k!j!} \\
&= \frac{(i+j+k)!}{j!k!i!}
\end{aligned}$$

(23) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

Respuesta: De la forma del binomio de Newton tenemos que
$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}x^n.$
Eligiendo $x = 1$ sale la primer igualdad y eligiendo $x = -1$ la segunda.

(24) Probar que para todo natural n vale que
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

Respuesta:
$$2\binom{n}{2} + n^2 = n\cdot(n-1) + n^2 = n\cdot(2n-1) = \frac{2n\cdot(2n-1)}{2} = \binom{2n}{2}$$