Práctico 1: Espacios topológicos

Espacios métricos y topológicos. Subespacios. Interior y clausura. Densidad.

(1) Considerar en $\mathbb{R}^n$ la métrica euclideana. Probar que:

(a) $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x,y,z \in \mathbb{Z}\}^c$ es abierto en $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \ x \neq \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

(d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\operatorname{graf}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x)\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

(2) Supongamos que para dos distancias d_1 y d_2 en un conjunto X, existen $a, b > 0$ tales que

$$a\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b\, d_1(x,y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Demostrar que d_1 y d_2 definen los mismos abiertos en X.

(3) Sea $C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$. Probar que

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

es una métrica en $C[a,b]$. ¿Vale la misma afirmación si continuidad se reemplaza por integrabilidad?

(4) Sean (X,d) un espacio métrico y x_0 un punto en X. Mostrar que la función $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea, dada por $f(x) = d(x, x_0)$, es continua.

(5) Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Para cada $x \in X$ definimos la *distancia de x a A*, por:

$$\delta_A(x) = \inf\{d(x,a) : \ a \in A\}.$$

(a) Probar que $\delta_A : X \to \mathbb{R}$ es continua.

(b) Mostrar que $\{x : \ \delta_A(x) \leq r\}$ es cerrado.

(c) Mostrar que $\{x : \ \delta_A(x) = 0\} = \overline{A}$.

(6) En $X = C([a,b])$ consideremos las métricas

$$d_1(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : \ t \in [a,b]\},$$
$$d_2(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt.$$

(a) Analizar la continuidad de $\operatorname{id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$ y de $\operatorname{id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$.

(b) Analizar la continuidad de las funciones $f \mapsto f(b)$ y $f \mapsto \int_a^b f(t)\, dt$ para ambas métricas en X.

(7) Sea $X = C([-1,1])$ y d_1 y d_2 las métricas definidas en el ejercicio anterior. Sea

$$f(x) = \tfrac{1}{1+x^2} \in X.$$

(a) Esbozar el gráfico de f y la bola abierta de centro f y radio 1, respecto a la distancia d_1.

(b) Calcular $d_2(f,g)$, donde $g(x) = 1 + x$.

(c) Mostrar que para todo $c \in \mathbb{R}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $g_c \in X$ tal que

$$d_2(f, g_c) \leq \epsilon.$$

(8) Probar que las siguientes son topologías en el conjunto X.

(a) $\tau_c = \{A \subseteq X : \ A^c \text{ es finito}\} \cup \{\varnothing\}$.

(b) $\tau_{x_0} = \{A \subseteq X : \ x_0 \in A\} \cup \{\varnothing\}$, con $x_0 \in X$.

(c) $\tau_{-x_0} = \{A \subseteq X : \ x_0 \notin A\} \cup \{X\}$, con $x_0 \in X$.

(9) Probar que las siguientes son topologías en $\mathbb{R}$.

(a) $\tau_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{ para cada } x \in A \text{ existe } b \in \mathbb{R} \text{ con } [x,b) \subseteq A\}$
(*topología de intervalos semiabiertos a derecha*).

(b) $\tau_2 = \{(a, +\infty) : \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$.

Si en la definición de τ_2 cambiamos la condición "$a \in \mathbb{R}$" por "$a \in \mathbb{Q}$", ¿sigue siendo τ_2 una topología en $\mathbb{R}$?

(10) Probar que la proyección $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $p(x,y) = x$, es continua y abierta, pero no es cerrada.

(11) Sean $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ y $[0, 2\pi)$ con las topologías relativas de las usuales de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$ respectivamente. Probar que la función

$$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$$

definida por $f(t) = (cos(t), sen(t))$ es biyectiva y continua, pero no es abierta ni cerrada y por lo tanto no es un homeomorfismo.

(12) Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) : \ x = \pm\tfrac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}.$$

(a) Determinar A°, $\overline{A}$ y $\mathrm{Fr}(A)$.

(b) Determinar B°, $\overline{B}$ y $\mathrm{Fr}(B)$.

(c) Para $C = A^c$, determinar C°, $\overline{C}$ y $\mathrm{Fr}(C)$.

(13) Sea X con la topología de los complementos finitos.

(a) Determinar todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$.

(b) Probar que toda biyección de X en sí mismo, es un homoeomorfismo.

(14) Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología de intervalos semiabiertos a derecha y sean

$$A = [1,2], \quad B = \{0\}, \quad C = \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \quad D = [0,\infty).$$

(a) Mostrar que los intervalos $[a,b)$ son abiertos y cerrados.

(b) Exhibir un denso numerable, probando que $\mathbb{R}$ es separable con esta topología.

(c) Calcular A°, $\overline{B}$, D°, $\overline{D}$, C° y $\overline{C}$.

(d) Calcular $\mathrm{Fr}(A \cup B)$ y $\mathrm{Fr}(D)$.

(15) Sea para cada $m \in \mathbb{N}$, $E_m = \{n : \ n \geq m\}$.

(a) Probar que la familia de todos los E_m junto con el vacío, es una topología en $\mathbb{N}$.

(b) Para $A = \{3, 8, 11, 21\}$, calcular A°, $\overline{A}$ y $\mathrm{Fr}(A)$.

(c) Para $B = \{3k : \ k \in \mathbb{N}\}$, calcular B°, $\overline{B}$ y $\mathrm{Fr}(B)$.

(16) Sobre densidad.

(a) Probar que S^1 es separable.

(b) Determinar todos los conjuntos densos de $\mathbb{N}$ con la topología del Ejercicio 15.

(c) Determinar todos los conjuntos densos de X con la topología de los complementos finitos.

(d) Determinar todos los conjuntos densos de X con la topología τ_{x_0}.