La geometría de la mecánica clásica

Oscar Reula

Mayo, 28, 2007

Chapter 1

La geometría de la mecánica clásica

1.1 Introducción

En estas notas discutiremos la geometría de la mecánica clásica y veremos como ya en ésta están presentes mucha de la estructura de la mecánica cuántica.

El punto de partida serán las ecuaciones de Hamilton y los paréntesis de Poisson .

Supondremos que estamos en un espacio de las fases Γ construido a partir de un espacio de configuración Q. Es decir, localmente tenemos coordenadas $(\{q^\alpha\},\{p_\alpha\})$, $\alpha = 1..n$. Donde hemos elegido, por alguna razón, un conjunto de co-vectores en Q, los $\{p_\alpha\}$. Si tuviésemos un Lagrangiano definido en el espacio de trayectorias en Q, luego los co-vectores $\{p_\alpha\}$ vendrían dados por:

$$p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$$

Pero por el momento solo supondremos que estos nos fueron dados de alguna manera.

Dado un hamiltoniano en Γ, es decir una función suave de Γ en los reales $H = H(q^\alpha, p_\alpha)$, podemos escribir las ecuaciones de Hamilton correspondientes,

$$\dot{q}^\alpha := \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \tag{1.1}$$

$$\dot{p}_\alpha := -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \tag{1.2}$$

Nótese que estas ecuaciones relacionan un vector –el lado derecho de estas ecuaciones es un vector pues es la velocidad (vector tangente) a una trayectoria en el espacio de las fases– con un co-vector, el diferencial de H. Esta es una relación lineal, si $H = H_1 + H_2$ entonces el vector sería la la suma de un término conteniendo el diferencial de H_1 y otro conteniendo el diferencial de H_2. Por lo tanto la relación entre estas dos entidades geométricas debe ser un tensor de tipo $\binom{2}{0}$, que llamaremos ω. Para expresar estas relaciones es conveniente y hacer una geometría que sea independiente de las particularidades de las coordenadas canónicas, supondremos que en Γ existe un sistema de coordenadas genérico, sin ninguna propiedad particular, $\{\zeta^A\}$, $A = 1..2n$.

En coordenadas canónicas (q^α, p_α) este tensor tiene la siguiente forma:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\alpha{}_\beta \\ -\delta_\alpha{}^\beta & \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

ya que toma el co-vector $(\frac{\partial H}{\partial q^\beta}, \frac{\partial H}{\partial p_\beta})$ y lo transforma en el vector $(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha})$. Este vector, que denotaremos por X_H se denomina vector Hamiltoniano, en componentes, $X^A_H := \omega^{AB}\frac{\partial H}{\partial \zeta^A}$.

Si consideramos la expresión para ω en coordenadas canónicas (q^α, p_α), es decir (1.3), lo primero que notamos del tensor ω es que es antisimétrico: si lo contraemos con dos covectores, τ y σ tenemos $\omega(\tau,\sigma) = -\omega(\sigma,\tau)$. También notamos que este tensor es invertible. Llamaremos a su inversa con el mismo nombre. También notamos que este tensor es constante, es decir sus componentes son constantes. Pero esta propiedad, a diferencia de las dos anteriores, no puede ser general, si cambiamos de sistema de coordenadas, en las nuevas coordenadas esto no sucederá. En realidad hay una propiedad importante que sí es invariante y más abajo veremos como enunciarla.

Las propiedades de antisimetría e invertibilidad de ω ya nos dicen algo de la estructura de los sistemas mecánicos que admiten este tipo de estructura canónica. Imaginemos que alguien viene y nos dice: *Tengo este espacio Γ con un tensor de tipo $\binom{2}{0}$ que es antisimétrico e invertible.* Inmediatamente le podemos comunicar que sabemos que su dimensión es par

Lema 1.1 *Sea Γ un espacio equipado con un tensor ω de tipo $\binom{2}{0}$ que es antisimétrico e invertible, luego su dimensión es par.*

Prueba:Tomemos un punto cualquiera en, p, en Γ y allí un co-vector $\theta^1_+ \neq 0$, luego $\omega(\theta^1_+,\cdot)$ es un vector, debido a que ω en invertible existirá algún co-vector θ^1_- necesariamente distinto de θ^1_+ tal que $\omega(\theta^1_+,\theta^1_-) = 1$ [Si no hubiese un vector tal que $\omega(\theta^1_+,\theta^1_-) \neq 0$ entonces $\omega(\theta^1_+,\cdot)$ sería cero y por lo tanto ω no sería invertible. Como $\omega(\theta^1_+,\theta^1_+) = 0$, por antisimetría, θ^1_- no puede ser proporcional a θ^1_+. Una vez que hayamos un co-vector tal que la contracción con $\omega(\theta^1_+,\cdot)$ es distinta de cero, lo normalizamos hasta que esta tenga el valor 1. Ese es nuestro θ^1_-]. Consideramos ahora el espacio de todos los co-vectores σ en $p \in \Gamma$ tales que $\omega(\theta^1_+,\sigma) = \omega(\theta^1_-,\sigma) = 0$. Este es un espacio de dimensión $\dim\Gamma - 2$, ya que ningún vector en el es proporcional a ninguna combinación lineal de θ^1_+, y θ^1_-. Allí repetimos el argumento anterior, y obtenemos un nuevo par de co-vectores (θ^2_+,θ^2_-), linealmente independiente entre sí y con respecto a los dos anteriores. Continuando de esa manera llegamos al caso en que, si $\dim\Gamma$ era par, el espacio remanente es el elemento cero (y obtenemos una co-base donde ω solo tiene elementos 1, -1 y 0), o si $\dim\Gamma$ es impar nos queda un espacio de dimensión uno. Es este subespacio debemos tener $\omega(\sigma,\cdot) = 0 \quad \forall\ \sigma$, ya que por construcción $\omega(\sigma,\theta^i_+) = \omega(\sigma,\theta^i_-) = \omega(\sigma,\sigma) = 0$. Pero esto contradice la invertibilidad de ω. ♠

1.1.1 Paréntesis de Poisson

Una propiedad importante de las ecuaciones de Hamilton es que estas nos permiten expresar todas las ecuaciones en término de los **paréntesis de Poisson**. Sea f una función cualquiera en Γ, luego

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha \\ &= \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \\ &:= \{f, H\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde en la primera línea hemos usado la definición de la derivada direccional de f a lo largo de la trayectoria solución. En la segunda las ecuaciones de Hamilton y en la última hemos introducido la definición del paréntesis de Poisson:

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \tag{1.5}$$

Notemos algunas propiedades del paréntesis de Poisson:

1. **[Antisimetría]:** Para todo par de funciones f, g, en Γ

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

2. **[Invertibilidad]:**
   Existen $2n = \dim \Gamma$ funciones $\{q^\alpha, p_\alpha\}$ tales que
   $$\{q^\alpha, q^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \;\; \{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha{}_\beta$$

3. **[Linealidad]:** Para todo conjunto de funciones f, g y h en Γ y constante c,
   $$\{f, g + ch\} = \{f, g\} + c\{f, h\}$$

4. **[Leibniz]:** Para todo conjunto de funciones f, g y h en Γ,
   $$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$$

5. **[Id. de Jacobi]:** Para todo conjunto de funciones f, g y h en Γ,
   $$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, g\}\} = 0$$

Las discutiremos ahora en detalle: La primera, (1) es obvia y se refiere a la antisimetría de ω, de hecho, podemos expresar el paréntesis de Poisson como:

$$\{f, g\} = \omega^{AB} \partial_A f \partial_B g \tag{1.6}$$

ya que en las coordenadas canónicas obtenemos la expresión anterior (para condensar la notación de ahora en más usaremos ∂_A en lugar de $\frac{\partial}{\partial \zeta^A}$.

La ventaja de esta definición alternativa es que ahora es válida en cualquier sistema de coordenadas, ya no necesitamos más tener que trabajar en coordenadas canónicas.

La segunda condición nos dice que podemos encontrar una base de co-vectores como la que encontramos en el lema anterior, pero además que estos diferenciales de funciones. Esencialmente esta condición que parece tan fuerte es equivalente a la invertibilidad de ω. Pero está mezclada con otras atribuciones de ω que veremos luego.

La tercer y cuarta condición nos aseguran que fijando una de las funciones, digamos g. La expresión $\{f, g\}$ es una derivación en f. Es decir es la derivada direccional de f en alguna dirección, esa dirección, o vector, lo llamamos X_g, y como vimos anteriormente tiene componentes $X_g^A = \omega^{AB} \partial_B g$. Haciendo el camino inverso, las condiciones (3,4) nos dicen que hay una trasformación lineal, ω, que nos transforma el diferencial de g en un vector, mientras que (1,2) nos dice que la misma está dada por un tensor invertible y antisimétrico.

La quinta condición (5), llamada identidad de Jacobi, no es una condición que parezca automática y en realidad es una condición muy importante. Esta condición es la que hace que la estructura esta sea lo que los matemáticos llaman *álgebra de Lie* . Es decir un espacio vectorial (en este caso el da las funciones suaves de Γ en los reales) con un producto antisimétrico (en este caso el paréntesis de Poisson) que satisface la identidad de Jacobi.

<u>Ejercicio</u>: Sea V^n el espacio de matrices $n \times n$. Sea el producto dado por la conmutación de matrices $[A, B] = AB - BA$. Mostrar que esta es un álgebra de Lie. Es decir constatar la identidad de Jacobi.

Esta relación es muy importante. En mecánica cúantica los observables de la teoría clásica, es decir las funciones en Γ, se identifican con *operadores*, es decir matrices cuadradas (posiblemente de infinitas columnas y filas) y el paréntesis de Poisson se transforma en la conmutación de operadores. Si no tuviésemos la identidad de Jacobi para el paréntesis de Poisson no habría manera de hacer esta identificación.

<u>Ejercicio</u>: Probar por cálculo directo a partir de la definición (**??**) la identidad de Jacobi.

Veamos ahora que nos dice la identidad de Jacobi si ahora la intentamos probar usando la definición invariante (1.6).

$$
\begin{aligned}
0 &= \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,g\}\} \\
&= \omega^{AB}\partial_A f \partial_B(\omega^{CD}\partial_C g \partial_D h) + \omega^{AB}\partial_A h \partial_B(\omega^{CD}\partial_C f \partial_D g) \\
&\quad + \omega^{AB}\partial_A g \partial_B(\omega^{CD}\partial_C h \partial_D f) \\
&= \partial_A f \partial_C g \partial_D h(\omega^{AB}\partial_B \omega^{CD} + \omega^{DB}\partial_B \omega^{AC} + \omega^{CB}\partial_B \omega^{DA}) \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad hemos tirado todos los términos con derivadas segundas, ya que estos se cancelan entre sí (ver ejercicio anterior). Como las funciones f, g y h son arbitrarias la condición de que la identidad de Jacobi se cumpla es que

$$
\omega^{AB}\partial_B \omega^{CD} + \omega^{DB}\partial_B \omega^{AC} + \omega^{CB}\partial_B \omega^{DA} = 0 \qquad (1.8)
$$

Contrayendo esta expresión con $\omega_{AP}\omega_{CQ}\omega_{DT}$, con la convención para la inversa que $\omega^{AB}\omega_{BC} := \delta^A{}_C$, obtenemos

$$
\partial_P \omega_{QT} + \partial_T \omega^{PQ} + \partial_Q \omega^{TP} = 0. \qquad (1.9)
$$

[Para hacer esta cuenta note que el primer término, por ejemplo, es:

$$
\begin{aligned}
\omega_{AP}\omega_{CQ}\omega_{DT}\omega^{AB}\partial_B \omega^{CD} &= -\delta^B{}_P \omega_{CQ}\omega_{DT}\partial_B \omega^{CD} \\
&= -\omega_{CQ}\omega_{DT}\partial_P \omega^{CD} \\
&= -\omega_{DT}\partial_P(\omega_{CQ}\omega^{CD}) + \omega^{CD}\omega_{DT}\partial_P \omega_{CQ} \\
&= -\omega_{DT}\partial_P(-\delta^D{}_Q) + \delta^C{}_T \partial_P \omega_{CQ} \\
&= \partial_P \omega_{TQ}
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que la derivada de $\delta^A{}_B$ es cero.]

La expresión (1.9) es proporcional a la derivada antisimetrizada de ω_{AB} o sea a su derivada exterior y vemos que entonces la condición de Jacobi nos dice que la derivada exterior de ω debe anularse.

Definición: Diremos que un espacio Γ posee una **estructura simpléctica** si existe en el un tensor antisimétrico e invertible ω_{AB}, tal que su derivada exterior, $\partial_{[A}\omega_{BC]} = 0$.

Ejercicio: La propiedad de que la derivada exterior de ω se anule implica (por el Teorema de Poincaré o Frobenius) que localmente existe un co-vector θ_B tal que $\omega_{AB} = \partial_{[A}\theta_{B]}$. ¿Cual es este co-vector en el caso de que Γ sea un espacio de fases usual? Ayuda: en cada punto de Γ existe cierto co-vector que proviene del espacio de configuración.

En realidad las estructuras simplécticas no son muy distintas a los espacios de fase normales, localmente son indistinguibles como lo demuestra el teorema de Darboux:

Teorema 1.1 *Darboux: Dada una estructura simpléctica y dado cualquier punto $p \in \Gamma$ existe un entorno del mismo y un sistema coordenado $(\{q^\alpha\}, \{p_\alpha\})$ tal que en dichas coordenadas ω tiene las componentes dadas por (1.3).*

La prueba de este teorema excede el nivel de este curso. Puede ser encontrada, por ejemplo, en [[**?**]].

Pero debe tenerse en cuenta que hay espacios donde se puede hacer mecánica y que estos no tienen necesariamente la forma de espacios de fase. Por ejemplo, si tomamos que el espacio de configuración de nuestro sistema es el círculo (como lo es por ejemplo para el problema del péndulo) luego su espacio de fase es el cilindro, esto es porque debemos aceptar todo posible valor del momento. Este es entonces un espacio de fase. Pero también podríamos considerar el espacio Γ dado por un toro. Este no tiene la estructura de un espacio de fase convencional, ya que no hay ninguna coordenada que pueda tener valores arbitrariamente largos. Estos espacios aparecen naturalmente en mecánica cuando reducimos un sistema mayor a una superficie de energía constante.

1.1.2 El álgebra de vectores hamiltonianos

Diremos que un vector de la forma $X^A = \omega^{AB}\partial_B g$ es hamiltoniano, con función generadora g, y lo denotaremos como: X_g. Notemos que $X_g(h) = X_g^A \partial_A h = \omega^{AB}\partial_B g \partial_A h = \{h, g\}$. Dadas funciones suaves en Γ tendremos por cada una de ellas un vector hamiltoniano. Si tomamos el corchete de Lie entre ellos generaremos un álgebra de Lie. ¿Cual será esta? Veamos:

$$
\begin{aligned}
[X_f, X_g](h) &:= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\
&= X_f(\{h, g\}) - X_g(\{h, f\}) \\
&= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} \\
&= \{\{h, g\}, f\} + \{\{f, h\}, g\} \\
&= -\{\{g, f\}, h\} \\
&= \{h, \{g, f\}\} \\
&= X_{\{g,f\}}(h),
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Donde en la primera igualdad se uso la definición del corchete de Lie, en la segunda que $X_g(h) := \{h, g\}$, en la cuarta la identidad de Jacobi y finalmente nuevamente la definición de vector hamiltoniano. Vemos que el álgebra de estos vectores coincide con el del álgebra de Poisson de sus funciones generadoras (hay un signo de diferencia que podríamos absorber redefiniendo los vectores con un signo menos).

1.2 La relación entre simetrías y cantidades conservadas

Una simetría es de un sistema dinámico es una transformación del espacio de fase en sí mismo, que llamaremos $\Phi : \Gamma \to \Gamma$ que es invertible que lleva soluciones del sistema en otras soluciones del mismo.

Entre las simetrías posibles están aquellas que no están aisladas sino que forman un contínuo en el espacio de trasformaciones de manera tal que podemos considerar familias de transformaciones, por ejemplo dependientes en forma suave de un parámetro, digamos, s. [1] Tenemos así una familia o curva de simetrías, Φ_s. Esta estructura nos permite definir simetrías infinitesimales, las cuales son equivalentes a un campo vectorial en Γ, en efecto, si tomamos un punto cualquiera, p, en Γ, podemos considerar la curva $\gamma_s^\Phi(p) = \Phi_s(p)$, o sea la curva que lleva al punto p a lo largo de las simetrías. El vector tangente a esta curva, digamos a $s = 0$, en cada uno de los puntos de Γ es el que nos da el campo vectorial que andamos buscando. Este campo es llamado una transformación infinitesimal, pues nos indica donde van los puntos ante la aplicación de Φ_{ds}, lo llamaremos $\boldsymbol{u}_{d\Phi}$. Ahora nos preguntamos cuando estas transformaciones son simetrías, es decir cuando transforman soluciones en soluciones. Sea entonces γ_t una solución a nuestro sistema hamiltoniano, es decir una curva en Γ cuyo vector tangente esta dado por $\partial_t \gamma_t = X_H$, en coordenadas $\partial_t \zeta^A = \omega^{AB}\partial_B H$. En cada punto de esa curva actúa la trasformación Φ_s y por lo tanto tenemos una superficie con respecto a dos parámetros, $\gamma_{t,s}$, cuando nos movemos a lo largo de t lo hacemos a lo largo de la curva solución, cuando lo hacemos a lo largo de s lo hacemos a lo largo de la transformación. Esta será una simetría si $\gamma_{t,s+ds}$ es también una solución, es decir si allí su vector tangente es también el vector hamiltoniano. Tomando derivadas en s y luego en t y viceversa y substrayendo, lo cual nos debe dar cero, esto se traduce en que los campos $\boldsymbol{u}_{d\Phi}$ y X_H deben conmutar entre sí. Esto es

$$
0 = [\boldsymbol{u}_{d\Phi}, X_H] = \pounds_{\boldsymbol{u}_{d\Phi}}(X_H). \tag{1.11}
$$

[1] Hay simetrías que son discretas, como por ejemplo la simetría que un sistema puede tener si es el mismo de los dos lados de un plano.

De hecho, como $\frac{d\zeta^A}{ds} = u^B_{d\Phi}\partial_B\zeta^A$, y $\frac{d\zeta^A}{dt} = X^B_H\partial_B\zeta^A$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\zeta^A}{dsdt} - \frac{d^2\zeta^A}{dtds} &= u^B_{d\Phi}\partial_B(X^C_H\partial_C\zeta^A) - X^B_H\partial_B(u^C_{d\Phi}\partial_C\zeta^A) \\
&= [u^B_{d\Phi}\partial_B X^C_H - X^B_H\partial_B u^C_{d\Phi}]\partial_C\zeta^A \\
&= \pounds_{\boldsymbol{u}_{d\Phi}}(X_H)^C\partial_C\zeta^A
\end{aligned}$$

Veamos ahora que condiciones implica la ecuacin anterior. En componentes,

$$\begin{aligned}
(\pounds_{\boldsymbol{u}_{d\Phi}}(X_H))^A &= \boldsymbol{u}^B_{d\Phi}\partial_B X^A_H - X^B_H\partial_B\boldsymbol{u}^A_{d\Phi} \\
&= \boldsymbol{u}^B_{d\Phi}\partial_B(\omega^{AC}\partial_C H) - \omega^{BC}\partial_C H\partial_B\boldsymbol{u}^A_{d\Phi} \\
&= \boldsymbol{u}^B_{d\Phi}\omega^{AC}\partial_B\partial_C H + \boldsymbol{u}^B_{d\Phi}\partial_C H\partial_B\omega^{AC} - \omega^{BC}\partial_C H\partial_B\boldsymbol{u}^A_{d\Phi} \\
&= \boldsymbol{u}^B_{d\Phi}\omega^{AC}\partial_C\partial_B H + \boldsymbol{u}^B_{d\Phi}\partial_C H\partial_B\omega^{AC} - \omega^{BC}\partial_C H\partial_B\boldsymbol{u}^A_{d\Phi} \\
&= \omega^{AC}\partial_C(\boldsymbol{u}^B_{d\Phi}\partial_B H) - \omega^{AC}\partial_B H\partial_C\boldsymbol{u}^B_{d\Phi} + \boldsymbol{u}^B_{d\Phi}\partial_C H\partial_B\omega^{AC} \\
&- \omega^{BC}\partial_C H\partial_B\boldsymbol{u}^A_{d\Phi} \\
&= \omega^{AC}\partial_C(\boldsymbol{u}_{d\Phi}(H)) + \partial_B H(\boldsymbol{u}^C_{d\Phi}\partial_C\omega^{AB} - \omega^{AC}\partial_C\boldsymbol{u}^B_{d\Phi} - \omega^{CB}\partial_C\boldsymbol{u}^A_{d\Phi}) \\
&= X^A_{\boldsymbol{u}_{d\Phi}(H)} + \pounds_{\boldsymbol{u}_{d\Phi}}(\omega^{AB})\partial_B H. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

donde el primer término en la última línea es el campo hamiltoniano asociado a la función $\boldsymbol{u}(H)$. Por lo tanto vemos que si

$$\boldsymbol{u}_{d\Phi}(H) = 0 \qquad (1.13)$$

$$\pounds_{\boldsymbol{u}_{d\Phi}}(\omega^{AB}) = 0 \qquad (1.14)$$

entonces $\boldsymbol{u}_{d\Phi}$ es una simetría infinitesimal. La primera es una condición clara, el Hamiltoniano no debe cambiar a lo largo de la simetría. La segunda se puede re-expresar como $\pounds_{\boldsymbol{u}_{d\Phi}}(\omega_{AB}) = 0$ ya que la derivada de Lie de la matriz identidad es cero.
Ejercicio: Mostrar que el vector hamiltoniano X_H es una simetría infinitesimal del sistema. O sea cuando el hamiltoniano no depende del tiempo la evolución del sistema puede verse como una transformación a lo largo de una simetría.

Veamos ahora que significa esta última condición, (para simplificar la notación denotamos aquí a $\boldsymbol{u}_{d\Phi}$ simplemente por $\boldsymbol{u}$)

$$\begin{aligned}
\pounds_{\boldsymbol{u}}(\omega_{AB}) &= \boldsymbol{u}^C\partial_C\omega^{AB} + \omega_{CB}\partial_A\boldsymbol{u}^C_{d\Phi} + \omega_{AC}\partial_B\boldsymbol{u}^C \\
&= \boldsymbol{u}^C\partial_C\omega^{AB} + \partial_A(\omega_{CB}\boldsymbol{u}^C) + \partial_B(\omega_{AC}\boldsymbol{u}^C) - \boldsymbol{u}^C\partial_A\omega_{CB} - \boldsymbol{u}^C\partial_B\omega_{AC} \\
&= \boldsymbol{u}^C[\partial_C\omega_{AB} + \partial_A\omega_{BC} + \partial_B\omega_{CA}] + \partial_A(\omega_{CB}\boldsymbol{u}^C) + \partial_B(\omega_{AC}\boldsymbol{u}^C) \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^C[\partial_C\omega_{AB} + \partial_A\omega_{BC} + \partial_B\omega_{CA} - \partial_C\omega_{BA} - \partial_A\omega_{CB} - \partial_B\omega_{AC}] \\
&+ \partial_A\boldsymbol{u}_B + \partial_B\boldsymbol{u}_A \\
&= 3\boldsymbol{u}^C\partial_{[C}\omega_{AB]} + 2\partial_{[A}\boldsymbol{u}_{B]},
\end{aligned}$$

donde hemos definido $\boldsymbol{u}_A := \omega_{AC}\boldsymbol{u}^C$. El primer término de la última igualdad es la derivada exterior de ω y como esta es una estructura simpléctica se anula. El segundo es la derivada exterior del co-vector $\boldsymbol{u}_A$, por lo tanto la transformación infinitesimal será una simetría infinitesimal si $\partial_{[A}\boldsymbol{u}_{B]} = 0$. Pero por el teorema de Poincaré-Frobenius localmente existe una función $g : \Gamma \to R$ tal que $\boldsymbol{u}_A = \partial_A g$ y por lo tanto que $\boldsymbol{u}^A_{d\Phi} = \omega^{AB}\boldsymbol{u}_B = \omega^{AB}\partial_B g := X_g$. Tenemos así el siguiente importante resultado:

Teorema 1.2 *Toda función suave cuyo paréntesis de Poisson con el hamiltoniano se anula genera una simetría.*

Prueba:: El campo vectorial hamiltoniano generado por g, $X^A_g := \omega^{AB}\partial_B g$ satisface $X_g(H) = \{H, g\} = 0$ y $\pounds_{X_g}\omega = 0$. ♠

1.2.1 El teorema de Liuville

Como vimos en el ejemplo anterior, el hamiltoniano de por si genera una simetría, en particular tenemos que $\pounds_{X_H}\omega_{AB} = 0$ y en realidad que si hacemos co-tensores de mayor rango del tipo: $\omega_{[AB}\omega_{CD}\ldots\omega_{PQ]}$ luego su derivada de Lie a lo largo de X_H también se anulará. En particular, el espacio de fases es de dimensión $2n$ y si multiplicamos n $\omega\acute{s}$ entre sí y antisimetrizamos, lo que obtenemos es el elemento de volumen en el espacio de las fases. El teorema de Liuville es la afirmación del resultado anterior para este caso, es decir que dicho elemento de volumen se mantiene constante a lo largo de la evolución.

1.2.2 El álgebra de las cantidades conservadas

Vemos que si tenemos un conjunto cantidades conservadas, es decir funciones suaves $\{C_i\}$ del espacio de fases cuyo paréntesis de Poisson con H se anulan, luego cada una de ellas genera una simetría, aquella cuyo campo vectorial esta dado por X_{C_i}. El conjunto de todas las cantidades conservadas de un dado hamiltoniano, $\mathcal{C}$ forman un álgebra con respecto al paréntesis de Poisson, o sea un álgebra de Lie. En efecto, si tenemos dos cantidades conservadas, C_i, y C_j, podemos tomar su paréntesis de Poisson $\{C_i, C_j\}$ y éste es a su vez una cantidad conservada. Tal como sigue del teorema de Poisson, un corolario trivial de la identidad de Jacobi:

Teorema 1.3 (Poisson) *El paréntesis de Poisson de dos cantidades conservadas es también una cantidad conservada.*

Prueba:: Usando la identidad de Jacobi tenemos,

$$\{\{C_i, C_j\}, H\} \quad = \quad -\{\{H, C_i\}, C_j\} - \{\{C_j, H\}, C_i\} = 0. \tag{1.15}$$

♠

Cada una de estas cantidades conservadas genera un campo vectorial en Γ, las simetrías infinitesimales y estos a su vez forman su propia álgebra, como ya vimos, a travez de sus corchetes de Lie. Ambas álgebras son las mismas.

1.3 La derivada exterior de co-tensores antisimétrico

Como ya vimos (ver sección XX) la diferencia entre dos conexiones (o derivadas covariantes) aplicadas a un mismo co-vector está dada por un tensor simétrico, $T^c_{ab} = T^c_{ba}$, es decir $\hat{\nabla}_a\sigma_b - \nabla_a\sigma_b = T^c_{ab}\sigma_c$. Es por ello que la derivada completamente antisimetrizada de σ_b no depende del operador derivada, $\hat{\nabla}_{[a}\sigma_{b]} - \nabla_{[a}\sigma_{b]} = T^c_{[ab]}\sigma_c = 0$ Esto se llama la derivada exterior de σ. Del mismo modo las derivadas antisimetrizadas de otros co-tensores completamente antisimétricos $\omega_{[bc\ldots cd]}$, $\nabla_{[a}\omega_{bc\ldots cd]}$. Note que dado un sistema de coordenadas podemos elegir una derivada tal que en ese sistema sea simplemente la derivada parcial. Por lo tanto, las componentes de la derivada exterior en ese sistema son simplemente la derivadas parciales antisimetrizadas. Por lo tanto usualmente escribimos, $\partial_{[a}\omega_{bc\ldots cd]}$.

La derivada exterior juega un papel sumamente importante en física, sobre todo en las teorías, como la de la mecánica, donde no hay suficiente estructura como para que exista una derivada covariante única.

Una propiedad muy importante de esta derivada es la siguiente, supongamos que tenemos un co-tensor totalmente antisimétrico, que sea la derivada exterior de otro, es decir, $\omega_{bc\ldots d} = \omega_{[bc\ldots d]} = \partial_{[b}\theta_{c\cdots d]}$, entonces tenemos que

$$\partial_{[a}\omega_{bc\ldots d]} = \partial_{[a}\partial_b\theta_{c\cdots d]} = 0 \tag{1.16}$$

ya que las derivadas parciales conmutan entre si. La conversa de esta afirmación, es decir la afirmación de que si existe un co-tensor $\omega_{[bc\ldots d]}$ tal que $\partial_{[a}\omega_{bc\ldots d]} = 0$, luego existe $\theta_{[c\cdots d]}$ tal que $\omega_{[bc\ldots d]} = \partial_{[b}\theta_{c\cdots d]}$ no es siempre cierta pues depende de la topología del espacio. Pero si lo es localmente, es decir, alrededor de cada punto p, existe un entorno, U_p tal que allí existe $\theta_{[c\cdots d]}$ con $\omega_{[bc\ldots d]} = \partial_{[b}\theta_{c\cdots d]}$.

Esta afirmación se llama el teorema de Poincaré-Frobenius y se prueba por inducción en la dimensión del espacio de la siguiente manera: En dimensión uno es trivial, en ese caso los únicos co-tensores completamente antisimétricos son los co-vectores y la derivada de estos, que seria un co-tensor de dos componentes es automáticamente cero. Por lo tanto el teorema en ese caso solo nos dice que cualquier co-vector en un espacio de dimensión uno se puede escribir (localmente) como la derivada de una función. Y esto no es más que el teorema fundamental del análisis: *toda función tiene una primitiva*. En este caso ya se ve que el resultado no puede ser global. Por ejemplo, si nuestro espacio es el círculo de longitud 1 y nuestro ω es una constante (aquí no escribimos los índices pues son solo uno), entonces θ debería ser $x\omega$, pero esta función no es periódica, por lo tanto solo puede ser definida localmente. Supondremos ahora que esta afirmación es cierta en dimensión $n-1$ y lo probaremos para dimensión n. Para ello construimos un sistema coordenado en un entorno de p de tal forma que el origen esté en p, consideraremos el caso de un co-tensor de tipo $\binom{0}{m}$. Integraremos las ecuaciones a lo largo de alguna de las coordenadas, digamos x^1. Para ello supondremos que damos libremente las componentes $\theta_{1i\cdots j}$ $i,j = 2..n$ en todo el entorno U_p y damos las componentes $\theta^0_{i\cdots j}$, $i = 2..n$, en la superficie $x^1 = 0$ de tal forma que allí (en $x^1 = 0$) tengamos $\omega_{ij\cdots k} = \partial_{[i}\theta_{j\cdots k]}$. Esto último es posible en un entorno de p en $x^1 = 0$ ya que lo suponemos por el argumento inductivo. Integramos ahora a lo largo de x^1 la ecuación:

$$\partial_1\theta_{ij\cdots k} = -(m-1)\partial_{[i}\theta_{1j\cdots k]} + \omega_{1ij\cdots k} \quad i,j,k = 2..n \tag{1.17}$$

Con las condiciones de contorno que en $x^1 = 0$ tengan los valores $\theta^0_{i\cdots j}$, $i = 2..n$. Estas son todas las componentes de la ecuación $\omega_{[bc\ldots d]} = \partial_{[b}\theta_{c\cdots d]}$ que tienen el índice 1 en el sistema de coordenado que estamos usando. Por lo tanto las soluciones que encontraremos con la integración anterior las satisfaserán. Debemos ver ahora que todas las componentes que no tienen un índice 1 también son satisfechas. Estas componentes no tienen derivadas en las dirección de x^1, están dadas por: $C_{ij\cdots k} = \omega_{ij\cdots k} - \partial_{[i}\theta_{j\cdots k]} = 0$, $i = 2..n$ y son satisfechas en la superficies $x^1 = 0$. Para ver que son satisfechas también a lo largo de x^1 tomemos una derivada en la dirección x^1 de $C_{ij\cdots k}$ y usemos (1.17), con lo cual obtenemos:

$$\partial_1 C_{ij\cdots k} = \partial_1\omega_{ij\cdots k} - \partial_{[i}\omega_{|1|j\cdots k]} = \partial_{[1}\omega_{ij\cdots k]} = 0 \tag{1.18}$$

donde el la última igualdad hemos usado que la derivada exterior de ω se anula. Como en $x^1 = 0$ $C_{ij\cdots k} = 0$ vemos que $C_{ij\cdots k}$ es cero en todo el entorno y con esto terminamos la prueba.

Ejemplo: Si tenemos una fuerza conservativa en el espacio Euclídeo convencional, podemos hacer de ella un co-vector. Conservación en este caso nos dice que el rotor de dicha fuerza es cero. Pero el rotor no son mas que las componentes de la derivada exterior de dicho co-vector, las cuales en tres dimensiones pueden ser ordenadas como las componentes de un vector. Que dicha derivada exterior sea cero significa que existe localmente una función potencial tal que su diferencial sea el co-vector asociado con la fuerza.

Ejemplo: En el espacio de las fases de la mecánica hamiltoniana tenemos un co-tensor antisimétrico ω_{AB} cuya derivada exterior es cero. Localmente éste es entonces la derivada exterior de algún co-vector, dicho co-vector, en coordenadas canónicas está dado por $\theta = p_\alpha dq^\alpha$. Su integral a lo largo de un camino cerrado en el espacio de las fases es lo que se denomina el invariante de Poincaré y juega un papel preponderante en la teoría.

La otra propiedad interesante que tiene la derivada exterior la veremos cuando introduzcamos la derivada de Lie.

1.4 La derivada de Lie

Previamente hemos introducido el **corchete de Lie** entre dos campos vectoriales. Recordemos que éste es otro vector, denotado por $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ y cuya acción sobre una función cualquiera está definida por:

$$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}](f) := \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(f)) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(f)) = (u^i\partial_i v^j - v^i\partial_i u^j)\partial_j f \tag{1.19}$$

Usaremos este concepto para extender la derivada a lo largo de un vector de funciones a tensores en general. Veamos que propiedades le pediríamos a tal derivada, denotemos a la derivada a lo largo del vector $\boldsymbol{u}$, o derivada de Lie por $\pounds_{\boldsymbol{u}}$. Entonces es razonable pedir: (aquí f es una función, c una constante y T, R y P tensores, los dos primeros del mismo tipo.

1. $\pounds_{\boldsymbol{u}} f = \boldsymbol{u}(f)$
2. $\pounds_{\boldsymbol{u}}(T + cR) = \pounds_{\boldsymbol{u}}(T) + c\pounds_{\boldsymbol{u}}(R)$
3. $\pounds_{\boldsymbol{u}}(TP) = (\pounds_{\boldsymbol{u}}(T))P + T\pounds_{\boldsymbol{u}}(P)$
4. $(\pounds_{\boldsymbol{u}} T)^{i\cdots j\cdots k}{}_{l\cdots j\cdots m} = \pounds_{\boldsymbol{u}}(T^{i\cdots j\cdots k}{}_{l\cdots j\cdots m})$

Estas propiedades no definen una única derivada direccional, ya que hemos visto que las derivadas covariantes no son únicas, y cada derivada covariante contraida con un vector nos da una derivada direccional. Pero estas propiedades son suficientes para aseguranos que si conocemos como dicha derivada actúa con, digamos un vector, también sabremos como actúa con cualquier otro tensor. En efecto, supongamos que conocemos como actúa $\pounds_{\boldsymbol{u}}$ en un vector cualquiera, $\boldsymbol{v}$ luego sabemos, por ejemplo, como actúa en un co-vector σ, ya que $\pounds_{\boldsymbol{u}}(\sigma)(\boldsymbol{v}) = \pounds_{\boldsymbol{u}}(\sigma(\boldsymbol{v})) - \sigma(\pounds_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}))$. Por lo tanto conocemos como al co-vector $\pounds_{\boldsymbol{u}}(\sigma)$ ya que sabemos como actúa con cada vector $\boldsymbol{v}$. Y esto lo sabemos pues el primer término de la derecha es la derivada direccional de una función, $(\sigma(\boldsymbol{v}))$, y el segundo la derivada direccional de un vector, la que suponemos conocida.

Por lo tanto solo debemos definir como actúa $\pounds_{\boldsymbol{u}}$ en un vector. Lo definiremos como:

$$\pounds_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) := [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] \tag{1.20}$$

Tenemos así, por ejemplo, que $\pounds_{\boldsymbol{u}}(\sigma)(\boldsymbol{v}) = \pounds_{\boldsymbol{u}}(\sigma(\boldsymbol{v})) - \sigma([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])$, o en componentes,

$$\begin{aligned} \pounds_{\boldsymbol{u}}(\sigma)_i v^i &= \pounds_{\boldsymbol{u}}(\sigma_i v^i) - \sigma_i[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]^i \\ &= u^j\partial_j(\sigma_i v^i) - \sigma_i(u^j\partial_j v^i - v^j\partial_j u^i) \\ &= v^i(u^j\partial_j\sigma_i + \sigma_j\partial_i u^j), \end{aligned} \tag{1.21}$$

o sea, $\pounds_{\boldsymbol{u}}(\sigma)_i = u^j\partial_j\sigma_i + \sigma_j\partial_i u^j$.

Una propiedad importante de la derivada de Lie es que conmuta con la derivada exterior:

Teorema 1.4 : *La derivada de Lie de la derivada exterior de un co-tensor completamente anti-simétrico es igual a la derivada exterior de la derivada de Lie de dicho tensor:*

$$\pounds_{\boldsymbol{u}}\partial_{[i}\omega_{j\cdots k]} = \partial_{[i}\pounds_{\boldsymbol{u}}\omega_{j\cdots k]} \tag{1.22}$$

Lo probaremos aquí para el caso de un co-tensor de tipo cero, es decir una función, es este caso, sustituyendo en la expresión para la derivada de Lie de un co-vector σ_i por $\partial_i f$, tenemos,

$$\begin{aligned} \pounds_{\boldsymbol{u}}\partial_i f &= u^j\partial_j\partial_i f + \partial_j f\partial_i u^j \\ &= u^j\partial_i\partial_j f + \partial_j f\partial_i u^j \\ &= \partial_i u^j\partial_j f \\ &= \partial_i\pounds_{\boldsymbol{u}} f \end{aligned} \tag{1.23}$$

el caso general es similar y lo único que se usa es la conmutatividad de las derivadas parciales de componentes de los tensores.