ÁLGEBRA I / MATEMÁTICA DISCRETA I
PRÁCTICO 4 (corresponde al capítulo 3)

1. Sean $a$, $b$, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) $\forall a$, $a \mid 0$. (En particular, $0 \mid 0$).

   b) $\forall a \neq 0$, $0 \not| \, a$.

   c) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.

   d) Si $a \mid 1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

   e) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.

   f) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b + c)$ y $a \mid (b - c)$.

   g) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid c$.

   h) Si $a \neq 0$ y $a \mid b$, entonces $a \mid bc$.

2. Probar las siguientes propiedades:

   i) 0 es par. ii) 1 es impar.

   iii) Si $b$ es par y $b \mid c$, entonces $c$ es par. (Por lo tanto, si $b$ es par, también lo es $-b$).

   iv) Si $b$ y $c$ son pares, entonces $b + c$ también lo es. (Por lo tanto, la suma de una cantidad cualquiera de números pares es par).

   v) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 o $-2$.

   vi) La suma de un número par y uno impar es impar.

   **Respuestas:** Recuerde que por definición un número $c \in \mathbb{Z}$ es par si existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $c = 2 \cdot z$, es decir, si $2 \mid c$.

   i) $0 = 2 \cdot 0$ y por lo tanto 2 divide a 0, por lo tanto es par.

   ii) Supongamos, por el absurdo, que 1 es par, entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = 2 \cdot z$. Cláramente $z \neq 0$, ya que $2 \cdot 0 = 0$. Supongamos $z > 0$ luego llegamos a una contradicción ya que $2 \cdot z \geq 2$. Supongamos entonces que $z < 0$ luego también llegamos a una contradicción ya que en ese caso $2 \cdot z < 0$.

   iii) Si $b \mid c$ entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $c = b \cdot z$ como $b$ es par, entonces existe $z' \in \mathbb{Z}$ tal que $b = 2 \cdot z'$, por lo tanto $c = 2 \cdot z' \cdot z$ y por lo tanto $c$ es par.

   iv) Si $b$ es par entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $b = 2 \cdot z$. Si $c$ es par, entonces existe $z' \in \mathbb{Z}$ tal que $c = 2 \cdot z'$, por lo tanto $b + c = 2 \cdot z' + 2 \cdot z = 2 \cdot (z + z')$ y por lo tanto $b + c$ es par.

   v) Sea $c$ tal que $c \mid 2$, si $c$ es par, entonces tenemos además que $2 \mid c$. Pero por el ejercicio 1.c entonces tenemos que $c = \pm 2$.

   vi) Sea $p$ par y $i$ impar, supongamos por contradicción que $p + i$ es par, pero entonces $-1 \cdot (p + i)$ también es par y por el punto iv) de este ejercicio, $p + (-1)(p + i) = i$ es par, lo que nos da una contradicción.

3. Probar que $n$ es par si y sólo si $n^2$ es par.

   **Respuesta:**

   Si $n$ es par entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2 \cdot z$. Por lo tanto $n^2 = (2 \cdot z)^2 = 2 \cdot (2 \cdot z^2)$ y concluimos que es par. Veamos la conversa: Supongamos que $n^2$ es par y por contradicción que $n$ es impar. Si $n$ es impar entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2 \cdot z + 1$. (Por el algoritmo de la división existen $z,\ r \in \mathbb{Z}$ $0 \leq r < 2$, tales que $n = 2 \cdot z + r$ si $r = 0$ el número es par, si $r = 1$ el número es impar (la suma de un par y un impar es impar).) Pero entonces $n^2 = (2 \cdot z + 1)^2 = 2 \cdot (2 \cdot z \cdot z + 2 \cdot z) + 1$, como $(2 \cdot z \cdot z + 2 \cdot z) \in \mathbb{Z}$ entonces $n^2$ es impar y tenemos una contradicción. Por lo tanto $n$ debe ser par.

4. Probar que $n(n+1)$ es par.

   **Respuesta:** Por el algoritmo de la división sabemos que todo número puede ser escrito como $n = 2k$ o $n = 2k+1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ (correspondiente a resto 0 y resto 1 respectivamente). En el primer caso tenemos que $n(n+1) = 2k(2k+1)$ y por lo tanto es divisible por 2, o sea par. En el segundo caso tenemos $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ y también es divisible por 2.

5. Sean $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

   a) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

   b) $a \mid (b+c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

   c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow ab \mid c$.

   d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a+b) \mid c$.

   e) $a,\ b,\ c > 0$ y $a = bc \Rightarrow a \geq b$ y $a \geq c$.

   **Respuesta:** a) Falso: Contra–ejemplo: $a = 4$, $b = 2$ y $c = 2$. b) Falso: Contra–ejemplo: idem anterior. c) Falso: Contra–ejemplo: $a = 2$, $b = 2$ y $c = 2$. d) Falso: Contra–ejemplo: idem anterior. e) El enunciado no esta claro: si $a$, $b$ y $c$ son positivos entonces es **verdadero:** $c > 0 \Rightarrow c \geq 1 \Rightarrow a = bc \geq b$. Si solo $c > 0$ entonces es **falso:** $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ y $a = bc$ pero $a < c$.

6. -"Pensá un número de dos cifras (que no sean iguales)".

   -" Ya está" (57).

   -" Invertí el orden de las cifras".

   -"Ya está" (75).

   - " El nuevo número, ¿es mayor o menor que el primero?"

   - "Mayor".

   - "Entonces, restá el número que pensaste del nuevo número".

   - "Ya está" $(75 - 57 = 18)$.

   - "Ahora, sumá las cifras del número que pensaste al principio".

   - "Ya está". (5+7=12).

- “Decime los dos números que obtuviste”.

- “18 el primero y 12 el segundo”.

- (Calcula: $\frac{18}{9} = 2$, $\frac{12+2}{2} = 7$ y $\frac{12-2}{2} = 5$). “Pensaste el 57”.

Explicar cómo es el truco y por qué siempre funciona.

**Respuesta:** Cualquier número de dos cifras $p =$ “$mn$” se puede escribir como $p = m \cdot 10 + n$. El número obtenido al invertir el orden de las cifras, $q =$ “$nm$” es el número $q = n \cdot 10 + m$. Si el primero es mayor entonces $m > n$ de lo contrario, como son cifras distintas, $n > m$. Supondremos el primero es el caso, el otro se hace de forma similar. La diferencia de estos es: $r = p - q = m \cdot 10 + n - (n \cdot 10 + m) = (m-n) \cdot 10 + (n-m) = (m-n) \cdot 9$ y por lo tanto tenemos que $m - n = r/9$ Por otro lado de la suma de las dos cifras tenemos $s = m + n$ y por lo tanto $m = (s + r/9)/2$ y $n = (s - r/9)/2$, con lo que podemos reconstruir el número pensado originalmente a partir de la información dada.

7. Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:

   a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

   b) $3^{4n+2} + 2.4^{3n+1}$ es múltiplo de 17.

   c) $2^{2n-1}.3^{n+2} + 1$ es divisible por 11.

   d) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

   **Respuesta:** Estos ejercicios se pueden hacer por inducción. Más adelante veremos una forma mucho mas simple de hacerlos. Vemos el primero (los otros son similares):

   P(1): $3^4 + 2^7 = 81 + 128 = 209 = 19 \cdot 11$ y por lo tanto es verdadera.

   Suponemos P(k): verdadera. Es decir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $3^{2k+2} + 2^{6k+1} = m \cdot 11$ y por lo tanto que $3^{2k+2} = -2^{6k+1} + m \cdot 11$.

   Veamos P(k+1): $3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} = 3^{2k+2+2} + 2^{6k+1+6} = 3^2 \cdot 3^{2k+2} + 2^6 \cdot 2^{6k+1} = 3^2 \cdot (-2^{6k+1} + m \cdot 11) + 2^6 \cdot 2^{6k+1}$ Usando ahora la hipótesis inductiva (P(k)) tenemos:

   $3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} = 3^2 \cdot m \cdot 11 + 2^{6k+1}(2^6 - 3^2) = 3^2 \cdot m \cdot 11 + 2^{6k+1}(64 - 9) = (3^2 \cdot m + 2^{6k+1} \cdot 5) \cdot 11$ con lo que queda probado y por lo tanto el resultado es válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Decir si es verdadero o falso justificando:

   a) $3^n + 1$ es múltiplo de $n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   b) $2.5^n + 1$ es múltiplo de 4, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   c) $10^{2n} - 1$ es múltiplo de 11, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   d) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   e) $n^3 - n$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   f) $(n+1)(5n+2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   g) $n(n+4)(n+2)$ es múltiplo de 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   **Respuesta: a)** Falso: Contra-ejemplo: para $n = 3$, $3^3 + 1 = 28$ y 28 no es múltiplo de 3. **b)** Falso: Contra-ejemplo: Para $n = 1$, $2 \cdot 5 + 1 = 11$. **c)** Verdadero: Se prueba por inducción en forma similar a los del ejercicio anterior. También se puede probar usando la fórmula de la suma geométrica, es decir, $\sum_{i=0}^{2n-1}(-10)^i = ((-10)^{2n}-1)/(-10-1) = -((10)^{2n}-1)/11$. Como el lado derecho es un número entero, $(10)^{2n}-1$, es divisible por 11. ¿Como demostrariíia que $(10)^{2n}-1$ es divisible por 9?. Más adelante veremos una forma aún mas simple, cuando entendamos el concepto de congruencia. **d)** Falso: Contra-ejemplo: Para $n=2$, $3n^2+1=13$. **e)** Verdadero: Si $n$ es par, luego $n^3$ es par y por lo tanto $n^3-n$ también es par. Si $n$ es impar, luego $n^3$ es también impar y como la suma de dos impares es un número par $n^3-n$ es par. **f)** Verdadero: Si $n$ es par, luego $5n+2$ es par y por lo tanto el producto es par. Sin $n$ es impar, luego $n+1$ es par y por lo tanto el producto es par. **g)** Supongamos consecutivamente que $n=3k$, $n=3k+1$ y $n=3k+2$. Que cualquier número natural puede ser escrito como una de estas tres posibilidades sigue del algoritmo de la división. En el primer caso es obvio que el primer numero es divisible por 3 y por lo tanto el producto. En el segundo caso el último número en el producto es divisible por 3 y por lo tanto el producto lo es, y en el tercer caso el segundo número del producto lo es $(3k+6)$ y por lo tanto el producto.

9. Probar que no existen dos múltiplos de 3 que sumen 100.

   **Respuesta:** Supongamos por el absurdo que estos existen, luego exitirian $m,\ n \in \mathbb{N}$ tales que: $100 = 3\cdot m + 3\cdot n = 3\cdot(m+n)$. Pero esto es imposible pues 100 no es divisible por 3 [Ya que $100 = 3\cdot 33+1$].

10. Hallar el cociente y el resto de la división de:

    i) 135 por 23, ii) $-135$ por 23. iii) 135 por $-23$

    iv) $-135$ por $-23$, v) $-98$ por 73 vi) $-98$ por $-73$.

    **Respuesta:** Haremos solo dos, **i)** $135 = 23\cdot 5+20$ y por lo tanto $q=5$, $r=20$. **iv)** $-135 = -23\cdot 6+3$ y por lo tanto $q=6$, $r=3$. Note que la respuesta es distinta y eso se debe a que la convención es que el resto siempre sea positivo y menor al módulo del divisor, $0 \le r \le |b|$.

11. a) Si $a = bq+r$, con $b \le r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de $a$ por $b$.

    b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \le r < 0$.

    **Respuesta:** **a)** Suponemos $b>0$, si $b \le r < 2b$ entonces, restando $b$ en cada término, $0 \le r' := r-b < b$ y $a = bq+r = bq+r'+b = b(q+1)+r'$ con lo que el cociente es $q+1$ y el resto es $r' = r+b$. **b)** En este caso sumando $b$ en cada término de la desigualdad, tenemos $0 \le r' := r+b < b$ y $a = bq+r = bq+r'-b = b(q-1)+r'$ y por lo tanto el cociente es $q-1$, mientras que el resto es $r'$.

12. Expresar 1810, 1816 y 1972 en bases $s = 3,\ 5,\ 7,\ 11$.

    **Respuesta:** Usando el algoritmo de la división tenemos:

$$\begin{aligned} 1810 &= 3*603+1 \\ 603 &= 3*201 \\ 201 &= 3*67 \\ 67 &= 3*22+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22 &= 3*7+1 \\ 7 &= 3*2+1 \\ 2 &= 2 \end{aligned} \tag{1}$$

Luego $(1810)_{10} = (2111001)_3$. En efecto: $2\cdot 3^6+3^5+3^4+3^3+1 = 1458+243+81+27+1 = 1810$. Los otros se hacen de manera similar.

13. Expresar en base 10 los siguientes enteros:

    a) $(1503)_6$ b)$(1111)_2$ c) $(1111)_{12}$

    d) $(123)_4$ e) $(12121)_3$ f) $(1111)_5$

14. Calcular: a) $(2234)_5 + (2310)_5$ b) $(10101101)_2 + (10011)_2$.

    **Respuesta: a)** $(1503)_6 = 1\cdot 6^3 + 5\cdot 6^2 + 0\cdot 6 + 3 = 216 + 180 + 6 = 402$