Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°1: Álgebra Lineal

Problema 1: Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores arbitrarios en un espacio vectorial con producto interno. Demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})\,(\vec{b}\cdot\vec{b}) \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2$$

Determine cuando es válida la igualdad.

Ayuda: Utilice el vector: $\vec{c} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ y exija que $\vec{c}\cdot\vec{c} \geq 0,\ \forall\lambda$.

Considere una base ortonormal $\{\vec{e}_i\}$ en un espacio vectorial de dimensión infinita. Por cuestiones de convergencia, el desarrollo de un vector arbitrario en términos de la base:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x^i\,\vec{e}_i$$

puede carecer de significado. No obstante, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, demuestre la desigualdad de Bessel:

$$\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2 \leq \vec{x}\cdot\vec{x}$$

resultado que es válido para todo n, por grande que este sea.

Problema 2: Siendo A, B y C matrices cuadradas, probar que:

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{a)} & (\mathsf{AB})^{-1} & = & \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1} \\
\textbf{b)} & \widetilde{(\mathsf{AB})} & = & \tilde{\mathsf{B}}\tilde{\mathsf{A}} \\
\textbf{c)} & (\mathsf{AB})^{\dagger} & = & \mathsf{B}^{\dagger}\mathsf{A}^{\dagger} \\
\textbf{d)} & \mathrm{Tr}(\mathsf{ABC}) & = & \mathrm{Tr}(\mathsf{BCA}) \\
\textbf{e)} & \det(\mathsf{AB}) & = & \det(\mathsf{A})\det(\mathsf{B}).
\end{array}$$

Problema 3: Supongamos que las matrices A y B son hermiteanas y las matrices C y D son unitarias. Demostrar que:

$$\begin{array}{lrl}
\textbf{a)} & \mathsf{C}^{-1}\mathsf{AC} & \text{es hermiteana} \\
\textbf{b)} & \mathsf{C}^{-1}\mathsf{DC} & \text{es unitaria} \\
\textbf{c)} & i(\mathsf{AB}-\mathsf{BA}) & \text{es hermiteana.}
\end{array}$$

Problema 4: Sea $\mathcal{T} : V \to V$ la transformación lineal dada por $\mathcal{T}(\vec{x}) = c\vec{x}$, donde c es un escalar fijo. Demostrar que $\mathcal{T}$ es unitaria si y sólo si $|c| = 1$.

Si V es un espacio unidimensional, demostrar que las únicas transformaciones unitarias en V son las descriptas anteriormente. En particular, si V es un espacio real unidimensional, existen sólo dos transformaciones ortogonales, $\mathcal{T}(x) = x$ y $\mathcal{T}(x) = -x$.

Problema 5: Las siguientes matrices 2×2 en $\mathcal{C}$:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son las matrices de Pauli. Probar que:

a) $\sum_{lm} \epsilon_{klm}\sigma_l\sigma_m = 2i\sigma_k$. Es decir que puede utilizarse la notación: $\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$, con $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

b) $\sigma_j^2 = \mathsf{I}$, $\forall j$; donde I es la matriz identidad.

c) El conjunto de matrices de Pauli mas I forman una base para el espacio de matrices 2×2.

Problema 6: Dada la transformación de semejanza $\mathsf{A}' = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S}$, probar que:

a) $\mathrm{Tr}(\mathsf{A}') = \mathrm{Tr}(\mathsf{A})$

b) $\det(\mathsf{A}') = \det(\mathsf{A})$

c) Si A es hermiteana y S unitaria entonces A' es hermiteana

d) Si A es ortogonal y S ortogonal entonces A' es ortogonal

e) Si A es unitaria y S unitaria entonces A' es unitaria

Dada una función analítica f, es usual utilizar la notación $f(\mathsf{A})$, donde A es una matriz cuadrada, para representar al desarrollo en serie de Taylor de f "evaluado" en A:

$$f(\mathsf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,\mathsf{A}^n$$

Utilizando esta notación pruebe que:

$$\begin{aligned} \textbf{i)} \quad f(\mathsf{A}') &= \mathsf{S}^{-1}f(\mathsf{A})\mathsf{S} \\ \textbf{ii)} \quad \det(e^{\mathsf{A}}) &= e^{\mathrm{Tr}\,\mathsf{A}}. \end{aligned}$$

Problema 7: Si los autovectores $\vec{v}_i$, correspondientes a los autovalores λ_i, de la matriz A forman una base, probar que:

$$\begin{aligned} \textbf{a)} \quad \det(\mathsf{A}) &= \textstyle\prod_i \lambda_i \\ \textbf{b)} \quad \mathrm{Tr}(\mathsf{A}) &= \textstyle\sum_i \lambda_i. \end{aligned}$$

Problema 8: Sea U una matriz unitaria y $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ dos vectores propios de U pertenecientes a los autovalores λ_1, λ_2, respectivamente. Demostrar que:

i) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

ii) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_1^\dagger x_2 = 0$

Problema 9: Encontrar los autovalores y autovectores normalizados de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema 10: En una dada base $\{\vec{e}_i\}$ de un espacio vectorial abstracto, una transformación lineal y un dado vector de dicho espacio, quedan respectivamente determinados por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Encontrar las representaciones matriciales de la transformación y del vector en una nueva base tal que la antigua queda representada por:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 11: Escribir la matriz A y el vector $\vec{x}$ en la base en la cual A es diagonal.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ i \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problema 12: Demostrar cada una de las siguientes proposiciones relativas a una matriz A, $n \times n$, real y ortogonal:

a) Si λ es un autovalor real de A, entonces $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

b) Si λ es un autovalor complejo de A, el complejo conjugado λ^* también es autovalor de A.
Es decir, los autovalores de A no reales son conjugados a pares.

c) Si n es impar, A tiene por lo menos un autovalor real.

Problema 13: Sea V un espacio euclídeo real de dimensión n. Una transformación ortogonal $\mathcal{T} : V \to V$ con determinante igual a 1 se llama rotación. Si n es impar demostrar que 1 es autovalor para $\mathcal{T}$. Esto prueba que toda rotación de un espacio de dimensión impar tiene un eje fijo.

Problema 14: Las cónicas con centro en el origen de un sistema coordenado obedecen la ecuación:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = k$$

a) Escribir la ecuación en forma matricial: $\tilde{\vec{x}}\ \mathsf{M}\ \vec{x} = k$.

b) Encuentre la transformación que diagonaliza M e interprete geométricamente.

c) Ejemplifique con $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30$.

Problema 15: El tensor de inercia de un cuerpo rígido en un particular sistema de coordenadas está expresado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{7}{3} & \sqrt{\frac{1}{18}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & \sqrt{\frac{1}{18}} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

Encuentre los momentos principales de inercia y las direcciones de los ejes principales. Recuerde que en un sistema coordenado orientado en la dirección de los ejes principales la matriz asociada al tensor es diagonal.

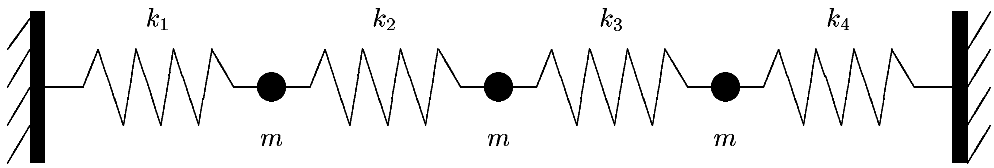
Problema 16: Demostrar que las oscilaciones unidimensionales del sistema mecánico de la figura están regidas por la ecuación vectorial: $m\,\ddot{\vec{x}} = \mathsf{A}\vec{x}$; donde:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) \end{pmatrix}$$

a) Resolver la ecuación mediante la substitución $\vec{x}(t) = e^{i\omega t}\ \vec{y}$, demostrando que esto conduce a un problema de autovalores.

b) Suponiendo que $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ encontrar las frecuencias de los modos normales de oscilación.

c) Escribir la solución de la ecuación bajo las condiciones iniciales: $x^1(0) = x^2(0) = x^3(0) = x_0$ y $\dot{x}^1(0) = \dot{x}^2(0) = \dot{x}^3(0) = 0$.



Problema 17: Si $\mathcal{T}$ es un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita, **diagonalizable**, probar el teorema de Cayley-Hamilton: *Si f es el polinomio característico de $\mathcal{T}$ entonces* $f(\mathcal{T}) = 0$.
Ayuda: Probar que dado un autovector $\vec{x}$ de $\mathcal{T}$ de autovalor λ, para todo polinomio q se cumple: $q(\mathcal{T})\ \vec{x} = q(\lambda)\ \vec{x}$.

Problema 18: Una transformación lineal $\mathcal{T}$ se llama **nilpotente** si para algún número natural k se cumple que $\mathcal{T}^k = 0$. Probar:

a) Si λ es un autovalor de $\mathcal{T}$ entonces $\lambda = 0$.

b) $\lambda = 0$ es un autovalor de $\mathcal{T}$.

Se concluye entonces que el conjunto de autovalores de un operador nilpotente es exactamente $\{0\}$.

Problema 19: Sea $V = \{p(x), \text{polinomios de grado menor o igual que}(n-1)\}$. Considere sobre este espacio el operador lineal derivación D.

a) Probar que D es nilpotente.

b) Construya la forma de Jordan correspondiente a D.

Problema 20: Si A es una matriz $n \times n$ cuyo polinomio característico resulta: $f(x) = (x-c_1)^{d_1} \dots (x-c_k)^{d_k}$ con $\sum_{i=1}^{k} d_i = n$. ¿Cual es la traza de A?

Problema 21: Sea A una matriz triangular $n \times n$ tal que ${a^i}_i \neq {a^j}_j$, $\forall i \neq j$. Escribir la forma de Jordan asociada con A.

Problema 22: Escribir las formas de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fa.M.A.F ©1995

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°2: Análisis Tensorial

Problema 1: Si ϵ_{ijk} es el símbolo antisimétrico de Levi-Civita:

a) Demostrar que $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.

b) Calcular $\sum_{ij} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}$

c) Dada la matriz M, calcular: $\sum_{ijk}\sum_{lmn} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\mathsf{M}_{il}\mathsf{M}_{jm}\mathsf{M}_{kn}$

Problema 2: Considere un tensor covariante simétrico arbitrario g_{ij}. Mediante g_{ij}, podemos definir una operación de diferenciación covariante. Demostrar que la derivada covariante de g_{ij} definida de esta forma se anula.

Problema 3: Consideremos el símbolo de Christoffel $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ formado con la ayuda de un tensor covariante simétrico arbitrario g_{lm}. Demostrar que:

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{det\ \mathsf{g}}$$

Problema 4: Se definen las coordenadas α, β, γ mediante las relaciones:

$$x = \beta\gamma, \;\; y = \alpha\gamma, \;\; z = \alpha\beta$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas. Dada una función arbitraria u, calcular $\nabla^2 u$ en función de las derivadas de u respecto de α, β, γ.

Problema 5: Se definen las coordenadas r, θ, ϕ mediante las relaciones:

$$\begin{aligned} x &= r\ sen\theta\ cos\phi \\ y &= r\ sen\theta\ sen\phi \\ z &= r\ cos\theta \end{aligned}$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas. Dada una función arbitraria u, calcular $\nabla^2 u$ en función de las derivadas de u respecto de r, θ, ϕ.

Fa.M.A.F ©1995

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°3: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Parte I: Soluciones por Cuadraturas

Problema 1: Verifique que las siguientes ecuaciones diferenciales se reducen a ecuaciones diferenciales de variables separables:

a) $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ donde a, b, y c son constantes.

b) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$

Problema 2: Calcular las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, que satisfacen las condiciones especificadas:

a) $(1 + e^x)\, y\, \dfrac{dy}{dx} = e^x$; $y(x = 0) = 1$.

b) $\dfrac{dy}{dx}\, sen\, x = y\, \ln y$; (i) $y\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right) = e$, (ii) $y\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

c) $x^3\, sen\, y\, \dfrac{dy}{dx} = 2$; $y(x \to \infty) = \dfrac{\pi}{3}$.

Problema 3: Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales reducibles a ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $x + y - 2 + (x - y + 4)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$.

b) $x + y + 1 + (2\,x + 2\,y - 1)\,\dfrac{dy}{dx} = 0$.

c) $(x^2\, y^2 - 1)\,\dfrac{dy}{dx} + 2\,x\,y^3 = 0$, (Ayuda: Utilizar el cambio de variable $y = z^\alpha$).

Problema 4: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la sustitución: $y(x) = u(x)\,v(x)$,

a) $\dfrac{dy}{dx} + 2\,y = x^2 + 2\,x$ (Ecuación lineal inhomogénea).

b) $x^2\,\dfrac{dy}{dx} + 2\,x^3\,y = y^2\,(1 + 2\,x^2)$ (Ecuación de Bernoulli).

Problema 5: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta si son diferenciales exactas o bien si existe un factor integrante:

a) $x\,(2\,x^2 + y^2) + y\,(x^2 + 2\,y^2)\,\dfrac{dy}{dx} = 0.$

b) $(x^2 + y) - x\,\dfrac{dy}{dx} = 0.$

c) $(x + y^2) - 2\,x\,y\,\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Problema 6: Determine todas las curvas del plano tales que toda recta tangente a cada curva forma siempre con los ejes coordenados un triángulo de area $A = 2\,a^2$, siendo a una constante.

Problema 7: Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

a) $x^2\,\dfrac{dy}{dx} + y^2 = x\,y\,\dfrac{dy}{dx}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} + y\;cos\,x = \dfrac{1}{2}\;sen\,2x$

e) $(1 - x^2)\,\dfrac{dy}{dx} - x\,y = x\,y^2$

f) $2\,x^3\,\dfrac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{1 + 4\,x^2\,y}$

g) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

h) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^y$

i) $x\,(1 - x)\,\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\,\dfrac{dy}{dx} + 2\,y = 0$

j) $(1 - x)\,y^2 - x^3\,\dfrac{dy}{dx} = 0$

k) $x\,\dfrac{dy}{dx} + y + x^4\,y^4\,e^x = 0$

l) $(1 + x^2)\,\dfrac{dy}{dx} + y = arctg\,x$

m) $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,(x\,y - 4)\,\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$ (soluciones general y singular)

n) $y\,\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 6\,x\,y^2 = 0$

o) $x^4\, y\, \dfrac{d^2y}{dx^2} + x^4 \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 3\, x^3\, y\, \dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$

p) $x^2\, \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\, y = x$

q) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\, \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 2\, y = sen\, x$

r) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\, \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = cos\, x$

s) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\, \dfrac{dy}{dx} + 2\, y = \exp\left(e^x\right)$

t) $a^2 \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^3$

u) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\, \dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{x}$

Problema 8: En la activación de una lámina de Indio por un flujo constante de neutrones, el número N de átomos radiactivos obedece la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\, N_s - \lambda\, N$$

donde N_s es el número constante que se alcanza luego de la “saturación”. Calcular $N(t)$ si $N(t = 0) = 0$.

Problema 9: Encontrar la solución general de:

$$A(x)\, \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dA}{dx}\, \frac{dy}{dx} + \frac{y(x)}{A(x)} = 0$$

donde $A(x)$ es una fiunción conocida e $y(x)$ es la incógnita.

Problema 10: Calcular la solución general de la ecuación:

$$x\, \frac{d^2y}{dx^2} + 2\, \frac{dy}{dx} + n^2\, x\, y = sen(\omega x)$$

Ayuda: Eliminar el término en derivada primera.

Problema 11: Notar que: $y = x$ es una solución de la ecuación:

$$(1 - x)\, \frac{d^2y}{dx^2} + x\, \frac{dy}{dx} - y = (1 - x)^2$$

si el segundo miembro se iguala a cero. Use este hecho para obtener la solución general de la ecuación dada.

Problema 12: Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\, \frac{dy}{dx} + q(x)\, y = 0$$

en el intervalo $a \leq x \leq b$. Suponga que se conocen dos soluciones, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, tales que:

$$y_1(a) = 0 \qquad y_2(a) \neq 0$$
$$y_1(b) \neq 0 \qquad y_2(b) = 0$$

Dar la solución de la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = f(x)$$

que obedece las condiciones $y(a) = y(b) = 0$, en la forma:

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')\,f(x')\,dx'$$

donde $G(x, x')$, la llamada función de Green, se construye sólo en términos de las soluciones y_1 e y_2 y asume diferentes formas funcionales para $x' < x$ y $x' > x$.

Ilustrar este problema resolviendo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2\,y = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0$$

Parte II: Soluciones en Series de Potencias

Problema 13: Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\,\frac{dy}{dx} + \left(K + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\,y = 0$$

$0 \leq x < \infty$, donde l es un entero no negativo.

Encontrar todos los valores de la constante K los cuales generan soluciones finitas en todo el rango de x. Una ecuación como esta se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo de Hidrógeno.

Problema 14: ¿Para que valores de la constante K la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{K}{x}\right)\,y = 0$$

$(0 < x < \infty)$ tiene una solución no trivial que se anula para $x \to 0$ y $x \to \infty$?

Problema 15: ¿Para que valores de la constante K la ecuación diferencial:

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,x\,\frac{dy}{dx} + (K - 3\,x)\,y = 0$$

posee una solución acotada en el rango $0 \leq x < \infty$?

Problema 16: Se desea una solución de la ecuación diferencial:

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} + (E - x)\,y = 0$$

tal que $y(0) = 1$, $y(\infty) = 0$. ¿Para que valores de E es esto posible?

Problema 17: La ecuación de Bessel para $m = 0$ es:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

Una solución de esta ecuación es:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \cdots$$

Mostrar que existe una segunda solución de la forma:

$$J_0(x) \ln x + A x^2 + B x^4 + C x^6 + \cdots$$

y encuentre los tres primeros coeficientes A, B, C.

Problema 18: Considere la ecuación diferencial:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (2 - x) \frac{dy}{dx} - 2 y = 0$$

Dar dos soluciones, una regular y de valor 1 en el origen y la otra de la forma:

$$\frac{1}{x} + A(x) \ln x + B(x)$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son regulares en el origen. Dar los primeros tres términos de los desarrollos en serie de $A(x)$ y $B(x)$.

Parte III: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Problema 19: Encontrar los todos los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - x^2 - 2\,x\,y \\ \dot{y} & = & 2\,y - 2\,y^2 - 3\,x\,y \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & a\,x - b\,x\,y \\ \dot{y} & = & -c\,y + d\,x\,y \\ \dot{z} & = & z + x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

Problema 20: Considere el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = a\,x + b\,y, \quad \frac{dy}{dt} = c\,x + d\,y$$

a) Mostrar que $x = 0$, $y = 0$ es el único punto de equilibrio si: $ad - bc \neq 0$.

b) Mostrar que el sistema posee una línea de puntos de equilibrio si: $ad - bc = 0$.

Problema 21: Encuentre las soluciones de equilibrio de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales y determine si son estables o inestables:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - x^3 - x\,y^2 \\ \dot{y} & = & 2\,y - y^5 - x^4\,y \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} & = & 2\,x\,y \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & tg(x + y) \\ \dot{y} & = & x + x^3 \end{array} \right.$$

Problema 22: Considere un sistema presa-predador donde el predador posee un medio alternativo de sustento. Este sistema puede ser modelado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= \alpha_1 \, x_1 \, (\beta_1 - x_1) + \gamma_1 \, x_1 \, x_2 \\ \dot{x_2} &= \alpha_2 \, x_2 \, (\beta_2 - x_2) - \gamma_2 \, x_1 \, x_2 \end{cases}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son las poblaciones al tiempo t de predadores y presas respectivamente y α_i, β_i y γ_i son constantes.

a) Mostrar que el cambio de coordenadas

$$\beta_i \, y_i(t) = x_i \left(\frac{t}{\alpha_i \beta_i} \right)$$

reduce el sistema de ecuaciones a:

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= y_1 \, (1 - y_1) + a_1 \, y_1 \, y_2 \\ \dot{y_2} &= y_2 \, (1 - y_2) - a_2 \, y_1 \, y_2 \end{cases}$$

donde

$$a_1 = \frac{\gamma_1 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1}; \quad a_2 = \frac{\gamma_2 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2}.$$

b) ¿Cuales son las poblaciones de equilibrio estables cuando: (i) $0 < a_2 < 1$, (ii) $a_2 > 1$?

c) Se observa que $a_1 = 3a_2$ (a_2 es una medida de la agresividad del predador). ¿Cuál es el valor de a_2 si el instinto del predador consiste en maximizar su población de equilibrio estable?

Fa.M.A.F ©1995

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°4: Distribuciones y Transformadas Integrales

Problema 1: Sea la distribución $T_f : C_0^\infty(\Re) \to \Re$, es decir una funcional lineal continua tal que:

$$T_f(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx; \;\; \forall g \in C_0^\infty(\Re)$$

Probar que si f es continua entonces: Soporte(f) = Soporte(T_f).

Problema 2: ¿Cómo extendería al concepto de distribución la noción de función par $(f(x) = f(-x))$ y el de función impar $(f(x) = -f(-x))$?. ¿Qué propiedades conserva la extensión?

Problema 3: Sea:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Claramente $g(x)$ es continua pero no diferenciable (en el sentido clásico). Encuentre las tres primeras derivadas de g en el sentido distribucional.

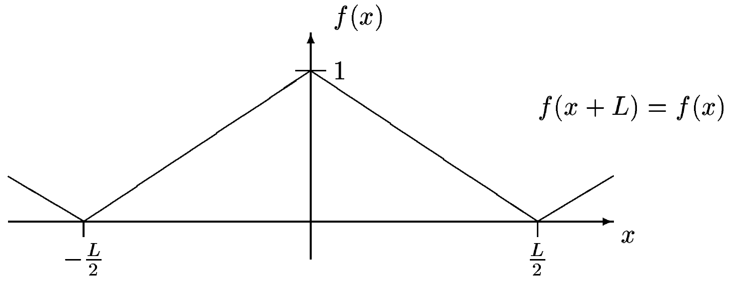
Problema 4: La parte principal, en el sentido de Cauchy, de una función:

$$P\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{x}\, f(x)\, dx$$

es una distribución. ¿Cómo debe interpretarse la expresión:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} = P\left(\frac{1}{x - x_0}\right) - i\pi\delta(x - x_0)?$$

Problema 5: Desarrolle la función dibujada a continuación en una serie de Fourier.

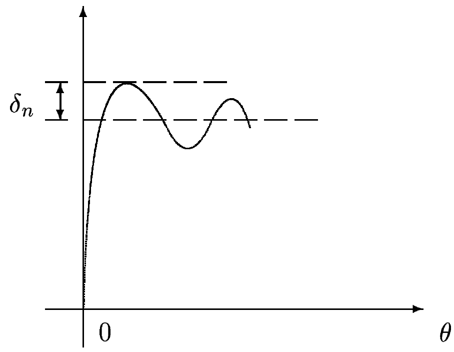


Problema 6: Considere la serie de Fourier para la función:

$$f(\theta) = \begin{cases} +1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$.

a) A la derecha de $\theta = 0$, la suma de los primeros n términos de la serie lucen como se detalla en la figura a continuación. Encontrar δ_n, el "overshoot" del primer máximo.



b) Mostrar que $\lim_{n\to\infty} \delta_n \approx 0.18$. Este comportamiento es conocido como fenómeno de Gibbs.

Problema 7: Una función $f(x)$ es igual a e^{-x} para $0 < x < 1$.

a) Desarrollle $f(x)$ como una serie de Fourier de la forma $\sum_n B_n \, sen(n\,\pi\,x)$.

b) Desarrollle $f(x)$ como una serie de Fourier de período 1.

Problema 8: Un sistema lineal es exitado por una señal periódica $f(t)$, tal que $f(t+T) = f(t)$. La respuesta del sistema es tal que una entrada sinusoidal de frecuencia angular ω es multiplicada por $(\omega_0/\omega)^2$, a menos que $\omega = 0$, en cuyo caso no hay salida. La salida puede ser escrita como:

$$g(t) = \frac{1}{T} \int_0^T G(t - t')\, f(t')\, dt'$$

Calcule la función $G(t)$.

Problema 9: ¿De qué función es el desarrollo:

$$\cos\theta + \frac{\cos 3\theta}{9} + \frac{\cos 5\theta}{25} + \ldots$$

una serie de Fourier?

Problema 10: Encontrar la derivada generalizada de la siguiente función de período 2π:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & si & 0 < x \leq \pi \\ 0 & si & x = 0 \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) & si & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Verificar que esta función posee el desarrollo en serie de Fourier: $\sum_n \frac{1}{n} sen(nx)$.
Comentario: Derivando término a término esta serie obtenemos la serie divergente: $\sum_n \cos(nx)$. Entonces, el concepto de función generalizada nos permite adscribir un significado a series divergentes en el sentido tradicional.

Problema 11: Mostrar que:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

asumiendo que la ecuación $g(x) = 0$ posee una sola raiz en el intervalo $a < x < b$.

Problema 12: Evaluar la siguiente expresión:

$$\int_0^\pi dx \int_1^2 dy\ \delta(sen(x))\,\delta(x^2 - y^2).$$

Problema 13: Calcular la transformada de Fourier de la función de onda para un electrón 2p en el átomo de hidrógeno:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a_o^5}}\ z\ exp\left(-\frac{r}{2a_o}\right)$$

donde a_o es el radio de Bohr y z la coordenada rectangular.

Problema 14: Un sistema lineal tiene como respuesta $G(\omega)e^{-i\omega t}$ a una señal de entrada $e^{-i\omega t}$, donde ω es arbitrario. Si la entrada tiene la forma particular:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde λ es una constante fija, la salida resultante es:

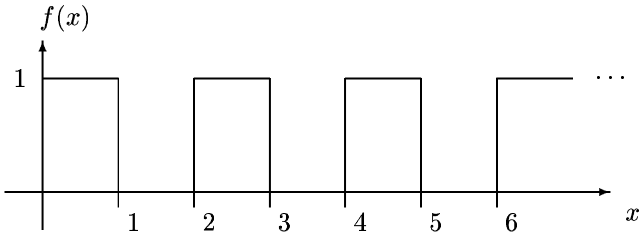
$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ (1 - e^{-\alpha t})e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde α es otra constante fija.

a) Calcular $G(\omega)$.

b) Calcular la respuesta del sistema a la entrada $f(t) = A\delta(t)$.

Problema 15: Calcular la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(x)]$ de la función dibujada a continuación:



Problema 16: Una función $f(x)$ tiene el siguiente desarrollo en serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}$$

Escribir la función $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en forma cerrada en términos de $f(x)$.

Problema 17: Utilizando la representación integral:

$$J_o(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x sen\theta)\, d\theta$$

calcular la transformada de Laplace de $J_o(x)$.

Problema 18: ¿De qué función es:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

la transformada de Laplace?

Problema 19: Tres nucleos radioactivos decaen sucesivamente en serie, de forma tal que los números $N_i(t)$ de cada tipo obedecen las ecuaciones:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad ; \qquad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad ; \qquad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

Si inicialmente $N_1 = N$, $N_2 = 0$, $N_3 = n$, calcular $N_3(t)$ utilizando transformadas de Laplace.

Fa.M.A.F ©1995

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°5: Funciones Especiales

Problema 1: Sea:

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Desarrolle $f(x)$ como serie de Polinomios de Legendre $P_l(x)$.

Problema 2: Utilizando una función generatriz, o bien por otro método, evalue la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n(x)$$

donde $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre.

Problema 3: Evalue $P_n'(x)$,

a) directamente de la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^2 - 1\right)^n \ ;$$

b) a partir de la función generatriz:

$$F(h, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) \ .$$

Problema 4: Verifique la siguiente representación para los armónicos esféricos:

$$Y_{lm}(\Omega) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{im\phi} (-sen\theta)^m \frac{d^{l+m}}{d(cos\theta)^{l+m}} \left(cos^2\theta - 1\right)^l$$

Problema 5: Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ pueden ser definidos por la función generatriz:

$$e^{2hx - h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!}$$

a) Escribir la relación de recursión que conecta: $H_{n-1}(x)$, $H_n(x)$ y $H_{n+1}(x)$.

b) Evaluar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x)\, dx$$

Problema 6: Considere las funciones $f_n(x)$ definidas por:

$$(a) \quad f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

$$(b) \quad (n+1)f_{n+1} = xf_n - f_{n+2}$$

$$(c) \quad f'_n = f_{n-1}$$

Encontrar una función generatriz $G(x,t)$ tal que:

$$G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)t^n$$

Problema 7: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos soluciones de la ecuación de Bessel (con el mismo m). Mostrar que su Wronskiano tiene la forma:

$$fg' - gf' = \frac{constante}{x}$$

Problema 8: Calcular el Wronskiano de $J_m(x)$ y $Y_m(x)$ (m arbitrario).

Problema 9: Mostrar que la definición:

$$J_m(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r}$$

de los $J_m(x)$ implica que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ para todo m entero.

Problema 10: Verificar directamente que:

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} senx \\ J_{-1/2}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} cosx \end{aligned}$$

Fa.M.A.F ©1995

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°6: Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Problema 1: Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden, considerando el problema de valores iniciales especificado:

$$\textbf{a)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\ ; \quad u(x,0) = h(x)$$

$$\textbf{b)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\ ; \quad u(x,0) = h(x)$$

En el caso **b)**, ¿Hasta que valor del tiempo t se pueden extender las soluciones?

Ayudas:

i) Especifique el campo de direcciones características asociado con cada ecuación.

ii) Considere la curva $\gamma(s) = (s, 0, h(s))$ en $\Re^3$. Obtenga la curva característica $\gamma(s,t)$ que pasa por cada $\gamma(s)$ en $t = 0$, resolviendo la ecuación diferencial ordinaria que determina el campo de direcciones características.

Problema 2: Considere un círculo de radio a con centro en el origen de coordenadas. Sean (r, ϕ) las coordenadas polares y (x, y) las correspondientes coordenadas rectangulares del plano. Calcular la solución del problema de Dirichlet (interior) para la ecuación de Laplace ($\nabla^2 u = 0$) con las siguientes condiciones de contorno:

a) $u(r = a) = A$

b) $u(r = a) = A\ cos\phi$

c) $u(r = a) = A + B\,y$

d) $u(r = a) = A\,x\,y$

e) $u(r = a) = A + B\ sen\phi$

f) $u(r = a) = A\,sen^2\phi + B\,cos^2\phi$; A, B: ctes.

Problema 3: Considere en el problema anterior condiciones de contorno de Neumann: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_c = f(\phi)$ (interior) para los siguientes casos particulares:

a) $f(\phi) = A$

b) $f(\phi) = A\, x$

c) $f(\phi) = A\,(x^2 - y^2)$

d) $f(\phi) = A\; cos\phi + B$

e) $f(\phi) = A\; sen\phi + B\; sen^3\phi$

Identifique los problemas incorrectamente formulados.

Problema 4: Determinar la distribución estacionaria de la temperatura dentro de la capa esférica $a < r < b$ si la esfera $r = a$ se mantiene a la temperatura T_1 y la esfera $r = b$ a la temperatura T_2.

Problema 5: Calcular la solución de la ecuación de Poisson en el plano:

$$\nabla^2 u(r, \phi) = 1$$

dentro del círculo de radio $r = a$ si $u(r = a) = 0$.

Problema 6: Resolver el problema de las oscilaciones transversales propias de una cuerda homogénea de longitud L si:

a) Los extremos de la cuerda están fijos rígidamente.

b) Los estremos de la cuerda están libres. Es decir $\dfrac{du}{dx} = 0$ en los extremos de la cuerda. Esto tiene lugar cuando los extremos de la cuerda están sujetos mediante anillos (de masas despreciables), que deslizan sin rozamiento sobre barras paralelas.

c) Un extremo de la cuerda está fijo rígidamente y el otro libre.

d) Los extremos de la cuerda están fijos elásticamente, es decir que: $\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=0,L} - h\; u|_{x=0,L} = 0$.

e) Un extremo de la cuerda está fijo rígidamente y el otro elásticamente.

f) Un extremo de la cuerda está fijo elásticamente y el otro está libre.

Problema 7: En los instrumentos musicales de cuerda percutida (por ejemplo, el piano) las oscilaciones transversales de la cuerda tensa se generan mediante un golpe, que le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. Si el martillo percutor es plano, rígido y tiene un ancho 2δ, el perfil de velocidad inicial de la cuerda estará dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \begin{cases} v_o & |x - x_o| < \delta \\ 0 & |x - x_o| > \delta \end{cases}$$

asumiendo que el martillito golpea a una distancia x_o del extremo de la cuerda y que esta tiene un largo L.

a) Determine las oscilaciones de la cuerda $u(x,t)$ para todo $t > 0$, asumiendo que $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$.

b) Para la energía de la cuerda oscilando se tiene la expresión:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(c^2 u_x^2 + u_t^2\right) dx$$

donde la densidad $\rho = M/L$, si M es la masa de la cuerda. Calcule la energía asociada con cada modo de oscilación o armónico.

c) Determine en que puntos de la cuerda x_o la percusión **no** excita el m-ésimo modo de oscilación.

d) Bajo la razonable aproximación $\delta << L$ determine cuál es el armónico que más resuena (es decir que posee mayor energía) si se percute la cuerda a una distancia x_o de uno de sus extremos.

Problema 8: Calcular las oscilaciones propias de una membrana circular,

a) con la frontera fija rígidamente.

b) con la frontera libre.

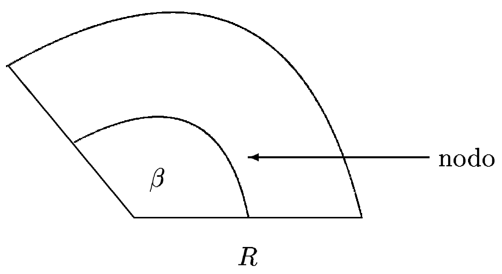
Problema 9: Calcular la frecuencia más baja de oscilación de una onda acústica en una esfera hueca de radio R. La condición de contorno es: $\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$ y ϕ obedece la ecuación de ondas homogénea.

Problema 10: La cantidad u satisface la ecuación de ondas homogénea dentro de un cilindro de radio a, con la condición de contorno $u = 0$ en las paredes del cilindro. En el extremo $z = 0$ tiene que $u = u_0 e^{-i\omega_0 t}$; es decir, se están enviando ondas a lo largo del tubo con diferentes distribuciones espaciales (modos). Encuentre la velocidad de fase del modo fundamental como función de la frecuencia ω_0 e interprete el resultado para pequeños valores de ω_0.

Problema 11: Encontrar las frecuencias de oscilación más bajas de un parche de tambor en forma de triángulo isósceles recto de lados a, a, $a\sqrt{2}$.

Problema 12: Considere un parche de tambor con la forma de un sector circular de radio R y ángulo β.

a) ¿Cuál modo es el ilustrado en la figura?. Dé su respuesta para $\beta = \pi/2$, π, $3/2\pi$.



b) Esquematice en un gráfico las frecuencias de la primer media docena de modos como funciones de β.

Problema 13: La ecuación que describe las ondas elásticas en un medio isotrópico es:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \vec{a} - \mu\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \rho\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2}$$

donde $\vec{a}$ mide los desplazamientos desde el equilibrio, ρ es la densidad, y λ y μ son las constantes elásticas del medio. Encuentre la frecuencia más baja de oscilación de una esfera elástica isotrópica de radio R, dado que:

a) $\vec{a}(\vec{x})$ es de la forma $f(r)\hat{e}_r$, y

b) la condición de contorno en $r = R$ es:

$$\lambda\nabla \cdot \vec{a} + 2\mu\frac{\partial a_r}{\partial r} = 0$$

Con el fin de calcular un número concreto, considere al final $\lambda = \mu$.

Problema 14: En el exterior de un cilindro infinitamente largo de radio a la función potencial $u(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación de ondas. El cilindro se encuentra dividido longitudinalmente, y sobre su superficie

$$u = \begin{cases} u_0 e^{-i\omega_0 t} & (0 < \phi < \pi) \\ -u_0 e^{-i\omega_0 t} & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}$$

Calcular $u(\vec{x}, t)$ fuera del cilindro, si sólo existen ondas salientes para $r >> a$.

Problema 15: Asuma que la densidad de neutrones n dentro del U_{235} obedece la ecuación diferencial:

$$\nabla^2 n + \lambda n = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial n}{\partial t}$$

a) Encontrar el radio crítico R_0 para el cual una esfera de U_{235} con un radio igual o mayor a dicho valor es inestable, es decir que densidad de neutrones en su interior crece exponencialmente con el tiempo.

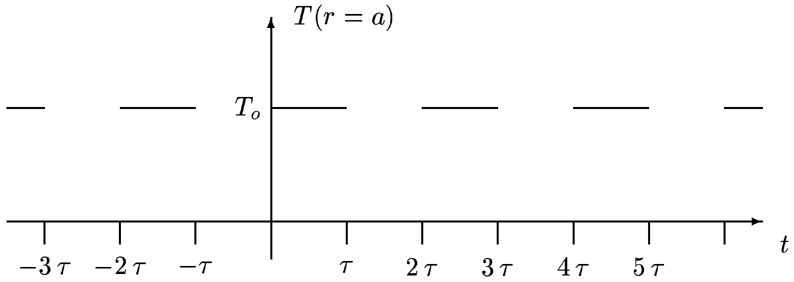
b) Suponga dos hemisferios de U_{235} tales que se encuentren en el límite de estabilidad. Si se juntan para formar una esfera, esta resulta inestable, y se cumple que:

$$n \sim e^{t/\tau}$$

Encontrar la constante de tiempo τ de la explosión resultante.

Problema 16: Una esfera de radio R está uniformemente a temperatura $T = 0$. En el instante $t = 0$, es sumergida en un baño líquido a temperatura constante T_0. Calcular la subsecuente distribución de temperatura $T(\vec{x}, t)$ dentro de la esfera. (Sea κ = conductividad térmica / (densidad $\times$ calor específico)).

Problema 17: La temperatura en una esfera homogénea de radio a obedece la ecuación de difusión con constante κ. Por acciones externas, la temperatura de la superficie de la esfera es forzada a comportarse según lo ilustrado en la figura. Caltular la temperatura $T(t)$ en el centro de la esfera.



Las alteraciones se extienden para $t = \pm\infty$.

Problema 18: Encontrar los tres autovalores más pequeños de la ecuación de Schrödinger para una partícula confinada en una caja cilíndrica de radio a y altura h.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \quad (\psi = 0 \text{ sobre las paredes}) \quad a \simeq h$$

Problema 19: Utilice la transformada coseno con respecto a y para calcular la distribución de temperatura estacionaria en un sólido semi-infinito ($x > 0$) cuando la temperatura en la superficie ($x = 0$) se mantiene constante e igual a la unidad para $-a < y < a$, y cero fuera de esa franja.

Problema 20: Un alambre recto de radio a es sumergido en un volumen infinito de líquido. Inicialmente el alambre y el líquido tienen temperatura $T = 0$. En $t = 0$, el alambre es súbitamente llevado a la temperatura T_0 y mantenido en ella. Encuentre la transformada de Laplace $F(r,s)$ de la distribución de temperatura $T(r,t)$ resultante en el líquido.

Problema 21: Utilice transformadas de Fourier para calcular el movimiento de una cuerda estirada, infinitamente larga, con desplazamientos iniciales dados $y(x,0) = \phi(x)$ y velocidad inicial nula. Los desplazamientos satisfacen la ecuación de ondas homogénea.

Problema 22: Las funciones de Green pueden calcularse para ecuaciones diferenciales homogéneas con condiciones de contorno inhomogéneas. Para ilustrar esto, considere la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 u(r,\theta) + k^2\, u(r,\theta) = 0$$

dentro del círculo de radio R, con la condición de contorno dada: $u(R,\theta) = f(\theta)$. La solución puede escribirse como:

$$u(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} G(\vec{x},\theta')\, f(\theta')\, d\theta'$$

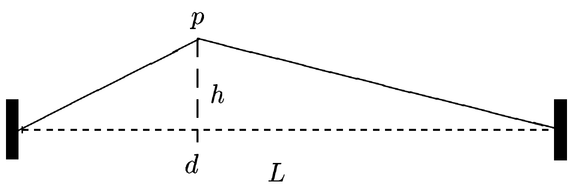
Calcule $G(\vec{x},\theta')$.

Fa.M.A.F ©1995

Métodos Matemáticos de la Física

Guía N°7: Ejemplos de Problemas de Examen

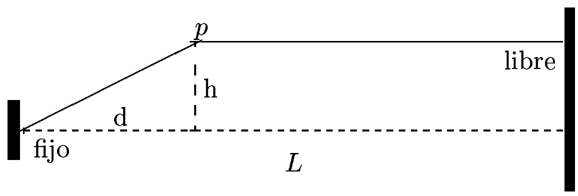
Problema 1: Considere una cuerda estirada con sus extremos fijos, la cual en el instante inicial está sujeta del punto p (ver figura).



a) Indique que condición debe satisfacer la distancia d a un extremo fijo de manera tal que, si la cuerda en reposo se libera de p en un dado instante, en la evolución temporal resultante no se encuentre presente el enésimo modo normal de oscilación. Demuestre que no es posible eliminar el modo fundamental.

b) Grafique la forma de la cuerda en el instante $\bar{T} = L/c$, donde c es la velocidad de propagación de las perturbaciones en la cuerda. Interprete físicamente el tiempo $\bar{T}$.

Problema 2: Considere una cuerda estirada con un extremo fijo y otro libre (desliza sin roce sobre un eje). Si la cuerda es sujeta en p (ver figura), indique que condición debe satisfacer la distancia d al extremo fijo de manera tal que; si la cuerda en reposo se libera de p en un dado instante, en la evolución temporal resultante no se encuentre presente el enésimo modo normal de oscilación. Demuestre que no es posible eliminar el modo fundamental.



Problema 3: Considere un cilindro hueco conductor de radio interior a y exterior b el cual se encuentra a una temperatura $T = 0$ homogénea. En el instante $t = 0$ por el interior del cilindro comienza a circular un fluido con temperatura constante $T = T_0$.
Asumiendo que la superficie exterior del cilindro se mantiene a temperatura constante $T = 0$, que el cilindro es muy largo y que la velocidad del fluido es lo suficientemente grande como para despreciar el tiempo que emplea en llenarlo, calcule la temperatura en todo punto interior de la pared del cilindro para $t \neq 0$.

Asuma ahora que a es muy grande pero $b-a$ se mantiene finito. Calcule cuál es el tiempo característico en la relajación al estado estacionario del cilindro. Explicite sus expresiones con el mayor detalle posible.

Problema 4: Considere un péndulo ideal que cuelga bajo la acción de la gravedad y es perturbado por una fuerza tangente a la trayectoria dada por:

$$F(t) = F_o \cos(\omega\, t)$$

a) Determine en la aproximación de oscilaciones pequeñas el ángulo de desviación del equilibrio utilizando la transformada de Laplace.

b) Indique para qué valores de ω no se mantendrá válida para todo t la aproximación de pequeñas oscilaciones y explique porqué.

Problema 5: Considere una membrana elástica circular de radio R sujeta en su periferia, e inmersa en un medio viscoso que ofrece una resistencia al movimiento proporcional a la velocidad. El movimiento de la membrana resulta así regido por la ecuación:

$$\nabla^2 u - 2\,h\,\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\ .$$

Asumiendo que $R\,h\,c = 5$, determine la solución $u(\vec{r}, t)$ de la ecuación para todo $t > 0$ dado que en el instante inicial la membrana se encuentra en reposo y su forma está dada por:

$$u(r, t = 0) = A\left(1 - \frac{r}{R}\right)\ .$$

Determine explícitamente los coeficientes de los distintos modos presentes en términos de las constantes del problema; e interprete que clase de evolución temporal satisface cada uno de dichos modos.

Problema 6: Considere una barra semi-infinita homogénea de sección transversal uniforme, cuya superficie se encuentra térmicamente aislada, y su extremo se mantiene siempre a temperatura cero. Si se aplica un pulso de calor a una distancia d del extremo, de manera tal que la distribución de temperatura inicial queda expresada por $T(x, t = 0) = \delta(x - d)$ (asumiendo el origen de coordenadas en el extremo de la barra) determine:

a) La distribución de temperatura en la barra para todo $t > 0$.

b) El flujo de calor en el extremo de la barra y en $x = d$ para todo $t > 0$.

Ayudas: La solución del problema con condición de contorno es igual, para $x \geq 0$, a la solución del problema de la barra infinita (sin contorno) pero con una distribución inicial, la cual contempla un adecuado pulso imagen a la izquierda del extremo. La solución del problema infinito puede tratarse mediante una adecuada transformada integral. Verifique que la solución obtenida por este método satisface la condición de contorno especificada.

Problema 7: En los instrumentos musicales de cuerda percutida (por ejemplo, el piano) las oscilaciones transversales de la cuerda tensa se generan mediante un golpe; el cual le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. Si el martillo percutor es plano, rígido y tiene un ancho 2δ, el perfil de velocidad inicial de la cuerda estará dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = \begin{cases} v_o & |x - x_o| < \delta \\ \\ 0 & |x - x_o| > \delta \end{cases}$$

asumiendo que el martillito golpea a una distancia x_o del extremo de la cuerda y que esta tiene un largo L.

a) Determine las oscilaciones de la cuerda $u(x,t)$ para todo $t > 0$, asumiendo que $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$.

b) Para la energía de la cuerda oscilando se tiene la expresión:

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\left(c^2 u_x^2 + u_t^2\right) dx$$

donde la densidad $\rho = M/L$, si M es la masa de la cuerda. Calcule la energía asociada con cada modo de oscilación o armónico.

c) Determine en que puntos de la cuerda x_o la percusión **no** excita el m-ésimo modo de oscilación.

d) Bajo la razonable aproximación $\delta << L$ determine cuál es el armónico que mas resuena (es decir que posee mayor energía) si se percute la cuerda a una distancia x_o de uno de sus extremos.

Problema 8: La aceleración tangencial a_t de un péndulo de masa m y longitud l que cuelga bajo la acción de la gravedad g, viene dada por:

$$m a_t = -m\, g\, sen\alpha - \kappa\, v + F(t)$$

donde α el ángulo de desviación desde la vertical. El término $-\kappa\, v$, donde κ es constante y v es la velocidad del péndulo (con su signo), representa la fuerza de fricción del péndulo con el aire. $F(t)$ es una fuerza periódica externa que perturba el péndulo:

$$F(t) = F_o\, \cos(\omega_0\, t)$$

A los fines de no tener oscilaciones sobreamortiguadas asuma que el parámetro adimensional:

$$\Lambda = \left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 \frac{l}{g}$$

es menor que 1.

a) Escriba en la aproximación de oscilaciones pequeñas la ecuación diferencial que satisface el ángulo de desviación α como función del tiempo.

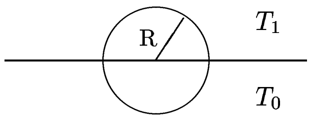
b) Utilizando la transformada integral de Laplace, resuelva la ecuación diferencial bajo las condiciones iniciales: $\alpha(t=0) = 0$ y $\dot{\alpha}(t=0) = 0$

c) Explicite su resultado para el caso en que la frecuencia $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Simplifique sus expresiones asumiendo que $\Delta << 1$ y retenga sólo las contribuciones de primer orden en Δ.

i) Determine el tiempo característico asociado con la relajación desde la condición inicial a un regimen estacionario.

ii) Calcule la amplitud y frecuencia del movimiento asintótico resultante.

Problema 9: Un cilindro de radio R, infinitamente largo, se encuentra semi-sumergido en un líquido a temperatura constante T_0, mientras que su parte superior se encuentra expuesto a una atmósfera cuya temperatura es constante igual a T_1. El cilindro a su vez, rota sobre su eje con velocidad angular constante Ω.



La interfase entre el aire y el líquido es perfectamente plana y el eje del cilindro se encuentra sobre ella. El líquido no moja la superficie del cilindro, y en consecuencia no es arrastrado por este en su rotación. El cilindro está fabricado con un material homogéneo cuya conductividad térmica es κ, y el contacto térmico que presenta la superficie del cilindro con ambos medios es perfecto.

a) Determine la distribución de temperatura en todo punto del espacio **en el regimen estacionario** desde el sistema de laboratorio (donde está descripto el problema).

b) En particular, calcule explícitamente la temperatura sobre el eje del cilindro.

Ayudas: En primer lugar considere el problema respecto de un referencial solidario al cilindro. Desde dicho referencial el cilindro se halla en reposo pero la condición de contorno es ahora una función del tiempo que debe determinar. Resuelva la ecuación de conducción del calor mediante una transformada de Fourier en el tiempo, con el fin de evitar la especificación de condiciones iniciales. Para el cálculo de la transformada de Fourier de la condición de contorno conviene previamente calcular la serie de Fourier correspondiente a la dependencia temporal. Finalmente transforme las expresiones al sistema de laboratorio. Tenga presente que las funciones de Bessel de argumento con fase $\frac{3}{4}\pi$ pueden expresarse en término de las funciones reales *ber* y *bei* según:

$$J_n\left(i\sqrt{i}\,x\right) = ber_n(x) + i\,bei_n(x)$$

Problema 10: Considere un parche circular de tambor de radio R inicialmente en reposo al cual se lo percute con una aguja (el area de contacto es despreciable frente a la del parche).

a) Determine en que puntos del parche la percusión genera oscilaciones en las cuales no está presente el segundo modo normal de vibración.

b) Determine en que puntos del parche la percusión genera oscilaciones en las cuales no está presente el cuarto modo normal de vibración.

Considere como primer modo normal al fundamental. Para dar sus respuestas utilice todos los argumentos geométricos y físicos que considere pertinentes para **reducir u omitir** cálculos matemáticos.

Problema 11: Considere un cilindro de radio R, semi-infinito, que se encuentra rodeado por un líquido a temperatura constante $T = 0$, mientras que su tapa (en el plano $z = 0$) está expuesta a una variación periódica de temperatura dada por la función:

$$H(t) = \begin{cases} T_1\,, & n\,T \leq t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) T \\ \\ T_0\,, & \left(n + \frac{1}{2}\right) T \leq t \leq (n+1)\,T \end{cases} \qquad (\forall n \text{ entero}).$$

El cilindro está fabricado con un material homogéneo cuya conductividad térmica es κ, y el contacto térmico que presenta toda la superficie del cilindro es perfecto.

a) Determine la distribución de temperatura en el interior del cilindro **en el regimen estacionario**.

b) Calcule el flujo total de calor, promediado en un período, a través de la tapa plana en $z = 0$.

c) Calcule el flujo total de calor, promediado en un período, a través de la superficie lateral del cilindro.

d) Determine la relación entre los resultados de los puntos **b)** y **c)**. Analice el caso particular $T_1 = -T_0$. Explique todas las afirmaciones que realice en este item.

Ayuda: La densidad de flujo de calor (o flujo por unidad de area) a través de una supercie S viene dado por:

$$j = -\frac{\partial T}{\partial n}$$

donde: $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada normal a la superfie S. El signo resultante en la densidad de flujo así calculada, determina el sentido del flujo de calor a través de la superficie con respecto al sentido del versor $\hat{n}$ nornal a la superficie.

Problema 12: A requisito de la barra brava de su club de futbol favorito, un famoso luthier italiano debe construir un corneta cónica cuya frecuencia fundamental sea exáctamente 500 Hz.

a) Determine el espectro de frecuencias correspondiente a los modos normales de vibración de una cavidad cónica de base circular abierta.

b) Calcule las dimensiones de la corneta que debe fabricar el luthier.

Ayudas: A todo fin práctico la corneta es un cono de base circular, fabricado en un material rígido, abierto en el extremo opuesto al vértice. Soplando por un pequeño orificio practicado en el vértice se inducen ondas de presión en el aire. Dichas ondas de presión obedecen la ecuación de ondas usual, en la cual la velocidad de propagación es la velocidad del sonido en el aire: $330\,\dfrac{m}{s}$. Las condiciones de contorno bajo las cuales debe resolverse la ecuación son tales que:

i) El gradiente de presión normal a las paredes rígidas es nulo, y

ii) Sobre el extremo abierto la presión debe mantenerse constante igual a la atmosférica. Esta condición puede simplificarse imponiéndose sobre un casquete esférico con centro en el vértice del cono y radio igual a la generatriz del mismo. Además reescribiendo la ecuación para la variable adecuada, esta es una condición dde contorno homogénea.

Problema 13: En muchas ocasiones, son los miembros adultos de una población de presas quienes son principalmente atacados por los predadores, mientras que los miembros jóvenes se encuentran mejor protegidos de los ataques; o bien por su tamaño más pequeño, o bien porque viven en una región inaccesible a los predadores. Sea x_1 el número de presas adultas y x_2 el número de presas jóvenes en la población de presas, e y el número de predadores. Se cumple que:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -a_1\,x_1 + a_2\,x_2 - b\,x_1\,y \\
\frac{dx_2}{dt} &= n\,x_1 - (a_1 + a_2)\,x_2 \\
\frac{dy}{dt} &= -c\,y + d\,x_1\,y
\end{aligned}$$

donde a_1 y c son las tasas de mortalidad por unidad de tiempo de la población de presas y de predadores respectivamente; n es la tasa de natalidad de la población de presas y a_2 es la tasa por unidad de tiempo de promoción de individuos jóvenes a adultos en la población de presas (un individuo se considera adulto cuando está en condiciones de procrear). Por último, b y d son los coeficientes usuales de acople entre las poblaciones de presas y predadores en el modelo de Volterra.

a) Determine todos los puntos de equilibrio del sistema.

b) Establezca bajo que condiciones sobre los coeficientes del problema, es posible que dichos puntos de equilibrio sean estables.

Problema 14: La temperatura de la superficie de la tierra tiene una periodicidad diaria y anual muy marcada. Con el fin de estudiar el problema de la propagación del calor en un terreno, suponga que la tierra es un semi–espacio infinito, homogéneo y uniforme caracterizado por la conductividad térmica κ; y que su superficie es un plano perpendicular al eje coordenado x sobre el cual se tiene una condición de contorno periódica:

$$T(x = 0, t) = A\,\cos(\omega_0\,t)$$

a) Resuelva la ecuación de difusión del calor correspondiente a este problema en forma completa (i.e. especificando todas las constantes de la solución).

Ayuda: Dado que se tiene un problema sin condiciones iniciales, es conveniente efectuar una transformada de Fourier en el tiempo de la ecuación y su condición de contorno, antes de proceder a resolverla.

b) Se verifica experimentalmente que la amplitud de las oscilaciones resultantes en el terreno disminuye de manera exponencial con la profundidad; y que existe un retardo entre el tiempo en que ocurre un máximo (o mínimo) en la superficie y el tiempo correspondiente en el que este aparece a una dada profundidad en el terreno. Especifique la constante de atenuación de la amplitud y la diferencia de fase resultante en la solución del problema.

c) En la construcción de una bodega de vino es importante lograr la mayor estabilidad posible en la temperatura durante períodos muy prolongados. Suponiendo que la amplitud térmica anual en la superficie de la tierra es de 19,5°C, calcule la profundidad a partir de la cual debe construirse la bodega para que la amplitud térmica no supere los 2,6°C durante el año. Calcule además el tiempo de retardo entre la temperatura máxima registrada en la superficie y la correspondiente registrada en la bodega. Considere $\kappa = 0,004\, cm^2/s$.

Problema 15: Dada una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y no homogénea:

$$y'' + p_1\, y' + p_2\, y = f(x)$$

donde $f(x)$ es una función periódica (período 2π) dada, desarrollable en serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\, cos(nx) + b_n\, sen(nx)\right)$$

es posible que se admitan soluciones periódicas.

a) A fin de estudiar esta posibilidad, proponga como solución un desarrollo en serie de Fourier:

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n\, cos(nx) + B_n\, sen(nx)\right)$$

y determine bajo que condiciones de los parámetros de la ecuación, existen tales soluciones.

b) Determine si las siguientes ecuaciones admiten soluciones periódicas, y en caso afirmativo construya dichas soluciones.

i) $y'' + y = cosx$ **ii)** $y'' - y = |senx|$

Problema 16: La versión discreta (en la coordenada espacial, pero de tiempo continuo) de la ecuación de difusión, es la correspondiente a las "caminatas aleatorias simétricas":

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t) - 2\, P_n(t)$$

con n entero $(-\infty < n < \infty)$.

Construya la solución $P_n(t)$ de esta ecuación con la condición inicial $P_n(0) = \delta_{n,o}$.

Ayuda: La solución puede escribirse de la forma: $P_n(t) = f(t)\, B_n(z)$; con $z = z(t)$ y $B_n(z)$ es una apropiada función de Bessel.

Fa.M.A.F ©1995