Práctico 0: Repaso

Conjuntos y funciones. Conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Funciones continuas de $\mathbb{R}$. Numerabilidad.

(1) Sea $f : X \to Y$, y sean $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar las siguientes afirmaciones:

- (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Además, f inyectiva $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- (c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- (d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
- (e) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (y se cumple la igualdad si f es inyectiva).
- (f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (y se cumple la igualdad si f es sobreyectiva).
- (g) $f^{-1}(C^c) = [f^{-1}(C)]^c$.
- (h) Si f es inyectiva entonces $f(A^c) \subseteq [f(A)]^c$.
- (i) Si f es sobreyectiva entonces $[f(A)]^c \subseteq f(A^c)$.
- (j) f es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ($\mathrm{id}_X : X \to X$ es la función identidad de X, i.e., $\mathrm{id}_X(x) = x$ para todo $x \in X$).
- (k) f es suryectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
- (l) f es biyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(2) En todos los items del ejercicio anterior donde se probó alguna contención, buscar ejemplos de funciones que muestren que a veces no se cumple la igualdad.

(3) Analizar la imagen y la preimagen de intervalos abiertos generales en $\mathbb{R}$ para las funciones

$$f(x) = \tfrac{3}{2}x - 1, \qquad g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 1, \qquad h(x) = \tfrac{1}{x}, \qquad u(x) = \cos(x).$$

(4) Escribir los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la manera más simple posible.

(a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\tfrac{1}{n}, 1]$ $\quad (b)$ $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (m, m+1)^c$ $\quad (c)$ $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\tfrac{1}{n}, n)$

(d) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\tfrac{1}{n}, 1)$ $\quad (e)$ $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)^c$

(5) Decir cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son numerables y cuáles no, justificando adecuadamente en cada caso.

- (a) $A = \mathbb{Q} \times (\{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\})$.
- (b) $B = [0, 1] \times \mathbb{N}$.
- (c) $C = [0, 1] \times \{0, 1\}$.

(*d*) $D = \big((0,1)\cap\mathbb{Q}\big)\times\{k\pi :\ k\in\mathbb{Z}\}$.

(*e*) $\mathbb{S}^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2=1\}$.

(*f*) $\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} = \{(x,y)\in\mathbb{Q}^2 :\ x^2+y^2=1\}$.

(6) En cado caso dar una función continua sobreyectiva del conjunto A en el conjunto B. Cuándo no sea posible decir porqué.

(*a*) $A=(0,1)$ y $B=\{0,1\}$.
(*b*) $A=(0,1)$ y $B=(1,\infty)$.
(*c*) $A=[-1,1]$ y $B=(0,1)$.
(*d*) $A=(0,1)$ y $B=[-1,1]$.
(*e*) $A=(0,1)$ y $B=\mathbb{N}$.

(7) Dar una biyección entre A y B cuándo sea posible y dar una biyección continua cuándo sea posible. Cuándo no es posible decir porqué.

(a) $A=(0,1)$ y $B=(0,\infty)$.

(b) $A=[0,1]$ y $B=\{0\}\cup[2,3]$.

(8) Dibujar los siguientes subconjuntos del plano $\mathbb{R}^2$.

(*a*) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\}\le 1\}$.

(*b*) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\le 1\}$.

(*c*) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<2\}$.

(*d*) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2\ge 1\}$.

(*e*) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x-1\le y\ \wedge\ x^2+y^2\le 4\}$.

(9) Dibujar los siguientes subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^3$.

(*a*) $A=\mathbb{S}^1\times[-1,1]$.

(*b*) $B=[-1,1]\times\mathbb{S}^1$.

(*c*) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2=\big(e^{-x^2}\big)^2\}$.

(*d*) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\ge 1\ \wedge\ x\le 0\}$.

(10) Describir los siguiente conjuntos como en los ejercicios anteriores.

(*a*) El tercer cuadrante del plano incluyendo sus bordes.

(*b*) El complemento de la esfera sólida de radio 1 dentro del cilindro vertical de radio 1.

(*c*) El “moño” horizontal (con sus bordes) comprendido entre las dos diagonales principales del plano.

(*d*) El conjunto de franjas verticales del plano (con sus bordes) de ancho $\frac{1}{2}$ centradas en los enteros.

Ejercicios adicionales

(11) Decir cuáles de las siguientes identidades de conjuntos valen y cuáles no, justificando adecuadamente en cada caso.

(*a*) $(A \times B)^c = A^c \times B^c$.

(*b*) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$.

(*c*) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

(12) Dar una biyección entre A y B cuándo sea posible y dar una biyección continua cuándo sea posible. Cuándo no es posible decir por qué.

(*a*) $A = (0, 1]$ y $B = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(*b*) $A = (0, 1] \cup (2, 3]$ y $B = (4, 5]$.