

RETICULOS EN ESPACIOS EUCLIDEOS

1^{er} Cuatrimestre de 2009

Curso de Posgrado, Optativa

Docente: Juan Pablo Rossetti

Correlativas: Para la Lic. en Matemática: Análisis Matemático III y Algebra II.
Para la Lic. en Computación: Algebra y Análisis Matemático II.

Programa

Motivación. Planteo de los problemas más importantes relacionados con lattices, problemas de empaquetamientos, de cubrimientos, de kissing numbers y de cuantizadores.

1. **Lattices. Generalidades.** Lattice. Dominio fundamental. Volumen. Base. Sublattice. Índice. Transformaciones rígidas del espacio. Lattices congruentes (\equiv), semejantes (o equivalentes) (\simeq). Determinante. Matriz generadora. Matriz de Gram. Dual de un lattice. Packing radius. Covering radius. Densidad. Mejor 2D-lattice packing y mejor 3D-lattice packing.
2. **Ejemplos.** Ejemplos de lattices en dimensiones bajas. El lattice cúbico Z^n . Los lattices A_n y A_n^* . Los lattices D_n , D_n^+ . Los lattices E_6 , E_7 y E_8 .
3. **Formas cuadráticas definidas positivas.** Ejemplos. Relación con lattices. Funciones theta. Representación de números por una forma cuadrática. Algunos teoremas básicos (suma directa, cancelación).
4. **Algebra.** En caso de haber algún alumno de la Lic. en Cs. de la Computación: repaso de Algebra Lineal.
5. **Desigualdad de Mordell.** Densidad y espesor de un lattice. Densidad de un empaquetamiento. Secciones de un lattice. Desigualdad de Mordell. Aplicaciones.
6. **Parámetros de un lattice.** Formas de Minkowski y de Korkine-Zolotareff. Celdas de Dirichlet-Voronoi. Celda de Voronoi de un lattice. Vectores de Voronoi. Superbase obtusa. Vonormas, Conormas de lattices. Algoritmo de reducción. Fórmula de Selling. Simetría de algunas fórmulas usando conormas (problemas extremos en dimensión 2).
7. **Geometría.** Breve introducción a los grupos cristalográficos. Teoremas de Bieberbach. Introducción a las variedades compactas planas.

8. **Isospectralidad de lattices.** Ejemplo de Milnor (y Witt) en dimensión 16, de Kneser en dimensión 12. Ejemplos de Conway-Sloane en dimensión 6 y 5. Espectro de Autovalores del Laplaciano en toros planos. Fórmula de Poisson para toros planos. Espectro de variedades compactas planas. Lo que se puede oír. Ejemplos de Isospectralidad.
9. **Retículos de raíces.** Lattices enteros. Lattices unimodulares. Método de pegado de Kneser. Aplicaciones: clasificación de los llamados *root lattices* o *retículos de raíces*; la cubicidad de un lattice es ‘audible’ para dimensiones menores que 6.
10. **Relación entre lattices y códigos.** Códigos. Códigos binarios y lineales. Códigos autoduales y lattices unimodulares pares. El lattice E_8 .
Construcción de Lattices a partir de Códigos. Enumeradores de peso. Teoremas de Gleason y de Hecke. Caracterizaciones del Leech lattice.
11. **Lattice quantizers.** Definición de cuantizadores, de retículos cuantizadores, planteo del problema de obtener el óptimo lattice quantizer en cada dimensión.
12. **Kissing numbers.** Introducción al tema. El *problema de las 13 esferas*. Un método de optimización no-lineal.

Temas posibles, en caso de que haya tiempo e interés:

- Algoritmos para obtener el vector más corto en un lattice.
- Lattices laminados.

Bibliografía

- *Sphere Packings, Lattices and Groups*, por J. H. Conway y N. J. A. Sloane. Springer-Verlag, New York, 1999 (3rd Edition).
- *Lattices and Codes* (A course partially based on Lectures by F. Hirzebruch), por W. Ebeling. Vieweg, 1994.
- *The sensual (quadratic) form*, por J. H. Conway. The Carus Math. Monographs, nro. 26, 1997.
- *Introduction to Quadratic Forms*, por O. T. O’Meara. Springer-Verlag, 1973.