UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

III SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

Rosario, 11 al 15 de octubre - 1988

17

Rosario - República Argentina
-1989-

DIFUSION DE UN SOLVENTE EN UN POLIMERO NO HOMOGENEO.

Cristina V. Turner

1. INTRODUCCION.

El transporte de solventes a través de polimeros vidriosos amorfos puede presentar diversos comportamientos.

El hecho más interesante de este fenómeno se observa cuando la actividad del penetrante (solvente) excede un cierto umbral, el cual para un dado par solvente-polimero depende esencialmente de la temperatura.

La penetración ocurre en forma masiva y el proceso tiene las siguientes caracteristicas :

a) Una marcada discontinuidad morfológica aparece en el polimero, separando una región vidriosa, donde la concentración de solvente es muy pequeña, de una región gomosa (gel) con una alta concentración de solvente.

b) Esta discontinuidad se mueve a través del polimero con una velocidad que es aproximadamente constante respecto al tiempo durante la primera etapa de la penetración.

c) La cantidad de solvente absorvido es inicialmente lineal respecto al tiempo.

Los ingenieros quimicos denominan a este tipo de comportamiento, caso de transporte II. Un modelo matemático para este caso de transporte II fue propuesto por G. Astarita y G.C. Sarti en 1978 [2] . Este modelo difiere de los anteriores debido a la presencia de una frontera libre.

La descripción de este modelo para el caso unidimensional es la siguiente: Una barra semi-infinita de polimero, inicialmente en la fase vidriosa, ocupa el semiespacio $x > 0$. Por el momento se supone que el polimero no se hincha con el solvente y se considera que $x = 0$ es la cara fija del material. En esta cara se impone una condición de contorno para la concentración de solvente C, para todo $t > 0$.

Si $C(0,t)$ excede el umbral C^* en una cantidad finita, se observará el caso de transporte II.

La hipótesis fundamental de este modelo es que la transición morfológica tiene lugar sobre la frontera libre $x = s(t)$, la cual a priori es desconocida. El gel ocupa la región $0 < x < s(t)$, donde el solvente difunde de acuerdo con la ley de Fick :

(1.1) $\quad DC_{xx} = C_t \;,\; 0 < x < s(t) \;,\; t > 0$.

En la región vidriosa, $x > s(t)$, la concentración del solvente se considera nula, por lo tanto el problema a resolver es un problema de frontera libre a una fase.

Resta imponer dos condiciones sobre la frontera libre, la primera es la conservación de la masa:

(1.2) $\quad - D\, C_x(s(t),t) = C(s(t),t)\, \dot{s}(t) \quad , t > 0$.

En cuanto a la segunda condición , asumir que la concentración sea continua sobre la frontera libre, i.e. $C(s(t),t) = 0$ sería inconsistente con el resto del esquema, por otro lado imponer la condición que la concentración $C(s(t),t)$ sea igual al valor umbral C^* lleva a un problema de tipo Stefan, contrariando el comportamiento de la frontera libre descripto en b).

Entonces la ley propuesta para la penetración dinámica es :

(1.3) $\quad \dot{s}(t) = k\,(C(s(t),t) - C^*)^m$,

donde k y m son constantes positivas. Esta ley empírica concuerda con el hecho de que la velocidad de penetración aumenta con el aumento del exceso de concentración.

Se puede ver que la solución de la frontera libre con la condición (1.2) y el dato inicial :

$s(0) = 0$

satisfacen las hipótesis b) y c).

En lo que sigue se describe la teoría desarrollada en [4] para el modelo recién descripto.

La concentración de solvente en la frontera $x = 0$ se considera constante y que excede el umbral de concentración.

Usando variables adimensionalizadas el problema a resolver es el siguiente :

Problema P

Encontrar (s,C) tal que $s \in C^1[0,T]$ para algún $T > 0$, $C \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$,
$D_T = \left\{ (x,t) \,/\, 0 < x < s(t) \,,\, 0 < t < T \right\}$, C continua hasta $x = s(t)$ y tal que :

(2.1) $\quad C_{xx} - C_t = 0$ en D_T ,

(2.2) $\quad s(0) = 0$,

(2.3) $\qquad C(0,t) = 1 \quad , \; 0 < t < T ,$

(2.4) $\qquad \dot{s}(t) = f(C(s(t),t)) \, , \; 0 < t < T \; ,$

(2.5) $\qquad C_x(s(t),t) = - \dot{s}(t) \, (\, C(s(t),t) + q \,) \quad , \; 0 < t < T \, .$

$C(x,t)$ representa el exceso (normalizado) de concentración y q es una constante positiva relativa al umbral de concentración.

La condición (2.4) es una generalización de la condición (1.3) y la función f satisface las siguientes hipótesis :

$f \in C^2(0,1] \cap C[0,1] \, , \, f'(C) > 0 \, , \, C \in (0,1] \, , \, f(0) = 0 \, .$

Los principales resultados obtenidos en [4] son:

Teorema 1.

El problema (P) admite solución única global ($T = + \infty$) con $s \in C^2[0,\infty)$, $\dddot{s}$ es Hölder continua para $t > 0$ y $\ddot{s}(t) < 0$ para $t > 0$.

Teorema 2.

$\lim_{t \to \infty} s(t) = +\infty$, $\lim_{t \to \infty} \dot{s}(t) = 0$. Más aún, si $q > 0$, luego

$s(t) \leq \sqrt{\frac{2t}{q}}$, si $t \to \infty$.

Si $q \geq 0$, entonces $s(t) > \sqrt{\frac{2}{q + \frac{1}{3}}} \, \sqrt{t} \, (\, 1 - \epsilon^2(t) \,)$ donde $\lim_{t \to \infty} \epsilon^2(t) = 0$.

Se pueden obtener algunos resultados más sobre el mismo modelo, si se imponen otras condiciones de contorno sobre la frontera exterior :([1], [3], [6], [10]) .

Observación:

El proceso de penetración de solvente en polímeros es esencialmente isotérmico y mucho más lento que el de conducción de calor. Sin embargo, en muchas aplicaciones se puede presentar un gradiente de temperatura en el polímero que dependa del tiempo; ya que la temperatura afecta al umbral de concentración C^* ,se puede tener en cuenta una distribución de temperatura ,generalizando la ley de penetración (2.4), i.e. haciendo depender a la función f del espacio y del tiempo.

En este capítulo el interés radica en el caso de una barra no-homogenea de polímero cuyas propiedades mecánicas dependen de una variable espacial, en este caso la ley de penetración es generalizada a $v = f(c,x)$, donde x representa a la variable espacial (ver [9]). Llamando $c(x,t)$ a la concentración de solvente normalizada y $x = s(t)$ a la ubicación del frente en la barra (luego $0 \leq x < s(t)$ es la región penetrada en el tiempo t), el problema matemático que resulta puede ser enunciado como sigue :

Problema P

Encontrar un triplete (T,s,c) tal que $T > 0$, $s \in C^1[0,T]$, $c \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$, donde $D_T = \left\{ (x,t) \,/\, 0 < x < s(t) \,,\, 0 < t < T \right\}$ y que satisfaga :

(1.1) $c_{xx} - c_t = 0$ en D_T ,

(1.2) $s(0) = 0$,

(1.3) $c(0,t) = c_0 \quad , \; 0 < t < T$,

(1.4) $\dot{s}(t) = f(c(s(t),t),s(t)) \,,\; 0 < t < T$,

(1.5) $c_x(s(t),t) = -\,\dot{s}(t)\, c(s(t),t) \quad , \; 0 < t < T$.

La función f satisface las siguientes hipótesis :

Fi) $f \in C(\Re^2)$,

Fii) Existe una función continua no negativa $C^*(x)$ tal que $f(c,x) > 0$ en $E = \left\{ (c,x) \,/\, c > c^*(x) \,,\, x \geq 0 \right\}$ y $f(c^*(x),x) = 0$,

Fiii) para $x > 0$ existen dos funciones continuas $L(x)$ y $\epsilon(x) > 0$ tal que : $c^*(x) - c^*(x-h) \leq L(x)\, h$, para todo $h \in (0,\epsilon(x))$,

Fiv) f_c , f_x existen y son Lipschitz continuas en E ,

Fv) $f_c(c,x) > 0$ para todo $(c,x) \in E$.

Aquí c^* representa el umbral de concentración para el proceso de penetración. La función f , da la velocidad de penetración del salto en la concentración como una función creciente de la cantidad del salto mismo, (Fv). De acuerdo con el esquema físico del proceso, f se anula cuando la concentración se iguala al umbral. Luego que $(c(s(t),t),s(t)) \in E$ implica que la frontera libre puede moverse hacia la zona vidriosa. Se prueba que esta condición es siempre satisfecha bajo las hipótesis hechas antes.

La hipótesis más obvia es que c_0 , i.e. el valor (normalizado) de la concentración sobre la frontera fija, el cual se considera constante, satisface la condición $c_0 > c^*(0)$, i.e., la concentración sobre la frontera fija excede el umbral de concentración y por lo tanto la penetración del solvente puede empezar.

Las condiciones Fiii) y Fiv) son hipótesis técnicas, en parte la condición Fiii) es una especie de condición de Lipchitz para la función c^*.

De las hipótesis (F) se sigue que existe una función $\phi \in C(\bar{f}(E) \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\phi(f(c,x),x) = c$ para $x > 0$ y $c > c^*(x)$ más aún se satisface :

ϕi) $\phi \in C^1(G)$, $G = f(E) \times \mathbb{R}^+$;

ϕii) $\phi > 0$, en G ,

ϕiii) $\phi(\eta,x) > c^*(x)$, $\eta > 0$, $x \geq 0$,

ϕiv) $\phi_\eta(\eta,x) > 0$ en G .

Se puede usar la función ϕ para reescribir la ley de penetración (1.4) en una forma equivalente

(1.4') $\qquad c(s(t),t) = \phi(\dot{s}(t),s(t))$, $0 < t < T$.

En las secciones siguientes se prueba la existencia y la unicidad para la solución del problema (P) para todo $T > 0$, la dependencia continua de la solución respecto al dato f y se analiza el comportamiento asintótico de la frontera libre.

2. PROBLEMA AUXILIAR.

En esta sección se considera que la frontera móvil es conocida como una función del tiempo, $x = r(t)$ y se estudia el problema de difusión del solvente en la barra $0 \leq x < r(t)$.

Se supone $r \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T)$, para un valor fijo T, más aún se considera :

(2.1) $\qquad r(0) = 0$;

(2.2) $\qquad \dot{r}(0) = f(c_0,0)$;

(2.3) $\qquad |\ddot{r}(t)| \leq k$, $0 < t < T$;

donde k es una constante positiva.

El problema de difusión que se tiene que resolver es el siguiente : Encontrar una función $c \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$, $D = \left\{(x,t) \,/\, 0 < x < r(t) \,,\, 0 < t < T\right\}$ con c_x continua hasta la frontera $x = r(t)$ y tal que :

(2.4) $\qquad c_{xx} - c_t = 0$ en D ,

(2.5) $\qquad c(0,t) = c_0$, $0 < t < T$,

(2.6) $\qquad c_x(r(t),t) = -\dot{r}(t)\,\phi(\dot{r}(t),r(t))$, $0 \leq t < T$.

Aquí la condición (2.6) semeja a la condición (1.5), expresada en términos de la función r solamente, i.e. substituyendo el valor de la función ϕ por el valor de la concentración sobre el contorno.

La existencia y la unicidad para el problema (2.4)-(2.6) ha sido probado en [5]. Aquí se dan algunas estimaciones de la solución y sus derivadas.

Comencemos notando que la función c^* es continua y $(c_0,0) \in E$, luego se puede encontrar dos constantes positivas δ y x_1 tales que : $\overline{E(\delta,x_1)} \subset E$, donde $E(\delta,x_1) = \Big\{(c,x) \;/\; c_0 - \delta < c < c_0 + \delta \;,\; 0 < x < x_1 \Big\}$.

Si definimos $A(t) = \Big\{ (x,\eta) \;/\; 0 < x < V_0\, t + \frac{1}{2}\, k\, t^2 \;,\; V_0 - k\, t < \eta < V_0 + k\, t \Big\}$ donde $V_0 = f(c_0,0)$.

De la inecuación (2.3) se obtiene :

(2.7) $\quad (r(t),\dot r(t)) \in A(t) \subset A(\overline{t}) \;,\; 0 < t < \overline{t} < \dfrac{V_0}{k}$.

Luego para todo $t < \overline{T}$, se tienen las siguientes estimaciones :

(2.8) $\quad 0 \le c_0 - \delta \le \phi(\dot r(t), r(t)) \le c_0 + \delta$

(2.9) $\quad -(V_0 + kt)\,(c_0 + \delta) \le c_x(x,t) \le 0 \;,\; 0 < x < r(t) \;,\; 0 < t < \overline{T}$.

La última inecuación, junto con la condición (2.5), dan una estimación para la solución c :

$$c_0 - (V_0 + kt)\,(c_0 + \delta)\,(V_0 t + \tfrac{1}{2}\, k\, t^2) \le c(x,t) \le c_0 \;,$$

(2.10)

$$0 < x < r(t) \;,\; 0 < t < \overline{T}\,.$$

Finalmente se puede dar una simple estimación, uniforme con respecto a la función r, restringiendo $\overline{T}$.

(2.11) $\quad c_0 - \delta \le c(x,t) \le c_0 \le c_0 + \delta \;,\; 0 < x < r(t) \;,\; 0 < t < \overline{T}$.

Nota 2.1

Una vez elegido δ y x_1 independientemente de la función r en la clase especificada por las condiciones (2.1)-(2.3), el valor de $\overline{T}$ depende en forma simple de k. En particular es siempre positivo para cualquier k finito.

Bajo las hipótesis (2.1)-(2.3) se cumple que :

$c \in C^{2,1}(\overline{D}) \;,\; c_{x_t} \in C(\overline{D} \setminus (0,0))$

y además

$$
(2.12)\qquad
\begin{aligned}
&| c_t(x,t) | \leq M_1(k) \left(1 + \sup_{(0,T)} \dot{r} \,/ \inf_{(0,T)} \dot{r} \right) \sup_{(0,T)} r(t) \leq \\
&\leq M_1(k)\ 5\, V_0\, t \leq L_1 \quad , \ t \leq \bar{T} \,,
\end{aligned}
$$

donde L_1 no depende de k, siempre que $\bar{T}$ sea menor que $\frac{V_0}{2k}$.

La inecuación (2.12) permite comparar dos soluciones c_1 y c_2 correspondientes a dos fronteras diferentes $x = r_1(t)$ y $x = r_2(t)$. En efecto resulta

$$
(2.13)\qquad | c_1(r_1(t),t) - c_2(r_2(t),t) | \leq L_2\, t\, \| r_1(t) - r_2(t) \|_{C^1([0,T])} \,,
$$

donde nuevamente la constante L_2 no depende de k si $\bar{T} \leq \frac{V_0}{2k}$. La demostración es similar a la hecha para el caso homogeneo.

3. EXISTENCIA LOCAL Y UNICIDAD.

En esta sección se prueba la existencia local de la solución usando un argumento de punto fijo. Primero se define un apropiado espacio funcional. Para este propósito sea α una constante tal que $0 < \alpha < 1$ y sea $\gamma(t)$ una función positiva no decreciente definida para todo $t > 0$, posiblemente divergente cuando $t \to 0$.

Sean k y T dos constantes positivas.

Se nota con $\mathfrak{X}(k,T,\gamma,\alpha)$ el conjunto de funciones $r(t)$ que satisfacen :

$$
(3.1)\qquad r \in C^1([0,T]) \cap C^2((0,T]) \ , \ r(0) = 0 \ , \ \dot{r}(0) = f(c_0\,,0) \ , \ | \ddot{r}(t) | \leq k \,,
$$
$$
0 < t < T \ , \ y \ | \ddot{r}(t_1) - \ddot{r}(t_2) | \leq \gamma(\tau) \left(t_2 - t_1 \right)^{\alpha/2} , \ 0 < \tau < t_1 < t_2 \leq T \,.
$$

El conjunto $\mathfrak{X}(k,T,\gamma,\alpha)$ es un conjunto cerrado de $C^1([0,T])$ con respecto a la norma C^1. Ver el apéndice al final del capítulo.

Se define el operador $\mathcal{T}$ sobre $\mathfrak{X}$ de la siguiente manera : para cada $r \in \mathfrak{X}$ sea $c(x,t)$ la solución correspondiente a (2.4)-(2.6) y sea $\tilde{r}$ definida por :

$$
(3.2)\qquad \tilde{r}(t) = \int_0^t f(c(r(\tau),\tau),r(\tau))\, d\tau \quad , \ 0 \leq t \leq T \ ,
$$

entonces $\mathcal{T}$ verifica $\mathcal{T}(r) = \tilde{r}$.

Se quiere probar que con una adecuada elección de α, k, T y de la función γ, $\mathcal{T}$ lleva el conjunto Ξ en sí mismo y que es una contracción. Esto implica que hay un único punto fijo del operador $\mathcal{T}$ en Ξ, con lo cual resulta el siguiente teorema.

Teorema 3.1

El problema (P) admite al menos una solución local más aún la concentración c satisface $c \in C^{2,1}(\bar{D})$ y $c_{xt} \in C(\bar{D}\setminus\{0,0\})$.

Demostración.

Se comienza probando que $\mathcal{T}$ va de Ξ en sí mismo.

Las condiciones (2.1) y (2.2) son satisfechas trivialmente. Más aún se tiene :

$$(3.3) \qquad \ddot{r}(t) = f_c(c(r(t),t),r(t))\Big(c_x(r(t),t)\,\dot{r}(t) + c_t(r(t),t) \Big) + f_x(c(r(t),t),r(t))\,\dot{r}(t)$$

De las estimaciones hechas en la sec. 2 , se obtiene $|\ddot{r}(t)| \leq k \quad , \quad 0 < t \leq T$.

Para demostrar que $\dot{r}$ satisface la última condición de (3.1) se necesita una estimación de la norma $c_x(x,t)$ en el espacio $C^{1+\alpha}$(derivada respecto a la variable espacial Hölder de orden α) para algún $\alpha \in (0,1)$ (la cual da una estimación de c_t en la norma C^{α}). Ver [8].

El caracter contractivo de τ sigue de la dependencia continua de c respecto de r(t) , como en (2.14). En efecto se tiene

$$\| \dot{r}_1 - \dot{r}_2 \|_{C^1[0,T]} \leq \sup_{E(\delta,x_1)} | f_c(c,x) | \, | c_1(r_1(t),t) - c_2(r_2(t),t) | \, +$$

$$+ \sup_{E(\delta,x_1)} | f_x(c,x) | \, \| \dot{r}_1 - \dot{r}_2 \|_{C^1[0,T]} \leq L_2 \, T \, \| \dot{r}_1 - \dot{r}_2 \|_{C^1[0,T]}$$

Finalmente se reduce T, si fuese necesario, para tener $L_2 \, T < 1$.

La regularidad de la solución sigue de las estimaciones hechas a la solución del problema auxiliar.

Debido al caracter contractivo de τ la solución local es también única en Ξ . Más aún la solución es única en una clase funcional más amplia la cual es la más grande en la cual la solución clásica tiene sentido. La demostración es casi la misma que la del caso f independiente de x (ver [4]). Sólo se enuncia el resultado :

Teorema 3.2

El problema (P) admite a lo sumo una solución para $t<T$.

4. EXISTENCIA GLOBAL.

Aqui se dan algunas propiedades cualitativas de la solución del problema (P).

Proposición 4.1

Se supone que la función f en (1.4) pertenece a $C^{\infty}(E)$ luego la frontera libre $s(t)$ pertenece a $C^{\infty}((0,T)) \cap C^{2}([0,T])$.

Demostración.

Se define la función $u(x,t)$ como :

$$u(x,t) = -\int_{x}^{s(t)} c(y,t)\, dy \quad , \tag{4.1}$$

la cual satisface la ecuación del calor en $D_T = \left\{ (x,t) \,,\, 0 < x < s(t) \,,\, 0 < t < T \right\}$, con condiciones de contorno $u_x(0,t) = c_0$, $u(s(t),t) = 0$ y la condición no lineal de Stefan $f(u_x(s(t),t),s(t)) = \dot{s}(t)$. Luego se puede probar la regularidad de la frontera libre usando la misma técnica iterativa introducida en [12] para un problema de Stefan lineal ya que $f \in C^{\infty}(E)$.

Proposición 4.2

La frontera libre es una función estrictamente creciente de t, i.e. $\dot{s}(t) > 0$, $0 \leq t < T$.

Demostración.

Ya que $\dot{s}(0) = f(c_0, 0) > 0$ y $\dot{s}$ es continua, entonces existe $t' > 0$ tal que $\dot{s}(t) > 0$, $0 < t < t'$. Sea t_1 el infimo de los t, tal que $\dot{s}(t) \leq 0$. Luego $t_1 > 0$ y $\dot{s}(t) > 0$ en $0 \leq t < t_1$ y $\dot{s}(t_1) = 0$. De (1.5) $c_X(s(t_1),t_1) = 0$, y luego $(s(t_1),t_1)$ es un punto de máximo para c_X en D_{t_1}, donde $D_{t_1} = \left\{ (x,t) \,,\, 0 < x < s(t) \,,\, 0 < t < t_1 \right\}$. Esto implica que la derivada espacial de c_X en dicho punto es estrictamenete positiva (ver aplicación del principio de máximo [7]) y luego $c_t(s(t_1),t_1) > 0$. De esto se deduce que la derivada total de c respecto al tiempo evaluada a lo largo de la curva $x = s(t)$ es positiva en $t = t_1$. Por lo tanto $c(s(t),t)$ es estrictamente creciente en un intervalo (t_2, t_1) para algún $t_2 < t_1$. Por otro lado ya que t_1 es el primer cero de $\dot{s}(t)$ y $(c_0,0) \in E$ luego : $\big(c(s(t),t), s(t) \big) \in E$ para todo $t < t_1$ o $c(s(t),t) > c^*(s(t))$, para $t < t_1$ y $c(s(t_1),t_1) = c^*(s(t_1))$. Esto nos dice, junto a la hipótesis Fiii) que

$$\frac{c(s(t_1),t_1) - c(s(t_1 - h),t_1 - h)}{h} \leq \frac{c^*(s(t_1)) - c^*(s(t_1 - h))}{h} \leq$$

$$\leq L(s(t_1)) \frac{s(t_1) - s(t_1 - h)}{h}$$

Finalmente se toma límite cuando $h \to 0^+$, y se obtiene la siguiente inecuación :

$0 < \frac{d}{dt}\Big(c(s(t),t)\Big) \mid_{t = t_1} \leq L(s(t_1))\, \dot{s}(t_1) = 0$. Absurdo.

Proposición 4.3

Sea (T,s,c) una solución del problema (P) luego :

(4.2) $\quad c(x,t) < c_0 \;,\; 0 < x \leq s(t) \;,\; 0 < t < T$,

(4.3) $\quad 0 < \dot{s}(t) \leq \bar{s} \;,\; 0 \leq t \leq T$,

(4.4) $\quad - c_0\, \bar{s} < c_x(x,t) < 0$ en D_T ,

Demostración.

$\bar{s} = \sup\limits_{E_T} f(c,x)$, $E_T = E \cap \Big\{ (c,x) \,/\, c < c_0 \,,\, x < s(T) \Big\}$

La demostración es una aplicación directa del principio del máximo a las funciones c y c_x , teniendo en cuenta que $\dot{s}$ es estrictamente positiva.

Teorema 4.4

El problema (P) admite solución para todo T arbitrario.

Demostración:

El teorema 3.2 garantiza que existe una única solución del problema hasta un tiempo $T > 0$.

Sea T^* el máximo tiempo de existencia de la solución y se supone que $T^* < \infty$ ($T^* \geq T$).

Se considera un nuevo problema de frontera libre para $T' > T^*$. Se busca $u(x,t)$ y $\sigma(t)$ tales que :

$u_{xx} - u_t = 0$, en $D' = \Big\{ (x,t) \,/\, 0 < x < \sigma(t) \,,\, T^* < t < T' \Big\}$,

$$\sigma(T^*) = b ,$$

$$u(x,T^*) = h(x) \ , \ 0 < x < b ,$$

$$u_x(0,t) = c_0 \ , \ T^* < t < T' ,$$

$$u(\sigma(t),t) = 0 \ , \ T^* < t < T' ,$$

$$\dot{\sigma}(t) = f(u_x(\sigma(t),t),\sigma(t)) \ , \ T^* < t < T' ,$$

donde $b = \lim_{t \to T^{*-}} s(t)$, $h(x) = \lim_{t \to T^{*-}} u(x,t) = - \lim_{t \to T^{*-}} \int_x^{s(t)} c(y,t)\, dy$

y $u(x,t)$ es definida por (4.1).

Notar que el límite de $s(t)$ existe debido a la monotonía de la frontera libre $x = s(t)$, $t < T^*$.

Ya que $u_t = c_x < 0$ el límite $u(x,t)$ existe cuando $t \to T^*$ para cada $x < b$. Más aún ya que $u_x(x,t) = c(x,t)$ es uniformemente acotada, $h(x)$ es Lipschitz continua en $(0,b)$ y $h(b) = 0$. En realidad $h(x)$ es C^1 .

La existencia y unicidad de la solución del problema de frontera libre para u y σ para un adecuado $T' > T^*$, es entonces asegurado por [11].Ya que los datos para el problema que satisfacen (u,σ) verifican las hipótesis del Teorema de existencia en [12] : f_c y f_x Lipschitz continuas en E y $h \in C^1[0,b]$. Más aún esta solución satisface : $u \in C^{1,0}(\bar{D}') \cap C^{2,1}(D')$, $\sigma \in C^1([T^*,T'])$. Ahora el teorema de unicidad y el resultado de regularidad de [12] implican que la derivada espacial de $u(x,t)$ extiende a la solución del problema P, contrariamente a la hipótesis de que existe un tiempo T^*, máximo de los tiempos de existencia de la solución.

5. DEPENDENCIA CONTINUA Y OTRAS PROPIEDADES CUALITATIVAS DE LA SOLUCION.

Primero se enuncia un resultado de dependencia continua de la solución respecto a la función f definida en (1.4) :

Proposición 5.1

Se supone que ambas f_1 y f_2 satisfacen las hipótesis (F).

Sea s_i , c_i , $i = 1, 2$ las correspondientes soluciones del problema (1.1)-(1.5), luego en un intervalo fijo $(0,T)$ se tiene

(5.1) $$\| s_1 - s_2 \|_{C^1((0,T))} \leq \text{const.} \sup_{E'} | f_1(c,x) - f_2(c,x) |$$

donde $E' = E \cap \left\{ (c,x) / : c < c_0 \, , \, x < \min(s_1(T), s_2(T)) \right\}$

Demostración.

El caracter contractivo del operador $\mathcal{T}$ no depende de f . En efecto la acotación de $\ddot{s}$, determina una cota inferior independiente de f para $\dot{s}$ en un adecuado intervalo de tiempo. Más aún $\mathcal{T}$ depende continuamente de $\| f_1 - f_2 \|_{C((0,T))}$

La dependencia continua para cualquier intervalo de tiempo puede ser obtenida aplicando el teorema 2 de [12] a la solución del problema definido por (4.1).

En cuanto a la dependencia monótona se tiene lo siguiente.

Proposición 5.2

Sean s_i , c_i , $i = 1, 2$, dos soluciones del problema P, correspondientes a las funciones f_1 y f_2 , ambas satisfacen las hipótesis (F) y tal que $f_1(c,x) < f_2(c,x)$ para todo c, x, luego :

(5.2) $$s_1(t) < s_2(t) \, , \; 0 < t < T \, .$$

Demostración.

Se consideran los correspondientes $u_i(x,t)$ definidos por (4.1). Como $\dot{s}_1(0) < \dot{s}_2(0)$, entonces se supone que existe un t_0 tal que $s_1(t_0) = s_2(t_0)$ y $s_1(t) < s_2(t)$, para cualquier $t < t_0$. Y

(5.3) $$\dot{s}_1(t_0) \geq \dot{s}_2(t_0) \, .$$

Se define $v = u_1 - u_2$ y $D_0 = \left\{ (x,t) \,/\, 0 \leq x < s_1(t) \, , \, 0 < t < t_0 \right\}$ luego v satisface

$$v_{xx} - v_t = 0 \text{ en } D_0$$

$$v_x(0,t) = 0 \; , \; 0 < t < t_0$$

$$v(s_1(t),t) > 0 \; , \; 0 < t < t_0$$

$$v(s_1(t_0),t_0) = 0$$

Luego v tiene un mínimo en el punto $(s_1(t_0),t_0)$ y por lo tanto $v_x(s_1(t_0),t_0) < 0$. Esto conduce a :

$$\dot{s}_1(t_0) - \dot{s}_2(t_0) = f_1\Big(u_{1x}(s_1(t_0),t_0), s_1(t_0)\Big) - f_2\Big(u_{2x}(s_2(t_0),t_0), s_2(t_0)\Big) \leq$$
$$\leq f_{2c}(\mu, s_1(t_0)) \; \Big(u_{1x}(s_1(t_0),t_0) - u_{2x}(s_2(t_0),t_0) \Big) < 0 \; ,$$

con $u_{1x}(s_1(t_0),t_0) < \mu < u_{2x}(s_2(t_0),t_0)$ lo cual contradice (5.3).

Proposición 5.3

Se supone que $f_x < 0$. Luego :

(5.4) $c_t(x,t) > 0 \; , \; 0 < x < s(t) \;\; , \;\; 0 < t < T$

(5.5) $c_{x_t}(0,t) > 0 \;\; , \;\; 0 < t < T$.

Demostración.

Sea $w = c_t$, luego w resuelve la ecuación del calor en Q_T con las siguientes condiciones de contorno :

$$w(0,t) = 0$$

$$w(s(t),t)\, \alpha(t) + w_x(s(t),t) = \beta(t)$$

donde

$$\alpha(t) = 2(\dot{s}(t) + f_c\, c) \mid_{x = s(t)}$$

$$\beta(t) = -\dot{s}(\, c_x\, \dot{s} + c\, f_c\, c_x + c\, f_x\,) \mid_{x = s(t)}$$

Ya que $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son no negativas, el principio del máximo implica que w no puede asumir un mínimo negativo ni anularse sobre $x = s(t)$. Luego w es estrictamente positivo dentro de D_T . Se sigue que el mínimo para w es asumido sobre la frontera $x = 0$, esto es $w_x(0,t) > 0$.

Proposición 5.4

Si $f_x > 0$, luego la función $a(t) = c(s(t),t)$ es decreciente en $0 < t < T$.

Demostración.

Sea $v = (\ln c)_{xx}$. El teorema 3.2 asegura que v es continua. en $\overline{D}_T$ y que v_x es continua en $\overline{D}_T \setminus (0.0)$. Más aún v satisface :

(5.6) $v_{xx} + 2\,(\ln c)_x\, v_x + v^2 - v_t = 0$ en D_T ,

con las siguientes condiciones de contorno :

$$v(0,t) = -\left(\frac{c_x(0,t)}{c(0,t)} \right)^2$$

$$v(s(t),t) = \frac{\ddot{s} - f_x\, \dot{s}}{f_c\, c} \mid_{x = s(t)}$$

Ya que $v(0,0) < 0$ y v es continua en $(0,0)$, $v(s(t),t)$ es negativa en algún intervalo $[0,t_0)$. El principio del máximo (i.e. en la forma del teorema 5, de [7], aplicado con cuidado a la ecuación (5.6) implica que si $v(s(t),t)$ se anula por primera vez en $t_0 > 0$, entonces $(s(t_0),t_0)$ es un punto de máximo para v, esto es $v_x(s(t_0),t_0) > 0$. Sin embargo $v_x(s(t_0),t_0) = - f_x f \,|_{x = s(t_0),\, t = t_0}$ es no positiva.

Luego $v(s(t),t)$ no se puede anular, esto es :

$\ddot{s}(t) < f_x(c(s(t),t),s(t))\dot{s}(t)$, $0 < t < T$. El resultado se obtiene teniendo en cuenta que :

$\ddot{s}(t) = f_c(c(s(t),t),s(t))\, \dot{c}(t) + f_x(c(s(t),t),s(t))\, \dot{s}(t)$.

6. COMPORTAMIENTO ASINTOTICO.

En esta sección se describe el comportamiento de la solución del problema (P) cuando $t \to \infty$, bajo distintas hipótesis sobre los datos.

Proposición 6.1

Se supone que existe un $\bar{x} < \infty$ tal que $c^*(\bar{x}) \geq c_0$, luego $s(t) < \bar{x}$ para todo $t > 0$.

Demostración.

Se supone que existe un $\bar{t}$ tal que $s(\bar{t}) = \bar{x}$, luego $\left(c(s(\bar{t}),\bar{t}),\, s(\bar{t})\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$. Sin embargo la proposición 4.2 asegura que la distancia de los puntos $\left(c(s(t),t),\, s(t)\right)$ a la frontera del conjunto E es positiva para todo $t > 0$.

Proposición 6.2

Si la frontera libre $x = s(t)$ tiene una asintota en $x = x_0$, luego $\lim_{t \to \infty} c(s(t),t) = c_0$, $\lim_{t \to \infty} \dot{s}(t) = 0$.

Demostración.

Sea $u(x,t)$ definida como en (4.1) luego :

(6.1) $\qquad c_0(x - x_0) \leq u(x,t) \leq 0$

Se fija $\bar{n}$ entero arbitrariamente grande. Y para todo $n > \bar{n}$ se define:

$u_n(x,t)$ solución de :

$u_{n\,xx} - u_{n_t} = 0$ en $D_n = \left\{ (x,t) \,/\, 0 < x < x_n ,\, t > t_n \right\}$,

donde t_n es tal que $s(t_n) = x_n = x_0 - \frac{1}{n}$ con las siguientes condiciones de contorno e iniciales :

$u_n(x,t_n) = 0$, $0 < x < x_n$

$u_{nx}(0,t) = c_0 \ , \ t > t_n$

$u_n(x_n,t) = 0 \ , \ t > t_n$

Se cumple que :

(6.2) $\lim_{t \to \infty} u_n(x,t) = c_0 \, (x - x_n)$ para cada n .

Entonces (6.1) junto al teorema 4 pag. 158 de [7] asegura que

$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = c_0 \, (x - x_0)$ uniformemente en $\overline{D}_n$.

Más aún

$\lim_{t \to \infty} u_x(x,t) = \lim_{t \to \infty} c(x,t) = c_0$ uniformemente en cualquier intervalo $[0,x']$, para cualquier $x' < x_0$ (ver teorema 15, pag. 80 de [7]). Se sigue que $\lim_{t \to \infty} c(s(t),t) = c_0$.

Entonces existe $\lim_{t \to \infty} f(c(s(t),t),s(t))$ y $\lim_{t \to \infty} \dot{s}(t) = \lim_{t \to \infty} \inf \dot{s}(t) = 0$.

En efecto como f es continua, $\lim_{t \to \infty} c(s(t),t) = c_0$ y $\lim_{t \to \infty} s(t) = x_0$, entonces existe el límite de $f(c(s(t),t),s(t))$ cuando $t \to \infty$ que se sabe por (1.4) que es igual a $\lim_{t \to \infty} \dot{s}(t)$, pero como $x = x_0$ es asíntota de $s(t)$, $\lim_{t \to \infty} \dot{s}(t) = 0$, luego existe $\lim_{t \to \infty} \dot{s}(t)$ y es igual a cero.

Corolario 6.3

Supongamos que $s(t)$ tiene una asíntota en $x = x_0$, luego

$x_0 = x^* = \inf\left\{ x \ / \ c^*(x) \geq c_0 \right\}$

Corolario 6.4

Sea $c^*(x)$ tal que $c^*(x) < c_0$, para todo x , entonces

$\lim_{t \to \infty} s(t) = +\infty$.

NOMENCLATURA

c_0 : concentración en la cara $x = 0$

c : concentración

c^* : umbral de concentración

D : constante de difusividad

f : velocidad de la frontera libre

s : frontera libre

t : variable tiempo

x : variable espacial

Letras griegas

ϕ : inversa de f

$\mathcal{T}$: operador contracción

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. ANDREUCCI, R. RICCI, "A free boundary problem arising from sorption of solvents in glassy polymers". Quart. of Appl. Math. 44 (1987), 649-657.

[2] G. ASTARITA, G.C. SARTI, "A class of mathematical models for sorption of swelling solvents in glassy polymers", Polym. Eng. Sci. 18 (1978), 388-395.

[3] E. COMPARINI, R. RICCI, :One the swelling of a glassy polymer in contact with a well-stirred solvent", Math. Methods Appl. Sci. 7 (1985), 238-250.

[4] A. FASANO, G. MEYER, M. PRIMICERIO, "On a problem in the polymer industry: theoretical and numerical investigation of swelling", SIAM J. Appl. Math. 17 (1986), 945-960.

[5] A. FASANO, M. PRIMICERIO, "Su un problema unidimensionale de diffusione in un mezzo a contorno mobile con condizioni ai limiti non lineari", Ann. Mat. Pura e Appl., 93 (1972), 333-357.

[6] A. FASANO, R. RICCI, "Penetration of solvents into glassy polymers", in "Free boundary problems : theory and applications", Eds. A. Bossavit et al., vol. 1, 132-139, Pitman, London 1985.

[7] A. FRIEDMAN, "Partial differential equations of parabolic type", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[8] O.A. LADYZENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", A.M.S. Trans. 23, Providence, R.I., 1968.

[9] E. COMPARINI, R. RICCI, C. TURNER, "Penetration of a solvent into a non homogeneous polymer". Meccanica, 23 (1988), 75-80.

[10] M. PRIMICERIO, "Sorption of swelling solvents by glassy polymers in mathematics in industry", H. Neunzert (ed.), Stuttgart (1983).

[11] A. FASANO, M. PRIMICERIO, "Free-boundary problems for non linear parabolic equations with non linear free boundary conditions", J. Math. Anal. Appl, 72 (1979), 247-273.

[12] D. SCHAFFER, "A new proof of the infinite differentiability of the free boundary in the Stefan problem", Journal Differential Equations, 20 (1976), 266-269.

Cristina Vilma Turner
FAMAF
Universidad Nacional Cordoba
1988