

# Relatividad General<sup>1</sup>

OSCAR REULA  
FaMAF, UNC

---

<sup>1</sup>Curso para Alumnos dado en la reunión de la Unión Matemática Argentina, Tandil 1992.

# 1 Variedades

Las leyes de la física se formulan en término de expresiones diferenciales sobre mapas, o asignaciones, de ciertos conjuntos en los reales u otros espacios vectoriales. Sin embargo estos conjuntos de partida no tienen una estructura de espacio vectorial y por lo tanto es necesario utilizar una noción del cálculo diferencial que contemple esta situación. Esta noción es la de una variedad diferenciable. Existen varias definiciones alternativas del concepto de una variedad, nosotros aquí veremos una<sup>1</sup> que no es la usual ni la más general pero que sin embargo se adapta mejor a las necesidades de la física<sup>2</sup>.

Ejemplo: A modo de motivación consideremos el siguiente ejemplo:

Supongamos que tenemos una botella llena de gas y que queremos estudiar este sistema físico en situaciones de equilibrio, es decir sus estados estacionarios. Sobre este sistema podemos medir varias variables: su temperatura, su volumen, su presión, etc. Tenemos así varias funciones o mapas del conjunto de estados de equilibrio posibles de nuestro sistema, que denotaremos  $M$ , en los reales. Sea  $\mathcal{T}$  el conjunto de todas estas funciones “medibles”<sup>3</sup>. Queremos que este conjunto –lo que físicamente sabemos del sistema– sea el que caracteriza todas las propiedades del mismo. ¿Que condiciones podemos imponer sobre este conjunto?

En primer lugar nótese que en algunos casos uno no mide una de estas variables directamente, por ejemplo uno puede medir su temperatura con un termómetro  $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ , o puede medir la frecuencia máxima de su radiación de cuerpo negro  $\omega_{max} : M \rightarrow \mathbb{R}$  y de allí inferir su temperatura  $\tilde{T} = \tilde{T}(\omega)_{max} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Por lo tanto si  $\omega \in \mathcal{T}$  entonces  $\tilde{T}(\omega_{max}(\cdot)) : M \rightarrow \mathbb{R}$ , también debe pertenecer a  $\mathcal{T}$ .

A1) Si  $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{T}$  y  $F : f_1[M] \times \dots \times f_r[M] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$  luego  $F(f_1(\cdot), \dots, f_r(\cdot)) \in \mathcal{T}$

Esta condición merece varios comentarios:

– Note que al pedir que  $F$  sea  $C^\infty$  no estamos suponiendo ninguna pérdida de generalidad: El grado de diferenciabilidad de un mapa no es una propiedad físicamente medible y por lo tanto, hasta tanto se demuestre su inconsistencia, el físico supone que todos los mapas medibles<sup>4</sup> son  $C^\infty$ .

– Note que nuestra primer condición nos asegura que las funciones constantes [Aparatos desenchufados] están en  $\mathcal{T}$  [Estas forman un anillo isomórfico a  $\mathbb{R}$  que denotaremos por  $\mathcal{K}$ .] y que la suma y la multiplicación de elementos de  $\mathcal{T}$  también están en  $\mathcal{T}$ .

$$\begin{aligned}(f + g)(p) &:= f(p) + g(p) \\ (f \cdot g)(p) &:= f(p)g(p) \quad \forall p \in M\end{aligned}$$

Con estas propiedades  $\mathcal{T}$  es un **álgebra conmutativa sobre  $\mathcal{K}$** .

<sup>1</sup>Ver por ejemplo Penrose (1984), Chevalley (1946), Nomizu (1956).

<sup>2</sup>Excepto por los casos donde variedades de dimensión infinita son requeridas.

<sup>3</sup>Este no es el concepto matemático usual de función medible

<sup>4</sup>Un punto donde se presenta tal problema es por ejemplo un transiciones de fase y en soluciones a ecuaciones en derivados parciales no lineales donde aparecen ondas de choque.

A partir de  $\mathcal{T}$ , o más precisamente dado un anillo conmutativo  $\mathcal{T}$  cualquiera, uno puede reconstruir completamente y unívocamente el conjunto  $M$  ( $M = \{ \text{ideales maximales de } \mathcal{T} \}$ ). Por lo tanto incluso los puntos de la variedad están determinados por lo que medimos, estos no pueden darse *a priori* de las mediciones. [Recuerde que  $\mathcal{I}$  es un ideal de  $\mathcal{T}$  si para cualquier  $f \in \mathcal{T}$  y cualquier  $g \in \mathcal{I}$  tenemos que  $fg$  y  $f+g \in \mathcal{I}$ . Un ideal  $\mathcal{I}$  es maximal si no existe ningún otro ideal  $\mathcal{I}' \neq \mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}'$ .]

Ejercicio: Muestre que  $\mathcal{I}_p := \{f \in \mathcal{T} : f(p) = 0\}$  es un ideal maximal.

– El álgebra conmutativa  $\mathcal{T}$  también nos da naturalmente una **topología** en  $M$ . ésta está generada por la siguiente base de abiertos –de ahora en más  $\mathcal{T}$ –entornos– :

$\mathcal{U}$  es un  $\mathcal{T}$ –entorno de  $p$  si existe  $f \in \mathcal{T}$ ,  $f(p) \neq 0$ , tal que  $\mathcal{U} = \{q \in M \mid f(q) \neq 0\}$ .

– Note que la intersección de dos  $\mathcal{T}$ –entornos es también un  $\mathcal{T}$ –entorno. En efecto si  $f$  es la función que genera  $\mathcal{U}$  y  $g$  la que genera  $\mathcal{V}$ , entonces  $fg$  es la que genera  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ . Con esta topología cada elemento de  $\mathcal{T}$  es continuo.

Ejercicio: ¿Que función nos da la unión de dos  $\mathcal{T}$ –entornos?

Con esta estructura topológica inducida en  $M$  podemos ahora introducir las siguientes condiciones adicionales sobre  $\mathcal{T}$ :

A2) Si  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que dado cualquier  $p \in M$  existe un  $\mathcal{T}$ –entorno de este punto  $\mathcal{U}$  y un elemento  $f \in \mathcal{T}$  tal que  $g|_{\mathcal{U}} = f|_{\mathcal{U}}$ , entonces  $g \in \mathcal{T}$ .

En general un instrumento solo cubre un rango de valores de la variable que mide, tiene una escala finita, y por lo tanto las funciones medibles solo pueden ser construidas a partir de sus “restricciones”. Un ejemplo donde esto ocurre es el siguiente:

Ejemplo: Supongamos que queremos medir la temperatura de un cuerpo, si este está a temperatura ambiente podemos usar un termómetro de mercurio, pero si este está muy frío el mercurio se congelaría y por lo tanto tendríamos que usar un termómetro de alcohol, pero si por el contrario está muy caliente ya no lo podríamos usarlo pues a cierta temperatura el mercurio entraría en ebullición. Antes de ese punto tendríamos que cambiar de aparato y medir con, por ejemplo, un pirómetro. Si queremos medir todo el rango de temperaturas posibles deberemos entonces imaginar una sucesión de aparatos, cada uno de ellos cubriendo un cierto rango finito de temperaturas. Es decir, tendremos a nuestro alcance una sucesión de funciones cubriendo cada una de ellas solo una parte del sistema físico. La condición anterior nos asegura entonces que la función temperatura está contenida en  $\mathcal{T}$ , aunque no haya aparato que la pueda medir.

La próxima condición nos asegura de que no todo lo que se puede hacer en física es medir, sino que en general hay relaciones entre los datos medidos, es decir que a partir de algunas variables podemos deducir todas las demás. Esto implica además que el número de variables independientes de nuestro sistema no depende del estado, o punto de  $M$ , sino que es una *propiedad* del sistema como un todo.

A3) Por cada  $p \in M \exists$  un  $\mathcal{T}$ –entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  y  $n$  elementos  $x^1, x^2, \dots, x^n$  de  $\mathcal{T}$  tal que:

i) Dados dos puntos en  $\mathcal{U}$  al menos uno de los  $x^i$  tiene un valor diferente en estos dos puntos.

ii) La restricción de cada elemento de  $\mathcal{T}$  en  $\mathcal{U}$  puede ser expresada por una función  $C^\infty$  de las restricciones en  $\mathcal{U}$  de las  $x^1, \dots, x^n$ .

Se puede ver que el número  $n$  es independiente de  $p$ , es decir es el mismo para todo punto de  $M$  y es así una propiedad de  $(M, \mathcal{T})$ , se llama su dimensión.

Volviendo a nuestro experimento con la botella de gas, esta condición a menudo se enuncia diciendo: “El estado de equilibrio (termodinámico) de un gas está completamente determinado por dos números, (por ejemplo) su temperatura y el número de partículas por unidad de volumen”.

Usualmente a las funciones  $x^1, \dots, x^n \in \mathcal{T}$  se las llama **coordenadas locales** alrededor de  $p$ , al conjunto  $\mathcal{U}$  un  **$\mathcal{T}$ -entorno coordinado local** y al par  $(\mathcal{U}, \{x^i\})$  un **sistema de coordenadas locales**.

Al par  $(M, \mathcal{T})$ , que cumple las condiciones anteriores se lo denomina **variedad (infinitamente) diferenciable** <sup>5</sup>.

Se puede ver que la definición usual de variedad Hausdorff de dimensión finita es equivalente a la que acabamos de dar.

Además de las condiciones ya pedidas agregamos dos más:

A4) La base de abiertos arriba mencionada tiene una subbase contable.

A5)  $(M, \mathcal{T})$  es conexo.

La primera condición no tiene un correlato inmediato con nuestra motivación experimental pero será necesaria más adelante ya que es equivalente a la existencia de una métrica (y de una derivada covariante) en la variedad. Esta condición nos asegura que con un conjunto contable de aparatos de medición podemos explorar toda la variedad.

Con respecto a la última condición podemos agregar que si la variedad no fuese conexa, ya que no podríamos ir de una componente a otra modificando continuamente el estado de nuestro sistema, simplemente tomaríamos cada componente disjunta como nuestra variedad.

En lo que sigue abandonaremos nuestra motivación original, la botella de gas, pues con los elementos ya obtenidos podemos continuar de una manera mucho más formal. Tal motivación podría ser en realidad proseguida, pero nos haría cambiar el orden y énfasis en lo que sigue y por lo tanto dilataría demasiado esta presentación.

## 2 Campos Vectoriales y Tensoriales

Ahora estamos en condiciones de implementar el cálculo diferencial en  $(M, \mathcal{T})$ . El primer concepto será el de un **campo vectorial contra-variante**, es decir un mapa  $v : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  con las siguientes propiedades:

---

<sup>5</sup>Podemos igualmente denotar a la variedad solamente  $\mathcal{T}$ , ya que como mencionamos antes, conociendo  $\mathcal{T}$  como un álgebra conocemos sus ideales maximales y por lo tanto  $M$ .

- i)  $v(k) = 0$  si  $k \in \mathcal{K}$
- ii)  $v(f + g) = v(f) + v(g)$ , si  $f, g \in \mathcal{T}$
- iii)  $v(fg) = fv(g) + gv(f)$ , si  $f, g \in \mathcal{T}$

El conjunto de todos estos mapas, llamados **derivaciones** será denotado por  $\mathcal{T}^1$ . Note que si  $v$  y  $u \in \mathcal{T}^1$  y  $h \in \mathcal{T}$  luego  $(v + u)$  y  $hv$  definidos por:

$$\begin{aligned}(v + u)(f) &= v(f) + u(f) \quad \forall f, g \in \mathcal{T} \\ (hv)(f) &= hv(f) \quad \forall f \in \mathcal{T}\end{aligned}$$

también están en  $\mathcal{T}^1$ . Por lo tanto  $\mathcal{T}^1$  es un módulo sobre  $\mathcal{T}$ . Es más  $\mathcal{T}^1$  es un álgebra (de *Lie*) con multiplicación definida por:  
 $u = [w, v] := u \circ v - v \circ u$   
o sea

$$u(f) = [w, v](f) := w(v(f)) - v(w(f)) \quad \forall f \in \mathcal{T}$$

Ejercicio: Muestre que  $[w, v]$  es una derivación.

Ejercicio: Muestre que este producto (antisimétrico) satisface la identidad de Jacobi.

## 2.1 Restricciones

Hay dos tipos de restricciones a los conceptos introducidos que son de gran utilidad. Por un lado podemos restringir el conjunto  $\mathcal{T}$  a funciones de un subconjunto  $S$  de  $M$ , es decir, tomando el conjunto de clases equivalentes en  $\mathcal{T}$  bajo la siguiente relación  $f \approx g$  si  $f|_S = g|_S$ .

Ejercicio: Sea  $h \in \mathcal{T}$  y sea  $S = \{p \in M \mid h(p) = 0\}$

Pruebe que:

- a)  $S$  es un subconjunto cerrado de  $M$  con respecto a la topología inducida en este por  $\mathcal{T}$ .
- b)  $(S, \mathcal{T}|_S)$  es una subvariedad de  $M$ .

Esta restricción nos da un álgebra conmutativa  $\mathcal{T}|_S$ . Si esta álgebra satisface las condiciones  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  entonces diremos que  $S$  es una subvariedad de  $M$ . El conjunto de los campos vectoriales de  $\mathcal{T}|_S$ , es decir el conjunto  $\mathcal{T}|_S^1$ , puede ser inducido a partir de  $\mathcal{T}^1$  simplemente restringido los elementos de este último conjunto a los que actúan correctamente sobre  $\mathcal{T}|_S$ . Es decir sea  $(\mathcal{T}|_S^1)_{pre}$  el subconjunto de elementos de  $\mathcal{T}^1$  satisfaciendo:

$$u(f) = u(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{T}, f \equiv g$$

Denotaremos por  $\mathcal{T}|_S^1$  al conjunto de clases equivalentes de  $(\mathcal{T}|_S^1)_{pre}$  bajo la relación:

$$u \equiv v, \text{ si } u(f)|_S \equiv v(f)|_S \quad \forall f \in \mathcal{T}_S$$

El otro tipo de restricción es similar, dado un subconjunto  $S$  de  $M$  suficientemente bueno pero no necesariamente una subvariedad - podemos considerar el conjunto de clases equivalentes,  $\mathcal{T}^1[S]$ , de  $\mathcal{T}$  bajo la relación

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \text{ si } \mathbf{u}(f)|_S = \mathbf{v}(f)|_S \quad \forall f \in \mathcal{T}.$$

En particular si  $S = \{p\}$ , un punto de  $M$ , a  $\mathcal{T}^1[S]$  se lo denota como  $T_p$  y se lo llama el **espacio de vectores tangentes a  $M$  en  $p$** . Como veremos a continuación éste es un espacio vectorial de la misma dimensión que  $M$ .

## 2.2 Representación local de Campos Vectoriales

Sea  $(\mathcal{U}, \{x^i\})$  en sistema local de coordenadas y sea  $h$  la función que genera  $\mathcal{U}$ . Sea  $h\mathbf{v}$  dada por

$$h\mathbf{v}(f) := \sum_{i=1}^n h\mathbf{v}^i \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

donde  $F$  es la representación de  $f$  en  $\mathcal{U}$  asegurada por A3, y  $\{\mathbf{v}^i\}$  son  $n$  elementos arbitrarios de  $\mathcal{T}$ . Se puede ver que este mapa satisface las dos condiciones que definen un campo vectorial y por lo tanto lo es. Esta representación es muy útil en la práctica y por lo tanto es de interés conocer si es general, el siguiente teorema así lo afirma.

**Teorema 1** Si  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}^1$  luego en cualquier sistema de coordenadas local tiene la forma:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

con

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{v}(x^i) \in \mathcal{T} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Prueba: Use que si  $\bar{x}^i = x^i(p)$  luego en un entorno suficientemente pequeño contenido en  $\mathcal{U}$ :

$$\begin{aligned} F(x^1, \dots, x^n) &= F(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \\ &+ \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\bar{x}^1(1-t) + x^1t, \dots, \bar{x}^n(1-t) + x^nt) dt \\ &= F(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \\ &+ \sum_{i=1}^n (x^i - \bar{x}^i) \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x^i} (\bar{x}^1(1-t) + x^1t, \dots, \bar{x}^n(1-t) + x^nt) dt \end{aligned}$$

El resultado se obtiene actuando primero con el vector y luego evaluando en el punto  $p$ .

## 2.3 Campos Tensoriales

A partir del módulo  $\mathcal{T}^1$  podemos generar otros módulos. El más sencillo es su dual  $\mathcal{T}_1$ , es decir el conjunto de mapas  $\mathcal{T}$ -lineales de  $\mathcal{T}^1$  en  $\mathcal{T}$ , es decir el conjunto con elementos  $\sigma$  que satisfacen

$$\sigma(\mathbf{u} + f\mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{u}) + f\sigma(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{T}^1, f \in \mathcal{T}$$

Se ve fácilmente que  $\mathcal{T}_1$  es también un módulo sobre  $\mathcal{T}$ , con las operaciones suma y  $\mathcal{T}$ -producto dados por:

$$(\sigma + f\tau)(\mathbf{v}) := \sigma(\mathbf{v}) + f\tau(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}^1$$

A los elementos de este espacio se los denomina **campos co-vectoriales**.

**Ejemplo1:** Sea  $f \in \mathcal{T}$  fija. Considere el mapa  $df : \mathcal{T}^1 \rightarrow \mathcal{T}$  dado por  $df(\mathbf{v}) := \mathbf{v}(f)$ . Este mapa, llamado la diferencial de  $f$  es  $\mathcal{T}$ -lineal y por lo tanto un elemento de  $\mathcal{T}_1$

Vemos así que para cada elemento de  $\mathcal{T}$ ,  $f$ , obtenemos un elemento de  $\mathcal{T}_1$ ,  $df$ , su diferencial. Si denotamos a tal mapa por  $\nabla : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_1$  vemos que este satisface:

- 1.)  $\nabla k = 0$  si  $k \in \mathcal{K}$  [Ya que  $dk(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(k) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \Rightarrow dk = 0$ ]
- 2.)  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$  [Ya que  $d(f + g)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(f + g) = \mathbf{x}(f) + \mathbf{x}(g) = df(\mathbf{x}) + dg(\mathbf{x})$ ]
- 3.)  $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$  [Ya que  $d(f \cdot g)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(f \cdot g) = f\mathbf{x}(g) + g\mathbf{x}(f) = fdg(\mathbf{x}) + gdf(\mathbf{x})$ ]

**Ejercicio:** Sea  $f \in \mathcal{T}$ ,  $S = \{p \in M \mid f(p) = 0\}$  tal que  $df|_S \neq 0$ . Vea que la condición  $\mathbf{u} \in \mathcal{T}|_S$  es equivalente a la condición  $df(\mathbf{u}) = 0$ .

Con las suposiciones que hemos hecho sobre la variedad se puede ver que si tomamos el dual de  $\mathcal{T}_1$  obtenemos nuevamente  $\mathcal{T}^1$ , es decir  $\mathcal{T}^1$  es reflexivo y por lo tanto dualizando no obtenemos ningún módulo más. Pero nada nos impide considerar mapas multilineales<sup>6</sup> de varias copias de  $\mathcal{T}^1$  en  $\mathcal{T}$ , o más generalmente de varias copias de  $\mathcal{T}^1$  y de  $\mathcal{T}_1$  en  $\mathcal{T}$ . Obtenemos así **módulos de tipo  $\mathcal{T}_l^k$**  cuyos elementos, llamados **campos tensoriales de tipo  $\binom{k}{l}$**  son mapas de  $\underbrace{\mathcal{T}^1 \times \dots \times \mathcal{T}^1}_{l \text{ veces}} \times \underbrace{\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_1}_{k \text{ veces}}$  en  $\mathcal{T}$ .

**Ejemplo2:** Sea  $\dim(M) = n$  y sea  $\varepsilon \in \text{cal}T_n$  totalmente antisimétrico [ $\varepsilon(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) = -\varepsilon(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n)$ ].

**Ejercicio:** Muestre que si  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son tensores totalmente antisimétricos y en  $p \in M$   $\varepsilon_1|_p \neq 0$ ,  $\varepsilon_2|_p \neq 0$ , luego existe  $a \in R$  tal que  $\varepsilon_1|_p = a\varepsilon_2|_p$ .

**Ejemplo3:** Sea  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_1^1$  este es un mapa lineal de  $\mathcal{T}^1 \times \mathcal{T}_1$  en  $R$ . Para cada  $\mathbf{u} \in \mathcal{T}^1$  tenemos  $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \cdot) : \mathcal{T}_1 \rightarrow R$  es decir un elemento de  $\mathcal{T}^1$ , es decir podemos considerar a  $\mathbf{A}$  como un mapa lineal de  $\mathcal{T}^1$  a  $\mathcal{T}^1$  es decir un **operador o transformación lineal**:  $A(\mathbf{u}) := \mathbf{A}(\mathbf{u}, \cdot)$ .

**Ejercicio:** Vea que dado  $\varepsilon \in \mathcal{T}_n$  completamente antisimétrico y distinto de cero en  $p \in M$  tenemos que  $\varepsilon(A(\cdot), A(\cdot), \dots, A(\cdot))$  es también completamente antisimétrico y por lo tanto existe  $a \in R$  tal que  $\varepsilon(A(\cdot), A(\cdot), \dots, A(\cdot)) = a\varepsilon(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ . Relacione al número  $a$  con  $\det(A)$ .

<sup>6</sup>Existe otra definición de campo tensorial usando el producto externo de copias de  $\mathcal{T}^1$  y su dual. En nuestro caso ambas definiciones son equivalentes.

Ejercicio: Vea usando el ejercicio anterior y una base de  $\mathcal{T}^1$  en  $p$  que  $\text{tra}(A) := \frac{d}{d\lambda} \det(I + \lambda A)|_{\lambda=0}$

Ejemplo4: Sea  $M = R^4$  y  $\mathcal{T}$  el conjunto de funciones  $C^\infty$  de las cuatro coordenadas cartesianas. Sea  $\mathbf{F} \in \mathcal{T}^2$  antisimétrico [ $\mathbf{F}(\sigma, \tau) = -\mathbf{F}(\tau, \sigma)$ ]. Este tensor representa el campo electromagnético: Si  $t \in \mathcal{T}$  es una función tiempo, luego  $\mathbf{F}(\cdot, dt)$  representa el vector campo eléctrico,  $\mathbf{E}(\sigma) := \mathbf{F}(\sigma, dt)$ . Note que  $\mathbf{E}(dt) = 0$  lo que demuestra que  $\mathbf{E}$  es un vector tangente a las superficies espaciales definidas por  $t = \text{cte.}$ . El co-vector campo magnético se define análogamente usando  $dt$  y un  $\varepsilon$  como el del ejemplo 2.

### 3 Métricas

A menudo, y ese será el caso más adelante cuando consideremos el espacio-tiempo, es necesario proveer a una variedad de una estructura extra llamada la métrica. Esta estructura esta dada por un elemento particular de  $\mathcal{T}_2^0$ , es decir un mapa de  $\mathcal{T}^1 \times \mathcal{T}^1$  en  $\mathcal{T}$ , que denotaremos con la letra  $g$  y que satisface las siguientes condiciones:

- i)  $g$  es simétrica, es decir  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{T}^1$ .
- ii)  $g$  es no-degenerada, es decir  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}^1 \Rightarrow \mathbf{u} = 0$ .

Si además se cumple que la métrica es positiva, es decir que  $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \forall \mathbf{u} \in \mathcal{T}$ , entonces diremos que métrica es **Riemanniana**. En este caso en cada punto  $p \in M$  tenemos una norma sobre el espacio de vectores tangentes a  $M$  en  $p$ ,  $T_p$ .

Si la condición de positividad no se cumple entonces en cada punto de  $p$  de  $M$  podemos dividir a  $T_p$  en un cono sólido de vectores causales  $C := \{\mathbf{u} \in T_p \mid g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq 0\}$ , [es decir un conjunto tal que si  $\mathbf{u} \in C$  luego  $\alpha \mathbf{u} \in C \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$  y si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C$  luego  $\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v} \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ ]. Si  $\text{Int}C$ , cuyos elementos llamaremos **vectores temporales** consta de dos conjuntos no conectados, el conjunto de los vectores temporales dirigidos hacia el futuro y el de los vectores temporales dirigidos hacia el pasado, entonces diremos que tal métrica es **Lorentziana**. A la frontera de  $C$  se la llama el **cono de direcciones nulas** de  $T_p$  y sus elementos **vectores nulos**.

La segunda condición en la definición de la métrica nos dice que ésta puede ser pensada como un isomorfismo entre  $\mathcal{T}^1$  y  $\mathcal{T}_1$  en efecto, dado  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}^1$  arbitrario,  $g(\mathbf{v}, \cdot)$  es un mapa lineal de  $\mathcal{T}^1$  en  $\mathcal{T}$  (está esperando un elemento cualquiera,  $\mathbf{v}$ , de  $\mathcal{T}^1$  para darnos la función  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ) y por lo tanto un elemento de  $\mathcal{T}_1$ . La condición ii) nos dice que este mapa es invertible y por lo tanto un isomorfismo entre módulos.

### 4 Derivada Covariante

En la sección anterior dimos como ejemplo de campo co-vectorial a la diferencial de una función,  $df$ , es decir aquel co-vector que cuando actúa sobre un campo vectorial  $\mathbf{u}$  nos da la función “derivada de  $f$  en la dirección de  $\mathbf{u}$ ”.

Nos preguntamos ahora si habrá una noción similar para tensores, es decir un operador que actúa sobre cualquier tensor en general y que en particular cuando actúe en un tensor de tipo  $\binom{k}{l}$  nos

de un tensor de tipo  $\binom{k}{i+1}$ , siendo el argumento extra para ubicar allí el vector con respecto a cuya dirección queremos tomar la derivada. Denotaremos a tal operador por  $\nabla$ , es decir denotaremos la derivada covariante de un tensor  $T$  por  $\nabla T$ . Si ocupamos el argumento extra con un vector, digamos  $\mathbf{x}$ , entonces tal evaluación nos dará un tensor del mismo tipo que  $T$ , la derivada covariante de  $T$  en la dirección del vector  $\mathbf{x}$ , y lo denotaremos por  $\nabla_{\mathbf{x}}T$ .

A este operador le pediremos tres propiedades, las únicas que aparecen naturalmente si no imponemos ninguna condición extra sobre la variedad<sup>7</sup>.

- C1)  $\nabla f = df \quad \forall f \in \mathcal{T}$ , es decir cuando actúa sobre  $\mathcal{T}$  (considerando a  $\mathcal{T}$  como el conjunto de tensores de tipo  $\binom{0}{0}$ ) coincide con el operador derivada usual.
- C2)  $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S \quad \forall T, S \in \mathcal{T}_i^k$ , es decir actúa linealmente.
- C3)  $\nabla(TS) = T\nabla S + S\nabla T \quad \forall T \in \mathcal{T}_i^k, S \in \mathcal{T}_i^{k'}$ , es decir satisface la regla de Leibnitz [o la regla de la cadena considerando el producto como composición multilineal].

La propiedad C3 es muy importante pues conecta (o sincroniza) la acción de la derivada covariante entre tensores de distinto tipo de tal manera que si conocemos como esta actúa sobre vectores conocemos como actúa sobre un tensor de tipo arbitrario. En efecto, sea  $\sigma$  un co-vector cualquiera, luego C3 implica,

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\sigma)(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{x}}(\sigma(\mathbf{u})) - \sigma(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathcal{T}^1,$$

y por lo tanto si conocemos como actúa  $\nabla$  sobre elementos de  $\mathcal{T}$  conocemos  $\nabla_{\mathbf{x}}(\sigma(\mathbf{u}))$  y si conocemos como actúa sobre elementos de  $\mathcal{T}^1$  conocemos  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}$ , pero entonces por la fórmula anterior y dada la arbitrariedad de  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{u}$  conocemos entonces también  $\nabla\sigma$ .

¿Dada una variedad  $M$ , existe en ella una derivada covariante? ¿Y si existe cuantas de ellas hay? ¿Como podemos caracterizar una única?

Todas estas preguntas tienen solución. La definición de variedad que hemos adoptado admite siempre una derivada covariante (también una métrica Riemanniana). Los siguientes teoremas contestan las otras dos:

**Teorema 2** *La diferencia entre dos derivadas covariantes es un tensor de tipo  $\binom{1}{2}$ .*

Esto nos indica que si tenemos una derivada covariante tenemos infinitas, tantas como tensores tipo  $\binom{1}{2}$ .

**Prueba:** Como ya vimos es suficiente saber como actúa la derivada covariante sobre un vector para saber como actúa sobre cualquier tensor (la condición C1 nos asegura que todas ellas cuando actúan sobre un elemento de  $\mathcal{T}$  lo hacen de la misma manera). Por lo tanto es suficiente ver que si  $\nabla$  y  $\bar{\nabla}$  son dos derivadas covariantes luego su diferencia, cuando actúan sobre un vector, es un tensor aplicado a dicho vector, es decir:

---

<sup>7</sup>En realidad como veremos más adelante podríamos pedir que su torsión o su curvatura fuesen cero, etc., pero estas condiciones serían demasiado restrictivas y solo se hacen (cuando se las necesitan) a posteriori de la definición.

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := (\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{u} \in \mathcal{T}^1 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathcal{T}^1$$

es  $\mathcal{T}$ -lineal en cada uno de sus argumentos.

La parte no trivial es ver que  $(\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}})(f\mathbf{u}) = f(\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{u}$ , o sea que  $C(\mathbf{x}, f\mathbf{u}) = fC(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Pero la condición C3 aplicada a  $f\mathbf{u}$  nos dice que

$$(\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}})(f\mathbf{u}) = f(\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{u} + \mathbf{u}(\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}})f,$$

mientras que condición C1 implica que el segundo término se anula y por lo tanto tenemos que la diferencia de las dos derivadas es  $\mathcal{T}$ -lineal.

Ejercicio: Vea que si la condición D2 del teorema siguiente se cumple para ambas derivadas luego  $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

**Teorema 3** *Dada una métrica en  $M$  existe una única derivada covariante tal que*

D1)  $\nabla g = 0$ , es decir conmuta con el isomorfismo que  $g$  induce entre  $\mathcal{T}^1$  y  $\mathcal{T}_1$ .

D2)  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y} - \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{x} - \nabla_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{T}^1$ , es decir la derivada covariante no tiene torsión.

No daremos aquí la prueba de este teorema ya que es estándar en todos los libros de texto. No es sorprendente que estas condiciones limiten el número de derivadas covariantes posibles ya que como vimos antes si sabemos como actúan estas en vectores sabemos también como lo hacen en covectores (y en todos los tensores), pero también vimos que  $g$  es un isomorfismo entre  $\mathcal{T}^1$  y  $\mathcal{T}_1$  y por lo tanto su conmutatividad con las derivadas covariantes es una severa restricción sobre estos: ¡Lo sorprendente es que al menos una exista!

## 5 El tensor de Riemann

Supongamos que tenemos una variedad  $(M, \mathcal{T})$  y en ella una dada derivada covariante  $\nabla$ . ¿Es posible, a partir de esta estructura, obtener algún tensor particular en la variedad? La pregunta es importante pues desde el punto de vista matemático tal tensor nos permitiría “catalogar” las derivadas covariantes y compararlas con otros tensores, y desde el punto de vista físico por medio de mediciones, es decir elementos de  $\mathcal{T}$ , solo tendríamos acceso a la derivada covariante a través de escalares construidos a partir de tal tensor. Por simplicidad supongamos que D2 se cumple, es decir la derivada covariante no tiene torsión.

Para ver que tal tensor existe definamos

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) := (\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}} - \nabla_{\mathbf{y}}\nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]})\mathbf{u}$$

Usando la regla de Leibnitz obtenemos:

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}} - \nabla_{\mathbf{y}}\nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]})f\mathbf{u} = f(\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}} - \nabla_{\mathbf{y}}\nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]})\mathbf{u}$$

y por lo tanto  $= R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, f\mathbf{u}) = fR(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ , o sea que el operador que hemos definido es también  $\mathcal{T}$ -lineal en el tercer argumento y por lo tanto es un tensor de tipo  $\binom{1}{3}$ : Si le damos tres vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  y un co-vector  $\sigma$  obtenemos un elemento de  $\mathcal{T}$ , la contracción  $\sigma(R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}))$ . Este tensor se denomina **tensor de Riemann**.

**Ejercicio:** Pruebe que en ausencia de torsión el tensor de Riemann satisface la **identidad de Bianchi**, es decir:  $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})R(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})R(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

De especial importancia en relatividad es el tensor de Ricci, un tensor de tipo  $\binom{0}{2}$  que se construye a partir del tensor de Riemann como sigue: fijemos dos vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , y consideremos el mapa,  $\mathcal{T}$ -lineal  $R(\mathbf{x}, \cdot, \mathbf{y}) : \mathcal{T}^1 \rightarrow \mathcal{T}^1$ . La traza de este mapa será pues un invariante, es decir un elemento de  $\mathcal{T}$  que solo depende del tensor de Riemann (evaluado en  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ). Es fácil ver que este campo escalar depende linealmente del tensor de Riemann y por lo tanto también de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Pero la traza de un mapa depende linealmente del mapa y por lo tanto, depende linealmente de los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , vemos entonces que dicha traza es un tensor de tipo  $\binom{0}{2}$  y se lo llama el **tensor de Ricci**.

## 6 La Concepción Einsteiniana del Espacio Tiempo.

Por concepción aquí entendemos el lenguaje básico que utilizaremos para hacer física, el conjunto de conceptos primordiales en el que los físicos nos basamos para formular nuestras teorías. Este lenguaje tiene dos partes, por un lado los entes matemáticos en los que se basarán todas las teorías físicas, por otro lado los puentes que relacionan estos entes con nuestros experimentos, es decir la interpretación de los datos experimentales en términos matemáticos. Es de fundamental importancia que este lenguaje sea por un lado amplio, para abarcar la descripción de un gran número de fenómenos, y por otro parco, pues si incluimos en él conceptos superfluos (es decir físicamente intangibles) estamos entonces expuestos al peligro de crear grandes construcciones físicamente irrelevantes que oculten los verdaderos objetos de interés.

En la concepción Einsteiniana del espacio-tiempo el concepto fundamental es el de **evento**. Este se define como *“un suceso que no tiene ni extensión espacial ni temporal”*. Es una idealización, por ejemplo, del chasquido de nuestros dedos, en el sentido que pensamos en hacerlo cada vez en menor tiempo y cada vez con dedos de menor tamaño, aunque no pensamos en describirlo como un *“punto en el espacio en un instante de tiempo”* pues la idea en esta concepción es precisamente no hacer tal distinción a priori entre espacio y tiempo.

El conjunto de todos los eventos posibles será el conjunto de puntos a partir del cual construiremos la **variedad con métrica Lorentziana llamada Espacio Tiempo**. Este conjunto es en principio algo increíblemente complicado; en el tenemos montones de puntos marcando todos los eventos de nuestra historia: muerte de Alejandro Magno, nacimiento de Cristo, de Mozart, etc., montones de puntos marcando eventos de nuestro futuro, puntos anteriores a nuestra existencia y posteriores a ella, y un conjunto inmenso de eventos posibles, todos aquellos en los que *“no pasó nada”*.

¿Que sabemos sobre este conjunto? Todas estas *“marcas”* sobre el espacio tiempo pueden ser en gran medida abstraídas de él y pensadas como subconjuntos de un gran espacio de funciones

suaves (infinitamente diferenciables) de este conjunto sobre los reales. Así, por ejemplo, el evento “*muerte de Alejandro Magno*” será, en esta concepción, una función con soporte coincidente con otra que marca “*Junio 13 de 324 AC, cerca del Eufrates*”. Una vez abstraídas todas esas marcas lo que nos queda es entonces una variedad suave con una topología y una estructura diferenciable impuesta por el conjunto de marcas que describen los procesos físicos. La dimensión de esta variedad es una consecuencia de las siguientes observaciones:

- “*Todo fenómeno físico elemental puede ser descrito localmente por funciones de cuatro argumentos.*” Es decir localmente existen cuatro funciones de  $\mathcal{T}$  tal que cualquier otra de ellas puede ser escrita como una función de estas cuatro.
- “*Para marcar un evento solo necesitamos cuatro números.*” Es decir si por ejemplo en una habitación queremos marcar un evento cualquiera lo podemos hacer dando cuatro números: su distancia a dos paredes no paralelas, su altura del piso y el tiempo en que sucedió.

## 6.1 Representando procesos físicos elementales en el Espacio Tiempo

Hasta el momento hemos logrado precisar parte de los entes matemáticos que intervienen en la descripción de los fenómenos físicos, a saber una variedad suave cuatri-dimensional que lleva adosada (como parte de su definición) un álgebra de funciones declaradas suaves.

Queremos ver ahora que otros objetos o entes matemáticos también están presentes en todo proceso físico, es decir son comunes a la concepción del espacio-tiempo. Para ver esto describiremos algunos experimentos y extraeremos de ellos tales objetos.

Ya vimos como representar eventos en el espacio-tiempo, son simplemente sus puntos. ¿Como representaríamos, por ejemplo, la trayectoria de una partícula? Imaginemos que la partícula está en la cercanía nuestra y que chasqueamos los dedos a su lado, tendremos así una sucesión de puntos en la variedad, si chasqueamos nuestros dedos cada vez más rápidamente tal sucesión nos dará, en el límite, una línea. Es decir la trayectoria de una partícula, la historia de su vida, estará representada en la variedad por una línea. Por convención en los gráficos que haremos el futuro estará hacia arriba, o sea que en este caso dibujaremos una línea de abajo hacia arriba. [Ver figura 1.]

Siguiendo el mismo razonamiento podemos representar la colisión de dos partículas: cada una tendrá su trayectoria y éstas tendrán un evento en común, el evento colisión. [Ver figura 2.]

Tomemos ahora una linterna y alumbremos por un instante de tiempo en alguna dirección fija. La luz describirá entonces en el espacio-tiempo alguna trayectoria. Si repetimos este experimento varias veces y simultáneamente en el sentido que la luz será siempre emitida en el mismo evento  $e$  y en la misma dirección, pero con linternas de distinta marca, con luces de distinto color, con linternas describiendo distintas trayectorias (pero con el evento emisión de luz en común), y con todas las variaciones que se nos ocurran, encontraremos algo remarcable: la trayectoria de la luz es siempre la misma! [Ver figura 3.] En otras palabras el espacio-tiempo ya tiene en él rutas especiales para la luz, es decir la luz tiene algún pacto especial con el espacio-tiempo y nosotros no podemos hacer nada para modificarlo. Este experimento es el que marca la diferencia entre la concepción

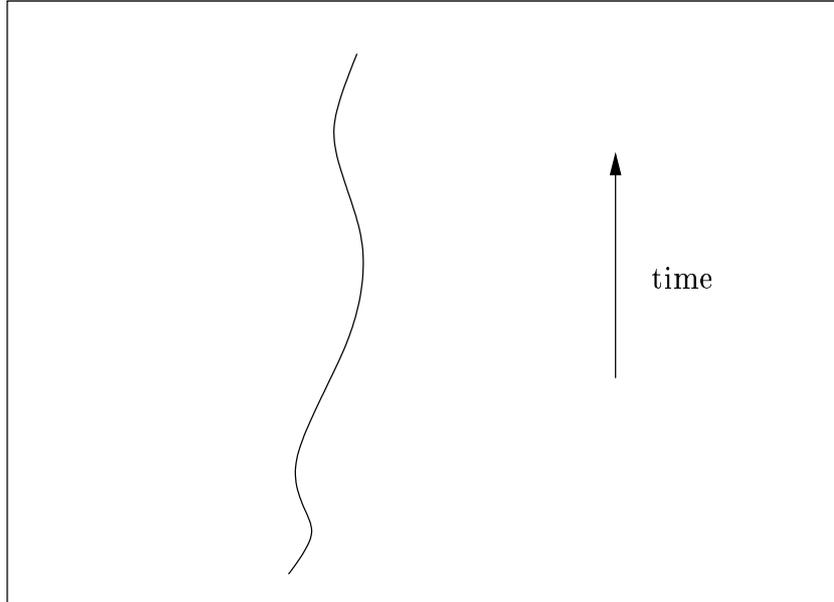


Figura 1: Trayectoria de una partícula

Einsteiniana del espacio-tiempo y la anterior, la Galileana. Es el que llevó a una contradicción a la concepción Galileana, el que forzó en nosotros el nuevo punto de vista Einsteiniano. Si repetimos el experimento anterior dirigiendo el haz de la linterna en todas las direcciones posibles tendremos un “cono” en el espacio de eventos con vértice en el evento emisión, que llamaremos el **cono de luz**<sup>8</sup> del punto  $e$ . [Ver figura 4.]

Ahora bien, cada trayectoria que pasa por un punto define una dirección<sup>9</sup>, es decir una clase equivalente de vectores en  $T_e$  con la relación de equivalencia:  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  si  $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ . Considerando ahora todas las direcciones de emisión posible tenemos un cono en  $T_e$ . [Ver figura 5.]

Como el punto de emisión era arbitrario tenemos uno de estos conos en el espacio tangente a cada punto del espacio-tiempo. Pero hemos llegado así a una estructura similar a la que nos proporcionaba una métrica Lorentziana<sup>10</sup>. En efecto, este cono de direcciones nulas en el espacio tangente a cada punto del espacio-tiempo nos permite construir casi completamente una métrica Lorentziana en el siguiente sentido: Dada una distribución suave de conos en un espacio tiempo

<sup>8</sup>Note que este no es un cono en el sentido matemático definido anteriormente. En relatividad por “cono de luz” nos referimos a la frontera de un cono.

<sup>9</sup>Una trayectoria es la imagen de una curva en la variedad, claramente distintas curvas pueden dar una misma trayectoria y por lo tanto distintos vectores tangentes en dicho punto, sin embargo la diferencia entre estas curvas es una cuestión de reparametrización y por lo tanto sus vectores tangentes solo difieren en magnitud, teniendo una misma dirección en común.

<sup>10</sup>El interior del cono consiste en dos conjuntos desconectados: los vectores temporales dirigidos hacia el futuro y los dirigidos hacia el pasado.

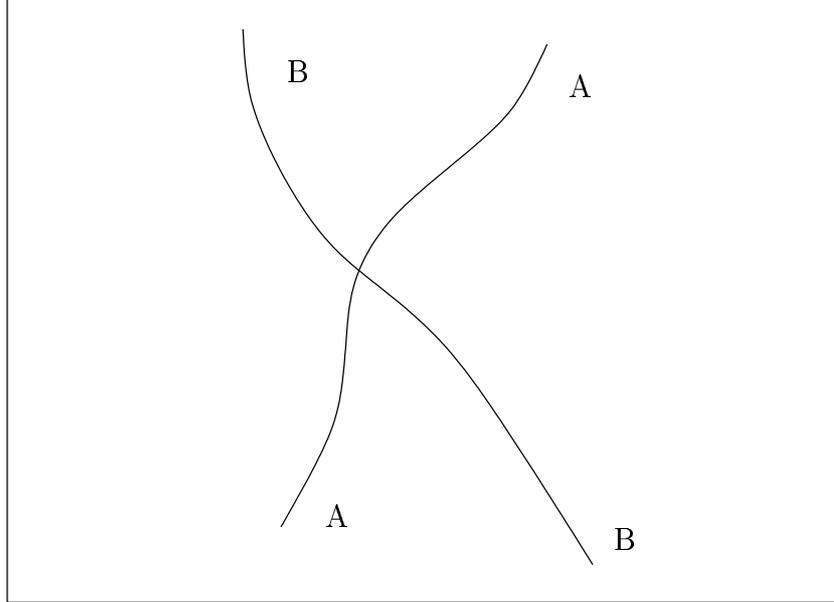


Figura 2: Colisión de dos partículas

existe una única métrica Lorentziana –módulo una transformación conforme<sup>11</sup> tal que la frontera de los conos definidos por esta coinciden con los conos de luz. Para ver esto sea  $p$  un punto cualquiera de la variedad de eventos, sea  $g$  la restricción de una métrica Lorentziana a  $p$  con el mismo cono en  $T_p$  que el cono de direcciones nulas determinado por nuestro experimento y sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos vectores cualquiera en  $T_p$  pero tales que el primero esté en el interior del cono y el otro en el exterior. Consideremos sus combinaciones lineales  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ . Como hemos supuesto que uno de estos vectores está dentro del cono y el otro fuera habrá dos valores de  $\alpha$  tal que el vector  $\mathbf{w}$  estará en el cono nulo. Por linealidad y simetría de  $g$  tenemos que:

$$g(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\alpha g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha^2 g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0,$$

y por lo tanto si conocemos el producto de las raíces de esta ecuación conocemos el cociente de las normas de estos vectores:

$$\alpha_+ \alpha_- = \frac{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

Concluimos así que el cociente entre las normas de vectores temporales y espaciales está determinado completamente por el cono de direcciones nulas en dicho punto. Pero entonces también podemos determinar el cociente del *ángulo* entre dos vectores cualesquiera y la norma de un vector no-nulo cualquiera:

---

<sup>11</sup>Se dice que una métrica  $g$  es equivalente a otra  $\tilde{g}$  por una transformación conforme si existe un campo escalar (elemento de  $\mathcal{T}$ )  $\Omega$  que no se anula en ningún punto y tal que  $g = \Omega^2 \tilde{g}$ .

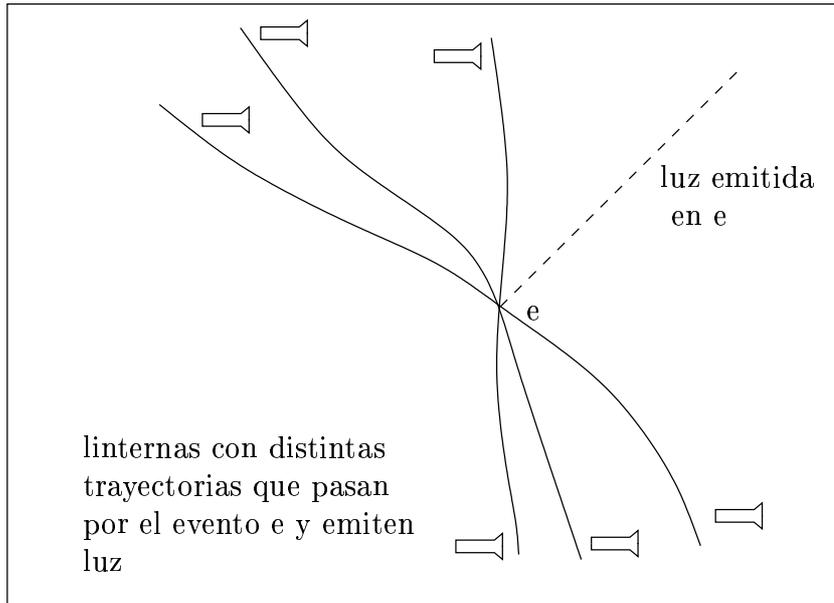


Figura 3: Experimento con distintas linternas

$$\frac{g(\mathbf{w}, \mathbf{z})}{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \frac{1}{2} \left( \frac{g(\mathbf{w}, \mathbf{w})}{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \frac{g(\mathbf{z}, \mathbf{z})}{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})} - \frac{g(\mathbf{w} + \mathbf{z}, \mathbf{w} + \mathbf{z})}{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \right).$$

Es decir podemos determinar todas las propiedades conformes de la métrica  $g$  a partir del conocimiento del cono de direcciones nulas, como el punto  $p$  es arbitrario vemos que nuestro procedimiento es extensivo a toda la variedad y concluimos entonces que la variedad viene naturalmente equipada con una clase equivalente de métricas Lorentzianas conformes.

Veremos ahora otro experimento que nos dice que en realidad podemos determinar una única métrica de esta clase conforme: Supongamos que tenemos un observador con un reloj, este describirá una trayectoria cuya dirección en cada punto está dentro del cono de direcciones nulas, es decir es una dirección temporal futura.<sup>12</sup> Ahora bien, la historia de dicho observador estará descrita por una curva de los reales en el espacio-tiempo tal que su imagen es la trayectoria mencionada. Dos historias diferirán entre si solo por su parametrización, dándonos distintos vectores tangentes.

Si el parámetro con que describimos una historia coincide con el tiempo propio del observador, es decir el de su reloj pulsera, entonces en ese punto tomaremos de la clase equivalente de métricas aquella en la cual el vector tangente a dicha historia tenga norma -1.

Esta asignación parece depender fuertemente del observador en particular, pero en realidad no es así. Se puede probar, experimentalmente, que si enviamos otros observadores a pasar por el

<sup>12</sup>La creencia de que la velocidad de los procesos físicos es siempre menor o igual a la velocidad de la luz está firmemente arraigada en los físicos a tal punto que constituye uno de los postulados básicos de la relatividad general. Si bien no hay ninguna observación que la contradiga es por otro lado perfectamente factible (matemáticamente hablando) tener teorías donde este postulado se viola.

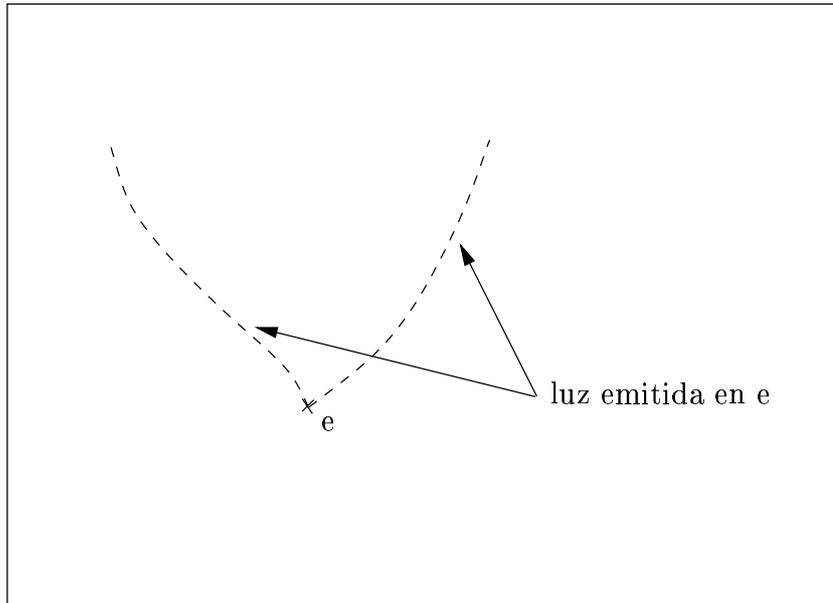


Figura 4: El cono de luz del evento  $e$

mismo evento, todos con relojes pulsera de la misma marca, pero a lo largo de cualquier trayectoria que les plazca, los representantes en la clase conforme de métricas que cada uno de ellos encontrará coincidirán todos entre sí.

Tenemos hasta ahora en nuestra concepción del espacio-tiempo una variedad con el álgebra de funciones  $\mathcal{T}$  y todos los tensores sobre esta álgebra,  $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1^1, \dots$ . Entre ellos tenemos uno particular, una métrica Lorentziana que nos indica el camino a seguir por los rayos de luz y también como parametrizar unívocamente historias, es decir como cronometrar eventos consecutivos. Los otros tipos de tensores también tienen importancia en la descripción de la naturaleza, representan los campos de materia y sus interacciones, es decir comprenden el resto de los objetos necesarios para la descripción de los fenómenos físicos.

Con la estructura ya introducida podemos describir todos los fenómenos físicos clásicos conocidos. Pero resta todavía un paso en nuestra concepción del espacio-tiempo, y esta es necesaria pues no hemos sido lo suficiente parcios en nuestro lenguaje y este adolece de muchos *sinónimos*. En efecto, como ya dejamos entrever en el caso de la muerte de Alejandro Magno, lo importante no es marcar un punto de la variedad de eventos sino el hecho de que hay una superposición, una co-relación, entre la función marcando aproximadamente el evento "*muerte de Alejandro Magno*" y la función marcando el evento "*Junio 13 de 324 AC, cerca del Eufrates*". Los eventos no son lo importante en nuestra descripción de los fenómenos, solo son importantes las relaciones entre diversos campos y los números (es decir mediciones) que obtengamos de estas <sup>13</sup>. ¿Como reducir entonces nuestro lenguaje, o al menos, como explicitar todos estos *sinónimos* de forma tal que no nos creen confusión? La solución a este problema es simple, debemos explicitar que

<sup>13</sup>El problema similar para el espacio, en la concepción Galileana del espacio tiempo, fué ya percibido por Descartes.

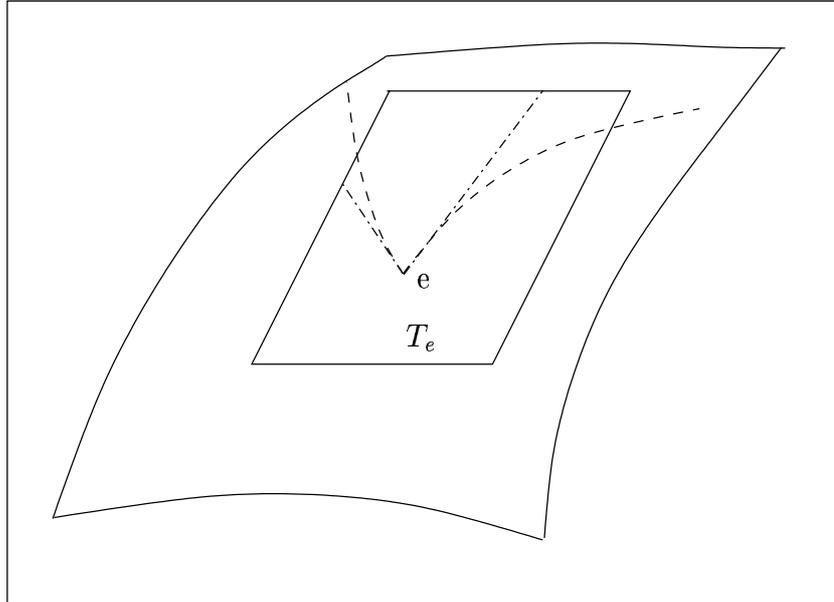


Figura 5: El cono de direcciones nulas en  $T_e$

queremos decir con que *dos espacio-tiempo son físicamente equivalentes* y tomar el conjunto de clases equivalentes con respecto a dicha relación. Tal conjunto será lo que en definitiva llamaremos nuestra concepción del mundo físico, nuestra concepción del espacio-tiempo. Explicitamos ahora esa relación de equivalencia o semejanza: Dados dos variedades,  $(M_1, \mathcal{T}_1)$  y  $(M_2, \mathcal{T}_2)$  representando el conjunto de todos los eventos, con sus respectivas métricas (y demás campos usados en la descripción de los fenómenos físicos) diremos que estas son equivalentes si existe un mapa diferenciable e invertible (con inversa también diferenciable) tal que este mapa, al llevar la métrica y todos los otros tensores mencionados de la primera a la segunda, estos coincidan. Se puede ver que esta es una relación de equivalencia y que si preparamos experimentos en cada una de estas variedades siguiendo en cada caso la mismas reglas, entonces el resultado de estos serán idénticos, es decir no hay experimento físico que nos seleccione uno de estos espacio-tiempos.

Esto completa nuestra discusión de la concepción Einsteiniana del espacio-tiempo en lo que hace a la descripción de los fenómenos físicos excepto los gravitatorios y los cuánticos.

## 7 Los fenómenos gravitatorios

En la concepción Galileana del espacio-tiempo la gravedad estaba descrita por un campo escalar, el potencial Newtoniano. Apenas Einstein formuló su concepción se dió cuenta de que en ella no había lugar para la teoría Newtoniana de la gravitación. En efecto esta teoría usaba superficies de simultaneidad (igual tiempo) para calcular la distancia, y así la fuerza gravitatoria, entre cuerpos, pero este concepto no está dentro de los objetos invariantes de la concepción Einsteiniana del espacio-tiempo, no tiene realidad física y por lo tanto mal podría formar parte de una teoría

que pretendiese describir un fenómeno físico. El camino obvio para solucionar este problema era incorporar otro campo, escalar o vectorial, en el espacio-tiempo satisfaciendo esta vez ecuaciones consistentes con la nueva concepción, y luego ver si tal propuesta era verificada experimentalmente. Se vio que no era así y fué el genio de Einstein una vez más quien encontró la salida:

*La métrica era el campo responsable de los fenómenos gravitatorios.*

Para que eso fuese posible propuso que la métrica era un campo dinámico, que interactuaba con los demás campos; aquellos describiendo la materia. Esta no era un campo absoluto en el espacio-tiempo (como hemos supuesto hasta ahora), es decir que estaba dado de una vez por todas en el espacio-tiempo, sino que ésta dependía de los valores que los otros campos tomaban sobre la variedad, que interactuaba con ellos. Propuso que esta dependencia estaba dada por ciertas ecuaciones que relacionaban la curvatura asociada con la métrica<sup>14</sup>, más específicamente el tensor de Ricci, con ciertas derivadas de los campos de materia. Estas ecuaciones si describieron correctamente los fenómenos gravitatorios, es más lo hicieron con tanta precisión que explicaron algunos que la teoría anterior no podía.

¿Cual fué la observación que llevó a Einstein a tal solución? El observó que si queremos decir que el borde de un objeto es recto lo que en definitiva hacemos es “*mirar a lo largo de el y ver si este se reduce a un punto*”, es decir vemos si lo podemos comparar con la trayectoria de un haz de luz. Pero entonces nuestro concepto de línea recta se basa en las curvas que la luz describe, en otras palabras lo que ya hemos visto; que la métrica del espacio tiempo y por lo tanto su curvatura dependen en gran medida de las trayectorias de los haces de luz.

También tuvo presente la observación de otro genio, Galileo, quien descubrió que las trayectorias de los cuerpos bajo la acción de la gravedad eran independientes de su masas. Esto le llevó a concluir que las trayectorias de la luz (considerada como partículas sin masa) también se verían afectadas por la presencia de cuerpos gravitantes, y por ende que la presencia de estos cuerpos también afectaría la curvatura del espacio-tiempo. De esta forma cerró el círculo, ahora podía explicar todos los fenómenos físicos con un solo lenguaje, el de campos tensoriales en una variedad. La métrica dejó de tener un estatus especial, dejó de ser absoluta y pasó a depender, a interactuar, con los demás campos en un pie de igualdad.

En lo que sigue estudiaremos esta interacción, pero no solo con otros campos de materia sino también consigo misma, ya que esta interacción es no lineal. Veremos como se entienden sus ecuaciones, como clasificar las posibles soluciones y que fenómenos nuevos esta teoría predice.

## **8 Las ecuaciones de Einstein desde el punto de vista de la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales**

Consideremos por simplicidad las ecuaciones de Einstein en vacío, es decir cuando no hay materia presente. Dichas ecuaciones nos dicen simplemente que en este caso el espacio-tiempo debe tener una métrica tal que su tensor de Ricci es cero.

---

<sup>14</sup>Es decir aquella definida a partir de la derivada covariante que aniquila la métrica.

¿Cuántas soluciones existen? Es decir, ¿cuántos espacio-tiempo son posibles? ¿Como podemos caracterizar el espacio de soluciones? ¿Que propiedades tienen?

Estas preguntas conforman lo que a mi juicio es la parte más profunda de la teoría y solo han podido ser contestadas parcialmente y luego de muchísimo trabajo. Resta todavía muchísimo por hacer. He aquí algunos resultados:

- **Problema de Cauchy.** Dada una variedad 3-dimensional,  $S$ , con una métrica Riemanniana,  $h$ , y un tensor simétrico,  $k$ , satisfaciendo ciertas ecuaciones diferenciales (elípticas) entre si, existe un espacio-tiempo,  $(M, \mathcal{T}, g)$ , y un mapa  $\Phi : S \rightarrow M$  tal que:
  - i)  $\Phi[S]$  es una hiper-superficie espacial<sup>15</sup> de  $M$ ;
  - ii) La métrica inducida por  $g$  en  $S$  (vía el mapa  $\Phi$ ) coincide con  $h$  y el tensor inducido en  $S$  a partir de la segunda forma fundamental de  $\Phi[S]$  coincide con  $k$ ;
  - iii)  $(M, \mathcal{T}, g)$  es único módulo difeomorfismos y extensiones<sup>16</sup>.
 Alternativamente todo espacio-tiempo satisfaciendo las ecuaciones de Einstein es tal que la métrica y la segunda forma fundamental inducidas en cualquier hiper-superficie espacial satisfacen las ecuaciones diferenciales elípticas arriba mencionadas.
- **Estabilidad de Minkowski<sup>17</sup>.** Si  $S = \mathbb{R}^3$  y si  $h$  y  $k$  son suficientemente pequeños y decaen suficientemente rápido asintóticamente, entonces existe un espacio-tiempo  $(M, \mathcal{T}, g)$  que no admite extensión y no tiene singularidades.
- **Teorema de Singularidades.** Existen condiciones (bastante generales) sobre  $(S, h, k)$  tales que si estas se cumplen luego la solución desarrollará singularidades en un tiempo finito<sup>18</sup>.
- **Positividad de la masa.** Si  $h$  y  $k$  satisfacen las ecuaciones diferenciales (elípticas) mencionadas en el primer punto y decaen suficientemente rápido asintóticamente, luego la solución que estas generan ejerce sobre observadores lejanos una fuerza de atracción idéntica a la que ejercería un cuerpo material cualquiera con densidad de masa positiva. Es decir el campo gravitacional *es atractivo*.

Todos los puntos anteriores tiene su generalización cuando hay materia presente si se supone que esta satisface ciertas condiciones, todas ellas físicamente razonables y compatibles con nuestras observaciones de la materia que nos circunda.

El primer resultado nos dice como clasificar las soluciones: hay tantas como conjuntos  $(S, g, k)$  satisfaciendo las ecuaciones elípticas, llamadas de vínculo, arriba mencionadas. Lamentablemente

<sup>15</sup>Es decir cuyos vectores tangentes en todo punto están fuera del cono de direcciones nulas.

<sup>16</sup>Bastante más se puede decir sobre este punto pero para ello tendríamos que introducir conceptos extra.

<sup>17</sup>Minkowski es el espacio-tiempo con variedad  $\mathbb{R}^4$  y métrica Lorentziana plana. Las condiciones que se piden más abajo implican que en ciertas normas (de Sobolev) los espacio-tiempo soluciones estarán cerca de él.

<sup>18</sup>El tiempo propio de algún observador.

todavía no tenemos un control total sobre estos conjuntos, aunque si sabemos como generar muchos de sus elementos a partir de algunas partes de  $g$  y  $k$  que pueden ser dadas libremente para luego resolver para las demás. Al respecto también contamos con el cuarto resultado que es muy general y de carácter global.

El segundo resultado nos dice que si perturbamos (en forma pequeña pero finita) a Minkowski lo que obtenemos es un espacio-tiempo bastante parecido a este: no se forman singularidades ni se arruina el comportamiento asintótico de los campos. Es de destacar que no conocemos ninguna solución exacta cercana a Minkowski, excepto Minkowski mismo!

El tercer resultado es muy importante, nos dice que (debido a la no-linealidad de las ecuaciones de Einstein) existen datos iniciales, muchos de ellos –no se trata de casos muy especiales cuyas probabilidades de realización fuesen bajas–, que eventualmente en su desarrollo generarán singularidades. Es decir generarán espacio-tiempo inextensibles pero incompletos, donde algunos observadores cesarán abruptamente su existencia en un tiempo finito (y acotado a partir de los datos iniciales). Más allá de estos puntos no sabemos como hacer física, estos espacio-tiempo para todo fin práctico *terminan* en tiempo finito. En la próxima sección veremos algunos ejemplos.

## 9 Algunas soluciones particulares

### 9.1 Agujeros Negros / El espacio-tiempo de Schwarzschild

En enero de 1916, es decir solo pocos meses después de que aparecieran las ecuaciones de Einstein, y mientras peleaba en el frente Ruso de la primera guerra mundial, Karl Schwarzschild encontró la única familia monoparamétrica de métricas que describe un espacio-tiempo vacío, estático y esféricamente simétrico. No entraremos en los detalles de tal métrica y solo la analizaremos a partir del siguiente diagrama: [Ver figura 6.]

Este tipo de diagrama se llama conforme. Cada punto de este diagrama representa una esfera, las trayectorias radiales de luz están representadas por líneas a  $45^\circ$ . Las líneas *nulas* o lumínicas denotadas por  $\mathcal{J}^\pm$  representan los puntos en el infinito *a lo largo de direcciones nulas o rayos de luz*, es decir los puntos al infinito hacia donde tienden los rayos de luz. Note que estos puntos no forman un solo punto como en el caso del punto al infinito de una variedad Riemanniana sino que forman una hiper-superficie con topología  $\mathbb{R} \times S^2$ . El supra-índice positivo (negativo) indica el infinito futuro (pasado). Estas superficies se juntan en una esfera que es en realidad un punto, denotado por  $I^0$ , el punto al infinito en direcciones espaciales. Nótese que hay dos regiones asintóticas, I y II, a la derecha e izquierda del diagrama respectivamente, desde cada una de ellas vemos a la parte central como una región que nos atrae gravitatoriamente y mirando en toda otra dirección vemos una región indistinguible a la región exterior a un cuerpo celeste (pensándolo a este en la región central), vemos un espacio-tiempo ordinario. Tenemos así nuestra primer sorpresa este espacio tiempo contiene dos universos! Si es cierto que no podemos comunicarnos más rápido que la velocidad de la luz entonces estos están incomunicados entre si y para todo fin práctico podemos olvidarnos de uno de ellos<sup>19</sup>. Lo mismo podemos hacer de la región en el pasado, IV (ya que no

<sup>19</sup>Hay situaciones físicas donde un cuerpo celeste colapsa y forma espacio-tiempo similar a éste pero con un solo “lado”.

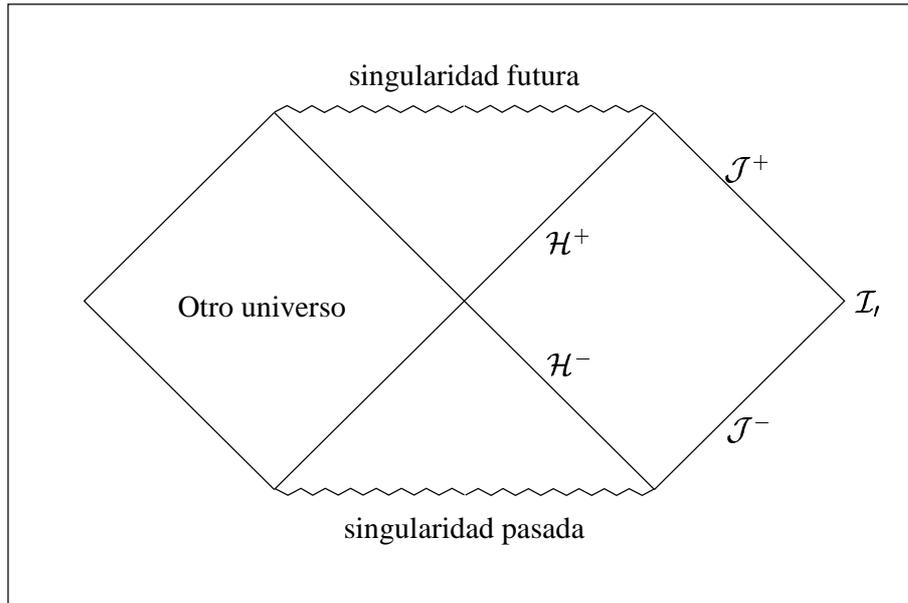


Figura 6: Diagrama conforme de la solución de Schwarzschild

podemos ir hacia ella desde ninguno de los universos). Nos podemos quedar así con las regiones I y III. Allí tenemos nuestra segunda sorpresa: Si un observador entra en la región III no puede salir de ella en el sentido de que no puede volver a la región asintótica I, (estamos suponiendo que este se mueve con velocidades menores que la de la luz), éste caerá inevitablemente en la línea oscilante superior, la cual representa una singularidad del espacio-tiempo. Tal desafortunado observador tendrá una vida corta y una muerte cruel, al ser comprimido más y más a medida que se acerque a la singularidad, pero nadie que permanezca por siempre en la región I lo podrá afirmar, ya que ninguna señal que el observador desafortunado emita le podrá llegar. La superficie  $H^+$  hace de membrana diodo, las señales solo la pueden pasar en una dirección.

¿Existen en la naturaleza tales espacio-tiempo? No lo sabemos, pero si un cuerpo perfectamente esféricamente simétrico colapsase crearía un espacio-tiempo bastante similar a una porción de I  $\cup$  III, como la indicada en la figura 7.

Si el cuerpo es solo aproximadamente esféricamente simétrico entonces no sabemos como serán las propiedades de la solución, lo que si esperamos es que la siguiente propiedad sobreviva:

*El espacio-tiempo tendrá una región asintótica con un infinito futuro y una superficie  $H^+$  con topología  $\mathbb{R} \times S^2$  y reglada por trayectorias nulas tal que ninguna trayectoria temporal o nula con dirección futura que se inicie en su interior podrá alcanzar la región asintótica.*

Los espacio-tiempo con esa propiedad reciben el nombre de **agujeros negros**

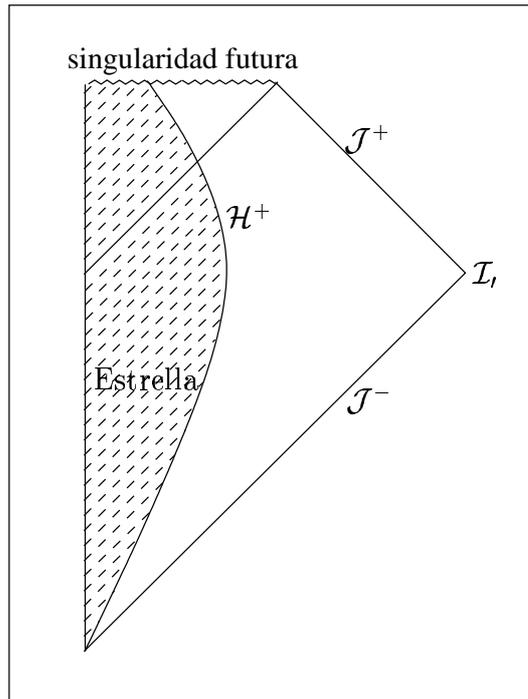


Figura 7: Colapso gravitatorio de una estrella

## 9.2 Modelos Cosmológicos

Pongamos una hormiga sobre la superficie de un globo y lo inflamos lentamente. Si ésta es una buena observadora (y además pretenciosa) luego de pasearse por el globo llegará a dos conclusiones:

- **El universo** (la superficie del globo) es **isotrópico**<sup>20</sup>. Es decir en la dirección que mire siempre verá lo mismo: plástico color rosa y con una misma tensión.
- **El universo se expande**. Al inflarse el globo todos los puntos de su superficie se alejan unos de otros, los más lejanos parecen tener una velocidad relativa (con respecto a nosotros) mayor.

Note que esta segunda observación no es contraria a la primera: desde cualquier punto desde donde miremos veremos lo mismo, todos los demás puntos se alejarán de este con velocidad creciente conforme a la distancia que nos separa de ellos.

Lo interesante de todo esto es que nuestros astrónomos observan lo mismo: donde miren ven una distribución más o menos homogénea de galaxias y todas ellas se alejan de nosotros, las más lejanas más rápido que las más cercanas. Sin moverse de la tierra los astrónomos llegan a las mismas conclusiones sobre nuestro universo que la hormiga sobre su globo, (son aún más pretenciosos que ella).

<sup>20</sup>Es también inteligente y sabe que isotropía implica homogeneidad

Ahora bien, es fácil en imaginar al globo ( $S^2$ ) inflándose en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Pero como imaginar la expansión del espacio como un todo? Por suerte tenemos una dimensión más en el espacio-tiempo que nos permite lograr tal imagen.

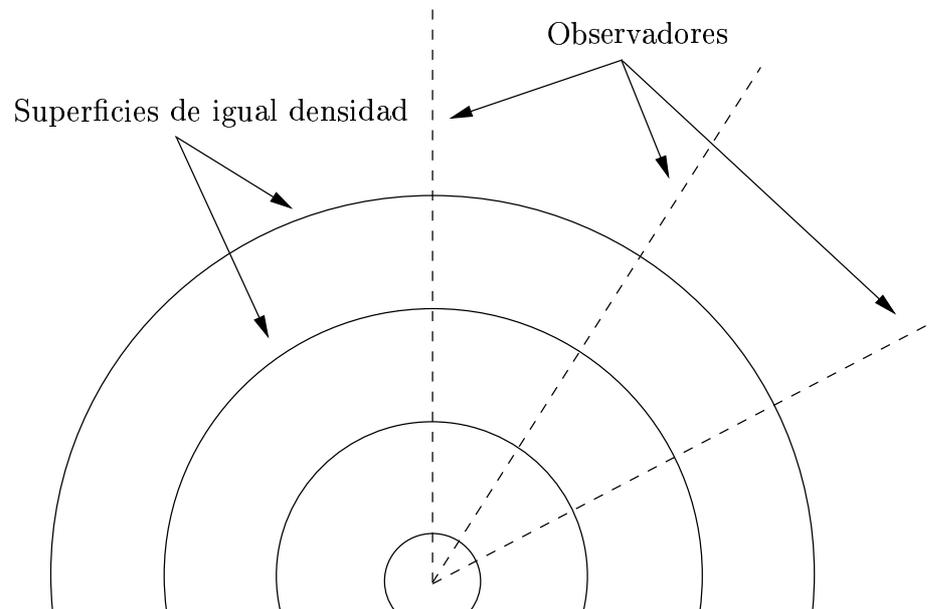


Figura 8: Globo/Modelo Cosmológico

El siguiente gráfico muestra un espacio-tiempo en expansión (éste no es un diagrama conforme). Las superficies de homogeneidad son superficies espaciales, las líneas radiales muestran galaxias que están en reposo con respecto a estas superficies pero sin embargo parecen moverse cuando se las mira desde otra galaxia, las más lejanas más rápido. Nótese que aunque éstas no se muevan con respecto a las superficies de homogeneidad (en el globo la superficie de este en cada instante de inflado –con tensión constante–) la densidad de las mismas va decreciendo con el tiempo. ¡Podemos imaginar nuestro universo a partir del concepto de espacio-tiempo! Pero más interesante aún: ¡A partir de las ecuaciones de Einstein podemos describir la expansión del universo basándonos en el conocimiento de la densidad de materia que hoy observamos!