Análisis en $\mathbb{R}^3$

Para vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ el *producto escalar* es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{j=1}^{3} a_jb_j$. Se usará la convención de sumación de Einstein, la cual omite el signo de adición $\sum$ cuando hay índices repetidos. E.g.,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_jb_j \ .$$

Se tiene $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ con igualdad si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Por ende $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ define una norma en $\mathbb{R}^3$ que es la distancia del punto (a_1, a_2, a_3) al origen. Se tiene la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \ ,$$

con igualdad si y sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos[1]. En caso que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ se dicen *ortogonales.* El *producto vectorial* de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ es el vector

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \ .$$

Usando el tensor tridimensional totalmente anti-simétrico ϵ definido por:

$$\epsilon_{jk\ell} := \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } (jk\ell) \text{ es permutación par de } (123) \\ -1 & , \quad \text{si } (jk\ell) \text{ es permutación impar de } (123) \\ 0 & , \quad \text{en todos los otros casos, i.e. si al menos dos de los índices son iguales} \end{cases} ,$$

se tiene

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_j = \sum_{k,\ell=1}^{3} \epsilon_{jk\ell} a_k b_\ell = \epsilon_{jk\ell} a_k b_\ell \ .$$

En los cálculos es de gran utilidad la fórmula

$$\epsilon_{jk\ell}\epsilon_{mn\ell} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \ .$$

Aqui δ es el símbolo de Kronecker

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & , \quad \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} ,$$

siendo α y β elementos de un conjunto cualquiera (no vacio). También es cierto que

$$\epsilon_{jk\ell}\epsilon_{mk\ell} = 2\delta_{jm} \ .$$

[1] Para incluir el caso trivial en el cual uno de los vectores es $\mathbf{0}$, deberiamos decir precisamente que hay igualdad si y sólo si hay $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{a} = c\mathbf{b}$ o bien $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$. Esto equivale a decir que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente dependientes.

Las propiedades básicas del producto vectorial son:

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}) \ , \ \ \mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \ , \ \ (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \ ;$$

y

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) \ .$$

Este último producto triple es el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores y se anula por ende cuando dos de ellos son paralelos.

Un tensor afin T de rango 2 es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en si mismo: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, especificada por una matriz real $3\wedge 3$, (T_{jk}) con $j,k \in \{1,2,3\}$, por

$$(T\mathbf{a})_j = \sum_{k=1}^{3} T_{jk}a_k = T_{jk}a_k \ .$$

Campos y operadores diferenciales básicos

Se consideran *campos escalares* ϕ, $\mathbb{R}^3 \supset K \in \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, *campos vectoriales* $\mathbf{A}$, $\mathbb{R}^3 \supset K \in \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$, y *campos tensoriales* T, $\mathbb{R}^3 \supset K \in \mathbf{x} \mapsto T_{jk}(\mathbf{x})$, $j,k = 1,2,3$; definidos en algún subconjunto (generalmente abierto) K de $\mathbb{R}^3$. Presuponiendo la diferenciabilidad necesaria se definen los operadores diferenciales más importantes. El *gradiente* de un campo escalar ϕ es el campo vectorial

$$\mathrm{grad}\,\phi(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\mathbf{x})\right) \ .$$

Una definición alternativa equivalente e independiente de las coordenadas es

$$\mathbf{e}\cdot(\mathrm{grad}\,\phi)(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon\to 0}[\phi(\mathbf{x}+\epsilon\mathbf{e}) - \phi(\mathbf{x})]/\epsilon \ ,$$

cualquiera sea $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ llamamos a ϕ un *potencial* para el campo vectorial $\mathbf{v}$ y decimos que $\mathbf{v}$ es *conservativo*. En tal caso la integral de linea de $\mathbf{v}$ sobre una curva (suave a trozos) cerrada es siempre nula.
La *divergencia* de un campo vectorial $\mathbf{A}$ es el campo escalar

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \ .$$

La *rotación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ es el campo vectorial

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}), \frac{\partial A_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}\right) \ .$$

Usaremos sistematicamente la notación ∇ para grad y, entendiendo al gradiente como un vector cuyas componentes son operadores diferenciales

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \ ,$$

podemos escribir (omitiendo el argumento $\mathbf{x}$)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} \ , \ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla\wedge\mathbf{A} \ .$$

Asi el operador $\mathbf{a}\cdot\nabla$, cualquiera sea $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ y campo vectorial $\mathbf{B}$ es el campo vectorial

$$((\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{B}(\mathbf{x}))_j := a_1\frac{\partial B_j}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + a_2\frac{\partial B_j}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + a_3\frac{\partial B_j}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \ .$$

El *Laplaciano* Δ de un campo escalar ϕ es el campo escalar

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = \mathrm{div}\,(\nabla\phi)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}(\mathbf{x}) \ .$$

También es usual el Laplaciano de un campo vectorial $\mathbf{A}$ definido como el campo vectorial

$$\Delta\mathbf{A} := (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3) \ .$$

Estos operadores satisfacen las siguientes relaciones e identidades:

$$\mathrm{rot}\,(\nabla\phi) = 0 \ , \quad \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = 0 \ ;$$

$$\begin{gathered}
\mathrm{div}\,(\phi\mathbf{A}) = \phi\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} \ ; \\
\mathrm{div}\,(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}) \ ; \\
\mathrm{rot}\,(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\wedge\mathbf{A} + \phi(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) \ ; \\
\mathrm{rot}\,(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathrm{div}\,\mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\mathbf{B} \ ; \\
\nabla(\phi\psi) = \phi(\nabla\psi) + \psi(\nabla\phi) \ ; \\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\wedge(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}) + \mathbf{B}\wedge(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) \ ; \\
\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = \nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \ .
\end{gathered}$$

La última identidad –válida solamente en coordenadas cartesianas– puede usarse como definición del Laplaciano de un campo vectorial.

Dado su frecuente uso, notamos que para el campo escalar $\mathbf{x}\mapsto r := \|\mathbf{x}\|$ se tiene:

$$\nabla r = \mathbf{x}/r \ , \quad \nabla(1/r) = -\mathbf{x}/r^3 \ , \quad \nabla\, f(r) = f'(r)\mathbf{x}/r \ ,$$

si $f : [0,\infty)\to\mathbb{R}$ es diferenciable con derivada f'.

Teoremas fundamentales de Integración

Los teoremas de integración básicos del análisis real en tres dimensiones son los de Gauss[2] y Stokes[3] y sus consecuencias.

Teorema 1 *(Teorema de Gauss) Si $K\subset\mathbb{R}^3$ es cerrado y acotado con borde ∂K suave[4] y $\mathbf{A}$ es un campo vectorial sobre K que es continuamente diferenciable, entonces*

$$\int_K \mathit{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,d^3x = \int_{\partial K}\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{d}\sigma \ .$$

[2]Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 (Braunschweig)-1855 (Göttingen).

[3]George Gabriel Stokes, 1819 (Skreen, Condado de Sligo, Irlanda)-1903 (Cambridge, Inglaterra).

[4]La suavidad del borde significa que el vector normal a la superficie ∂K es función continua de la posición. La hipótesis de suavidad del borde puede reemplazarse por “suavidad a trozos”, o sea ∂K es unión de un número finito de superficies suaves. En el caso en el cual K no es conexo, el miembro derecho ha de entenderse como suma de las integrales de superficie de cada componente conexa.

La integral de superficie

$$\int_{\partial K} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\sigma = \int_{\partial K} A_n(\mathbf{x}) d\sigma \ ,$$

es el flujo del campo vectorial a traves de la superficie; A_n es la componente de $\mathbf{A}$ normal a la superficie ∂K y exterior a K, y $d\sigma$ el elemento de superficie. Tenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lim_{K \to \mathbf{x}} \frac{1}{V(K)} \int_{\partial K} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\sigma \ ,$$

donde $V(K)$ es el volumen de K. Esto provee una definición de la divergencia independiente de las coordenadas y exhibe a esta como flujo infinitesimal. Si $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ en alguna región entonces el flujo de $\mathbf{A}$ a traves de cualquier superficie dentro de la region se anula y el campo $\mathbf{A}$ se denomina *solenoidal* (la región se dice libre de fuentes).
Cuando $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$ entonces $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Resulta importante determinar bajo que condiciones un campo solenoidal puede escribirse como rotación de otro campo (vease lo que sigue).

Los siguientes resultados surgen como corolarios del Teorema de Gauss

Teorema 2 *Si ϕ es un campo escalar continuamente diferenciable sobre $K \subset \mathbb{R}^3$ que cumple las condiciones del teorema de Gauss entonces*

$$\int_K \nabla \phi(\mathbf{x}) \ d^3x = \int_{\partial K} \phi(\mathbf{x}) \mathbf{d}\sigma \ .$$

Teorema 3 *Si $\mathbf{A}$ y K cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss, entonces*

$$\int_K rot \ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \ d^3x = - \int_{\partial K} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{d}\sigma$$

Teorema 4 *Sea $T_{jk}(\mathbf{x})$ un campo tensorial continuamente diferenciable definido en K que cumple con las hipótesis del Teorema de gauss entonces*

$$\int_K \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j}(\mathbf{x} \ d^3x = \int_{\partial K} T_{jk}(\mathbf{x}) d\sigma_j \ .$$

Teorema 5 *(Teorema de Green[5]) Si f y g son campos escalares dos veces continuamente diferenciables sobre K que cumple las hipótesis del Teorema de Gauss, entonces*

$$\int_K (f(\mathbf{x})(\Delta g)(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})(\Delta f)(\mathbf{x}) \ d^3x = \int_{\partial K} (f(\mathbf{x}) \nabla g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{d}\sigma \ .$$

El Teorema de Green se extiende al caso donde K no es acotado si tanto f como g decaen lo suficientemente rapidamente a cero en el infinito (`dar biblio`).

El Teorema de Stokes es un análogo bidimensional del de Gauss.

[5]George Green, 1793 (Sneiton, Inglaterra)-1841 (Nottingham, Inglaterra).

Teorema 6 *(Teorema de Stokes) Sea F una superficie orientada, cerrada y acotada con borde ∂F suave y $\mathbf{u}$ un campo vectorial continuamente diferenciable en una región G que contiene a F y ∂F. Entonces*

$$\int_F (rot\,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{df} = \int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds}$$

donde en la integral de linea el elemento de linea $\mathbf{ds}$ *con la normal a la superficie forman una* `Rechtsschraube`.

La integral de linea

$$\int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds} = \int_{\partial F} u_t ds$$

(u_t es la componente de $\mathbf{u}$ tangencial a la curva ∂F) corresponde a la circulación del campo vectorial a lo largo de la curva (cerrada) ∂F e indica cuanto el campo "enrolla a la superficie". Se tiene

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{u})(\mathbf{r}) = \lim_{F \to \mathbf{r}} \frac{1}{S(F)} \int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds}\ ,$$

donde la superficie F de área $S(F)$ se contrae al punto $\mathbf{r}$. Lo que indica que $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ en $\mathbf{r}$ es la densidad de circulación infinitesimal en $\mathbf{r}$. Esto provee una definición de la rotación independiente de las coordenadas cartesianas. Un campo vectorial $\mathbf{a}$ para el cual $\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$ se dice *irrotacional* o bien *libre de vortices*.

Un corolario es:

Teorema 7 *Sea F, ∂F y G como en el Teorema de Stokes y ϕ un campo escalar continuamente diferenciable sobre G. Entonces*

$$\int_F (\nabla\phi) \wedge \mathbf{df} = -\int_{\partial F} \phi \mathbf{ds}\ ,$$

con la misma condición sobre el sentido de integración en la integral de linea que en el Teorema de Stokes.

<u>*Solución de $rot\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$*</u>

Si $\mathbf{v} = \nabla\phi$ entonces $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Inversamente ¿todo campo vectorial irrotacional es conservativo? La respuesta es no necesariamente (ejercicio) aunque para regiones simplemente conexas el Teorema de Stokes nos entrega:

Teorema 8 *Si $rot\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en una region simplemente conexa G donde $\mathbf{v}$ es continuamente diferenciable, entonces para $\mathbf{p} \in G$ fijo, la integral de linea*

$$\phi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}\ ,\ \ \mathbf{x} \in G\ ,$$

es independiente de la curva (suave) que une a $\mathbf{p}$ con $\mathbf{x}$ y define un potencial para $\mathbf{v}$; o sea $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Este potencial es único hasta una constante aditiva que depende del punto $\mathbf{p}$.

En particular todo campo libre de vortices en una región simplemente conexa es conservativo.

Solución de div $\mathbf{v} = 0$

Si $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$ entonces $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Al campo vectorial $\mathbf{a}$ se le puede agregar por supuesto $\nabla\phi$, donde el campo escalar ϕ es arbitrario (diferenciable), ya que $\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \nabla\phi) = \mathbf{v}$.
Interesa la pregunta (inversa): ¿todo campo vectorial solenoidal es el rotor de algun campo vectorial? Como en el problema anterior la respuesta depende de la estructura geométrica de la región K donde esta definido el campo vectorial. Si K tiene la propiedad de que cualquier superficie cerrada contenida en K encierra un volumen enteramente contenido en K entonces todo campo solenoidal continuamente diferenciable en K es el rotor de otro campo vectorial en K. Pero si esta condición sobre K no se cumple entonces hay campos vectoriales continuamente diferenciables solenoidales en K que no son el rotor de otro campo (ejercicio).

Solución de la ecuación de Poisson

Teorema 9 *Si el campo escalar ϕ es solución de la ecuación de Poisson*

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \ , \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \ ,$$

y para $\|\mathbf{r}\| =: r \longrightarrow \infty$ se tiene

$$\phi(\mathbf{r}) \longrightarrow 0 \ , \quad r\nabla\phi(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{0} \ ,$$

entonces

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|} \, d^3x$$

cuando la integral existe.

Teorema 10 *Si el campo escalaar f sobre $\mathbb{R}^3$ es continuo y la integral $\int \|f(\mathbf{x})\| d^3x$ existe entonces existe*

$$\phi(\mathbf{r}) := -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|} \, d^3x \ ,$$

y es la única solución de la ecuación de Poisson $\Delta\phi = f$ para la cual $\phi(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(1/r)$ para $r \to \infty$.

Soluciones de la ecuación de Laplace. Funciones armónicas.

Una *función armónica* en un abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un campo escalar que resuelve la ecuación de Laplace

$$\Delta f = 0 \ , \quad \text{en } G$$

y que es continua en la clausura $\overline{K}$ de K.

Teorema 11 *(Teorema del valor medio) Si f sobre K es armónica y S es una esfera de radio R contenida en $\overline{K}$ y centrada en $\mathbf{x}$, entonces*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial S} f(\mathbf{y}) d\sigma \ .$$

Como consecuencia de este resultado tenemos: Si ϕ es armónica en $\mathbb{R}^3$ y decae a cero en el infinito entonces $\phi \equiv o$. Otra consecuencia es:

Teorema 12 *Si ϕ es armónica en el abierto acotado K entonces asume su valor maximo y su valor mínimo en el borde de K:*

$$\min_{\mathbf{y}\in\partial K} \phi(\mathbf{y}) < \phi(\mathbf{x}) < \max_{\mathbf{y}\in\partial K} \phi(\mathbf{y}) \ ,$$

para todo $\mathbf{x} \in K$. En particular, ϕ es identicamente nula si se anula en ∂K.

Descomposición de un campo vectorial en suma de un campo solenoidal y de un campo irrotacional.

Teorema 13 *Si el campo vectorial $\mathbf{A}$ sobre $\mathbb{R}^3$ satisface*

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\| \leq \frac{C}{\|x\|^{1+\epsilon}} \ , \quad \textit{para todo } \mathbf{x} \textit{ con } \|x\| > R \ ,$$

donde $C > 0$, $\epsilon > 0$ y $R > 0$; entonces hay una descomposición única

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x}) \ ,$$

donde $div\,\mathbf{B} = 0$, $rot\,\mathbf{C} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B}, \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{0}$ para $\|\mathbf{x}\| \to \infty$. Se tiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int (rot\,\mathbf{A})(\mathbf{y}) \wedge \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3} \, d^3y \ ,$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int (div\,\mathbf{A})(\mathbf{y}) \, \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3} \, d^3y \ .$$

$\mathbf{C} = \nabla\phi$, *y* $\mathbf{B} = rot\,\mathbf{D}$, *donde*

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{div\,\mathbf{A}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \, d^3y \ ;$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{rot\,\mathbf{A}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \, d^3y \ .$$

Coordenadas curvilineas ortogonales[6]

Considerese coordenadas x_1, x_2, x_3. Las superficies de coordenadas están dadas por $x_j = const.$, $j = 1, 2, 3$. y en cada punto estas tres superficies se intersectan en tres lineas de coordenadas. Las coordenadas se dicen ortogonales si en cada punto las tangentes a estas tres lineas son dos-a-dos ortogonales entre si. Mas precisamente, partiendo del elemento de arco infinitesimal en coordenadas cartesianas, x, y, z,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \ ,$$

[6] El caso de coordenadas curvilineas generales es más complicado y requiere elementos de geometría diferencial. Hay que distinguir componentes covariantes y contravariantes de un vector, etc.

podemos encontrar este elemento de arco en las nuevas coordenadas si tenemos las funciones $x = x(x_1, x_2, x_3)$, $y = y(x_1, x_2, x_3)$ y $z = z(x_1, x_2, x_3)$. El sistema (x_1, x_2, x_3) se dice *ortogonal* si

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 \ ,$$

o sea no aparecen términos cruzados $dx_j dx_k$ con $j \neq k$; o sea:

$$\frac{\partial x}{\partial x_j}\frac{\partial x}{\partial x_k} + \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_k} + \frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_k} = \delta_{jk} h_j^2 \ . \tag{1}$$

Los *factores de escala* h_j, dados por

$$h_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)^2} \ , \ \ j = 1, 2, 3 \ ,$$

son en general funciones de (x_1, x_2, x_3). Considerando la transformación inversa del sistema (x_1, x_2, x_3) al cartesiano que es ortogonal, vemos que la ortogonalidad del sistema (x_1, x_2, x_3) es equivalente a

$$\nabla x_j \cdot \nabla x_k = 0 \ , \ \text{ para } j \neq k \ .$$

Se introducen vectores $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, que son unitarios (de largo 1) en las direcciones coordenadas y por ende dos-a-dos ortogonales. El vector de desplazamiento infinitesimal es

$$\mathbf{ds} = \mathbf{e}_1 h_1 dx_1 + \mathbf{e}_2 h_2 dx_2 + \mathbf{e}_3 h_3 dx_3 \ ,$$

y satisface $ds^2 = \mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds}$. El elemento infinitesimal de volumen es entonces $h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3$.
Para encontrar los vectores $\mathbf{e}_j$ en términos de los vectores canónicos cartesianos $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{e}_z$ se procede de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
\mathbf{ds} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz &= \mathbf{e}_x \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial x_j} dx_j + \mathbf{e}_y \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial x_j} dx_j + \mathbf{e}_z \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial x_j} dx_j \\
&= dx_1 \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x_1}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial x_1}\mathbf{e}_z \right) + dx_2 \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x_2}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial x_2}\mathbf{e}_z \right) \\
&\quad + dx_3 \left(\frac{\partial x}{\partial x_3}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x_3}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial x_3}\mathbf{e}_z \right) \ .
\end{aligned}$$

Los vectores

$$\mathbf{a}_j := \frac{\partial x}{\partial x_j}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x_j}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial x_j}\mathbf{e}_z \ , \ \ j = 1, 2, 3 \ ,$$

satisfacen entonces $\mathbf{a}_j = h_j \mathbf{e}_j$, $h_j = \|\mathbf{a}_j\|$.
Introduciendo la matriz *Jacobiana*,

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial x}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_3} \end{pmatrix} \ ,$$

vemos que las columnas de ella nos dan los coeficientes que multiplican a los vectores de base cartesianos para obtener los nuevos vectores de base (no necesariamente normalizados) $\mathbf{a}_j$. Las coordenadas (x_1, x_2, x_3) son ortogonales exactamente cuando las columnas de $\widetilde{J}$ son dos-a-dos ortogonales. Normalizando las columnas

$$J = \begin{pmatrix} h_1^{-1}\frac{\partial x}{\partial x_1} & h_2^{-1}\frac{\partial x}{\partial x_2} & h_3^{-1}\frac{\partial x}{\partial x_3} \\ h_1^{-1}\frac{\partial y}{\partial x_1} & h_2^{-1}\frac{\partial y}{\partial x_2} & h_3^{-1}\frac{\partial y}{\partial x_3} \\ h_1^{-1}\frac{\partial z}{\partial x_1} & h_2^{-1}\frac{\partial z}{\partial x_2} & h_3^{-1}\frac{\partial z}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \widetilde{J}\, diag(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3) \ ,$$

esta matriz J tiene columnas normalizadas y dos-a-dos ortogonales. Aqui

$$diag(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} .$$

Considerando la transformación inversa, se deduce (del Teorema de la función inversa multidimensional) que las filas de J también estan normalizadas y son dos-a-dos ortogonales. Se tiene

$$h_j^2 \frac{\partial x_j}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x_j} \ , \ \ h_j^2 \frac{\partial x_j}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x_j} \ , \ \ h_j^2 \frac{\partial x_j}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial x_j} \ .$$

La matriz J es ortogonal y su inversa es igual a su transpuesta J^T

Cada vector $\mathbf{v} = V_x\mathbf{e}_x + V_y\mathbf{e}_y + V_z\mathbf{e}_z$ con componentes cartesianas (V_x, V_y, V_z) tiene entonces la representación

$$\mathbf{v} = V_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 + V_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + V_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3$$

donde las coordenadas se obtienen de

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \ ; \ \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} .$$

****

Ejemplo: Para las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) $(0 \leq r,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R})$, tenemos $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, y $z = z$. Luego,

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$. Luego, $\mathbf{a}_r = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y$, $\mathbf{a}_\varphi = r(-\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y)$, $\mathbf{a}_z = \mathbf{e}_z$. Y $\mathbf{e}_r = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y$.

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Las coordenadas cilíndricas (V_r, V_φ, V_z) se obtienen entonces de las cartesianas:

$$V_r = \cos(\varphi)V_x + \sin(\varphi)V_y \ , \ \ V_\varphi = -\sin(\varphi)V_x + \cos(\varphi)V_y \ , \ \ V_z = V_z \ .$$

Observese que el vector $\mathbf{x} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ se escribe $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$.

****

Para el gradiente, la divergencia, el laplaciano y la rotación se obtienen, respectivamente, la siguientes fórmulas

$$\nabla\phi = \sum_{j=1}^{3} h_j^{-1} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\, \mathbf{e}_j \ .$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = (h_1h_2h_3)^{-1}\left\{\frac{\partial(h_2h_3v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1h_3v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1h_2v_3)}{\partial x_3}\right\} \ .$$

$$\Delta\psi = (h_1h_2h_3)^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)\right\} \ .$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = (h_2h_3)^{-1}\left(\frac{\partial(h_3v_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2v_2)}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + (h_1h_3)^{-1}\left(\frac{\partial(h_1v_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3v_3)}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2$$

$$+(h_1h_2)^{-1}\left(\frac{\partial(h_2v_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1v_1)}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3 \ .$$

Aqui el campo vectorial es

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 \ .$$

La demostración de estas fórmulas es tediosa pero no complicada. Se usa sistemáticamente la regla de la cadena y la ortogonalidad de la matriz J. Como ejemplo, demostramos la fórmula para el gradiente.

Observamos primero que si la transformación de coordenadas $(x,y,z) \to (x_1,x_2,x_3)$ es mediada por una matriz $\widetilde{J}$ de columnas ortogonales, entonces la transformación inversa $(x_1,x_2,x_3) \to (x,y,z)$ es mediada por la matriz $\widetilde{J}^{-1}$

$$\widetilde{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x} & \frac{\partial x_3}{\partial y} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{pmatrix} \ .$$

Para el gradiente, tenemos

$$\nabla\phi = V_j\mathbf{e}_j \ ,$$

donde

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= J^T \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_3}{\partial x} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_3}{\partial y} \\ \frac{\partial x_1}{\partial z} & \frac{\partial x_2}{\partial z} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = J^T\ (\widetilde{J}^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\widetilde{J}^{-1}\ J\right)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\underbrace{\widetilde{J}^{-1}\ \widetilde{J}}_{=diag(1,1,1)}\quad diag(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3)\right)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= (diag(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3))^T \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = diag(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3) \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} .$$

Lo que comprueba la fórmula indicada: $V_j = h_j^{-1} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}$. Como es costumbre (no siempre sana[7]) no distinguimos notacionalmente a $\phi(x, y, z)$ de $\phi(x_1, x_2, x_3) := \phi(x(x_1, x_2, x_3), y(x_1, x_2, x_3), z(x_1, x_2, x_3))$.

El lector podrá practicar esta gimnasia demostrando las demás fórmulas dadas. Esto esta bien tratado en el librito de G. Temple, *Cartesian Tensors: An introduction* (Methuen & Co, London 1960).

[7]¿Que es $\phi(2, 3, 17)$?