Teorema sobre los multiplicadores de Lagrange

Oscar Reula

April 15, 2008

1 Preliminares

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un conjunto de vectores,$\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1..N$ es una **base** si estos son linealmente independientes y cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de estos. Diremos entonces que N es la **dimensión** de V. Cualquier otro conjunto de N vectores linealmente independientes forman una base. Es decir cualquier vector puede escribirse como combinación lineal de estos N vectores.

Sea V' el conjunto de aplicaciones lineales de V en R, es decir todas las funciones τ que toman un elemento $\mathbf{v}$ de V y nos dan un número real, $\tau(\mathbf{v})$ tal que $\tau(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\tau(\mathbf{v}) + \tau(\mathbf{w})$, con $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in V$ y $\alpha \in R$. Este es un espacio vectorial, con suma y producto definidos como:

$$(\tau + \sigma)(\mathbf{v}) \ := \ \tau(\mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{v}) \quad \forall\ \mathbf{v}\ \in V \tag{1}$$

$$(\alpha\tau)(\mathbf{v}) \ := \ \alpha\tau(\mathbf{v}) \quad \forall\ \mathbf{v}\ \in V\ \alpha \in R \tag{2}$$

(note que en el lado derecho solo tenemos sumas y productos de números reales).
Ejercicio: Vea que el conjunto de elementos $\{\theta^i\}$, $i = 1..N$, definidos como $\theta^j(\mathbf{e}_i) := \delta^j{}_i$ forman una base de V' y por lo tanto la dimensión de este espacio es también N. Ayuda: Vea que dado $\tau \in W'$ luego $\tau = \sum_{i=1}^N \tau_i\theta^i$ donde $\tau_i := \sigma(\mathbf{e}_i)$.

Sea V un espacio vectorial y K un subespacio del mismo, diremos que W es un espacio complementario a K en V si todo elemento de V se puede escribir de una única forma como suma de un elemento de K y otro de W. El espacio complementario no es único. Ejemplo: Sea $V = R^3$, Y sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base del mismo. Sea K el subespacio expandido por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, es decir el espacio de todos los vectores de la forma $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$, con $a, b\ \in R$. Luego W es cualquiera de los subespacios expandidos por alguno de los vectores de la forma $c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 + f\mathbf{e}_3$, con $f \neq 0$.

2 Teorema de los multiplicadores de Lagrange

Teorema:*Sea $\tau \in V$ y $\{\sigma^J\} \in V'$, $J = 1..M$ tales que i) los $\{\sigma^J\}$ son linealmente independientes en V'. ii) $\tau(\mathbf{v}) = 0$ si $\sigma^J(\mathbf{v}) = 0 \ \ \forall J = 1..M$.*
Entonces existen números $\{\lambda_J\}$, $J = 1..M$ tales que $\tau = \sum_{J=1}^M \lambda_J\sigma^J$.
Prueba: La hipótesis del teorema se puede resumir en $Kern(\tau) \supset \bigcap_{J=1}^M Kern(\sigma^J)$, es decir que el espacio nulo de τ contiene a la intersección de los espacios nulos

de los σ's. Sea $K := \bigcap_{J=1}^{M} Kern(\sigma^J)$ este es un subespacio de V (convénzase de que es así), y sea W un subespacio cualquiera de V complementario a K. Los elementos de V' se pueden restringir a los elementos de W y así se los puede identificar con elementos de W'. En particular los $\{\sigma^J|_W\}$ son elementos de W'. Si demostramos que estos son una base de W' entonces cualquier elemento de W' se podrá escribir como combinación lineal de estos, en particular tendremos que $\tau|_W = \sum_{J=1}^{M} \lambda_J \sigma^J|_W$ para algún conjunto de números $\{\lambda_J\}$, $J = 1..M$. Pero si conocemos $\tau|_W$ conocemos τ, ya que dado $\mathbf{v} \in V$ se escribe de una única manera como $\mathbf{v} = \mathbf{k} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{k} \in K$ y $\mathbf{w} \in W$ y entonces, $\tau(\mathbf{v}) = \tau(\mathbf{k} + \mathbf{w}) = \tau(\mathbf{k}) + \tau(\mathbf{w}) = \tau(\mathbf{w}) = \tau|_W(\mathbf{w})$, ya que $\mathbf{k} \in K \subset Kern(\tau)$. Por el mismo argumento, ya que $\mathbf{k} \in K \subset Kern(\sigma^J)$, podemos ver que a partir de los $\sigma^J|_W$ pasamos a los σ^J. Solo resta entonces ver que los $\{\sigma^J|_W\}$ forman una base de W'. Primero veamos que esos son linealmente independientes como elementos de W'. Si este no fuese el caso habria constantes $\{c_J\}$ no todas cero tales que $0 = \sum_{J=1}^{M} c_J \sigma^J|_W$, es decir, $0 = \sum_{J=1}^{M} c_J \sigma^J(\mathbf{w})$ para todo $\mathbf{w} \in W$, es decir, $0 = \sum_{J=1}^{M} c_J \sigma^J(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$ ya que $\mathbf{v} = \mathbf{k} + \mathbf{w}$ y $\sigma^J(\mathbf{k}) = 0$, es decir, $0 = \sum_{J=1}^{M} c_J \sigma^J$, pero como los σ's eran linealmente independientes en V concluimos que todos los $\{c_J\}$ deben anularse. Concluimos entonces que los σ's son linealmente independientes y por lo tanto que $dimW' \geq M$. Si pudiesemos probar que la dimensión de W' es M entonces sabriamos que los σ's forman una base. Consideremos ahora la asignación lineal $\Phi : W \to R^M$ dada por:

$$\Phi(\mathbf{w}) := (\sigma^1(\mathbf{w}), \sigma^2(\mathbf{w}), \cdots, \sigma^M(\mathbf{w}))$$

Pero esta asignación es inyectiva, ya que $\Phi(\mathbf{w}) = 0$ implica $\sigma^J(\mathbf{w}) = 0$ para todo $J = 1..M$, lo que implica $\mathbf{w} \in K$ y el único elemento en común entre K y W es el cero. Pero si tenemos una asignación lineal e inyectiva sabemos que la dimensión del espacio de partida es menor o igual que la dimensión del espacio de llegada. Es decir $dimW \leq M$. Pero entonces $dimW' = dimW \leq M$ y por el resultado anterior entonces $dimW' = M$ y el teorema queda demostrado.