Propuesta para un curso de posgrado sobre "Tópicos en Geometría".

Aroldo Kaplan

OBJETIVOS, MOTIVACIÓN:

Este sería continuación de mi curso de Geometría Compleja del 2007, proyectada con mis alumnos de entonces (3 inscriptos, 9 asistentes), pero con un contenido adaptado a los intereses de nuevos estudiantes y mayormente independiente de lo dictado hasta ahora.

Hay al menos 3 estudiantes de posgrado y 2 de grado interesados en tomar este curso, además, me imagino, de varios participantes en mi curso anterior.

El objetivo sería el estudio de los Laplacianos sobre variedades riemannianas y hermitianas, específicamente los teoremas de Hodge y sus aplicaciones principales. Entre éstas incluiría las descomposiciones de Hodge y de Lefschetz de la comología de variedades kahlerianas y sus consecuencias en Geometría Algebraica (para las cuales no existe demostración algebraica!). También cuestiones de Isoespectralidad y/o Teoremas del Índice, según el interés de la audiencia.

Dos ventajas de este curso son: (a) Los requerimientos son pocos, estando al alcance de alumnos de grado avanzados; (b) Toca varias áreas de interés local, como Geometría Diferencial y Algebraica, Operadores Elípticos, y Grupos y Álgebras de Lie.

TITULO: Tópicos en Geometría

PREREQUISITOS: Formas diferenciales sobre variedades

TEXTOS:

Para lo riemanianano: Rosenberg: "The Laplacian on a Riemannian Manifold"

Para lo kahleriano: Vosin: "Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry" Wells, "Differential Analysis on Complex Manifolds" Lewis, "Introduction to the Hodge Conjecture"

NUMERO DE HORAS: 60

MODALIDAD DE EVALUACION: Examen oral, centrado en la presentación de un tema.

PROGRAMA (semanal, aproximadamente):

PARTE 1:

Repaso del Cálculo Diferencial Exterior en variedades diferenciales.

Métricas Riemannianas. Codiferencial.

El Laplaciano en Variedades Riemannianas.

Ecuaciones de Laplace y del Calor. Ejemplos, el caso de métricas invariantes en Grupos de Lie. Isoespectralidad.

Descomposición de formas cerradas sobre variedades compactas en armónicas, exactas y coexactas (Hodge I). Demostración vía ecuación del Calor. Resumen de la demostración vía operadores pseudodiferenciales y del caso no-compacto.

Teorema de deRham. Realización de la Comología de deRham mediante formas armónicas (Hodge II).

Primeras aplicaciones. El caso de Grupos de Lie Compactos.

PARTE 2

Operador de Cauchy-Riemann y Laplacianos complejos.

Teorema de Dolbeault. Realización de la comología de Dolbeault mediante formas armónicas (Hodge II).

Sucesión espectral de Frolicher. Métricas kahlerianas.

Identidades de Kahler: demostración vía representaciones de sl(2). Interpretación supersimétrica.

Descomposición en tipos de la comología de variedades kahlerianas compactas (Hodge III). Primeras aplicaciones.

PARTE 3

Aplicaciones a variedades algebraicas. Superficies de Riemann. Teoremas de Lefschetz.

Conjetura de Hodge.