7 Ecuaciones Diferenciales

Organiza: Julián Fernández Bonder

Autores: Jose L. Menaldi, Domingo A. Tarzia
Lugar: Wayne State Univ. (EE.UU.) y CONICET - Univ. Austral (Rosario, Argentina)
Expositor: Domingo A. Tarzia
Conferencia Invitada

Convergencia de una familia de controles óptimos parabólicos distribuidos con condiciones de contorno mixtas

Se estudia el comportamiento asintótico de una familia de controles óptimos distribuidos en los cuales el sistema está dado por la ecuación del calor con condiciones de contorno mixtas y el control es la energía interna g. El parámetro a de la familia es el coeficiente de transferencia de calor sobre una porción F1 de la frontera de un dominio multidimensional D e interviene en la condición de contorno de tipo Newton (o condición de Robin). La condición de contorno sobre la porción restante de frontera F2 es la dada por un flujo de calor. Se destaca que para adecuados datos del problema el sistema no representa a un problema de tipo Stefan. Para cada parámetro a el problema de control óptimo distribuido minimiza la energía interna g para una dada función de costo. Se prueba que la familia de controles óptimos con sus correspondientes sistemas y sistemas adjuntos convergen en norma en un adecuado espacio de Sobolev parabólico, cuando el parámetro a tiende a infinito, al control óptimo, al sistema y al sistema adjunto óptimos donde el problema límite tiene una condición de Dirichlet en lugar de la de Robin en la porción de frontera F1. La técnicas fundamentales utilizadas se derivan de la teoría de las inecuaciones variacionales parabólicas.

Autores: Sandra Martínez, Noemi Wolanski
Lugar: Universidad de Buenos Aires
Expositor: Sandra Martínez
Conferencia Invitada

Un problema de perturbación singular en espacios de Orlicz

Estudiamos el siguiente problema de perturbación singular. Para todo $\varepsilon > 0$, sea u^ε la solución de,

$$\mathcal{L}u^\varepsilon := \operatorname{div}\Big(\frac{g(|\nabla u^\varepsilon|)}{|\nabla u^\varepsilon|}\nabla u^\varepsilon\Big) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon), \quad u^\varepsilon \geq 0. \tag{P_ε}$$

Una solución de (P_ε) es una función $u^\varepsilon \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega g(|\nabla u^\varepsilon|)\frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|}\nabla\varphi\, dx = -\int_\Omega \varphi\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)\, dx.$$

Aquí $\beta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$, donde $\beta \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, $\beta > 0$ en $(0,1)$ y $\beta = 0$ en otro caso.

Las condiciones que asumimos para g fueron introducidas por G.Lieberman y son las siguientes: existen constantes $\delta, g_0 > 0$ tales que

$$\delta \leq \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0 \quad \forall\, t > 0.$$

Estudiamos el problema límite, cuando $\varepsilon \to 0$. Como en trabajos previos con $\mathcal{L} = \Delta$ o $\mathcal{L} = \Delta_p$ probamos, bajo ciertas hipótesis apropiadas, que cualquier función límite es una solución débil del problema de frontera libre,

$$\mathcal{L}u = 0 \text{ en } \Omega \cap \{u > 0\}, \quad u = 0,\ |\nabla u| = \lambda^* \text{ en } \Omega \cap \partial\{u > 0\},$$

donde $\lambda^* g(\lambda^*) - G(\lambda^*) = \int \beta$ y $G' = g$.

Es más, cuando la función límite no degenera probamos que la frontera reducida es una superficie $C^{1,\alpha}$. Este resultado es nuevo aún en el caso del p-laplaciano. Además mostramos dos ejemplos donde esta condición de no degeneración se satisface siempre.

Autores: Pablo Amster, Leonardo Vicchi
Lugar: Universidad de Buenos Aires
Expositor: Leonardo Vicchi

Un problema de contorno en la semirrecta para un modelo de electrodifusión

En la teoría de electro-difusión se propone un modelo acoplado de la forma

$$n_i' = \nu_i n_i p - c_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$p' = \sum_{i=1}^{m} \nu_i n_i,$$

en donde n_i es el número de iones con la misma carga, p es el campo eléctrico, y ν_i, c_i son constantes apropiadas.

El caso $m = 2$ da lugar a una ecuación de la forma:

$$p''(x) - (\nu_1 + \nu_2)p(x)p'(x) + \frac{1}{2}\nu_1\nu_2 p^3(x) - \nu_1\nu_2 cxp(x) + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 = 0.$$

A partir de la resolución del problema de Dirichlet asociado a esta ecuación para un intervalo acotado arbitrario, obtenemos una solución definida sobre la semirrecta $[0, \infty)$ por medio de un argumento diagonal. Probaremos la existencia de soluciones con condiciones $p(0) = p_0$, $p(\infty) = 0$, empleando el método de super y subsoluciones.

Autores: Griselda R. Itovich, Jorge L. Moiola
Lugar: Dpto. de Matemática, FaEA, Universidad Nacional del Comahue, Dpto. de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur y CONICET
Expositor: Griselda R. Itovich

Bifurcación de Hopf en ecuaciones diferenciales con retardos: Un enfoque en el dominio frecuencia

Se estudia la existencia de soluciones periódicas en un sistema de ecuaciones diferenciales con retardos (EDR) autónomo, esto es

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), \cdots, x(t-\tau_m), \lambda), \tag{15}$$

donde $x \in R^n, \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ f : R^{n(m+1)} \times R \to R^n,\ f \in C^2,\ \tau_i \in R^+$.

Este tipo de sistemas aparece frecuentemente en relación con ciertas aplicaciones de ingeniería y de biología. La complejidad presente en modelos como (15) es mucho mayor que la observada en ecuaciones diferenciales ordinarias pues basta considerar $n = m = 1$ para hallar movimiento periódico, cuasi-periódico o bien comportamiento caótico. Debido a la dependencia con el pasado, una solución queda definida a través de una función inicial definida en un intervalo de longitud τ donde $\tau = \max\limits_{1 \le i \le m} (\tau_i)$. Esta función pertenece a $C([-\tau, 0], R^n)$, y determina todo estado futuro del sistema considerado. De esta forma, se trata de resolver un problema infinito-dimensional. El tratamiento matemático de estas ecuaciones y de sus soluciones resulta de aplicaciones del análisis funcional y de la teoría de variable compleja.

La bifurcación de Hopf en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias puede estudiarse en el dominio de la frecuencia por medio del Teorema gráfico de Hopf, que resulta de la aplicación de ideas de la teoría de sistemas realimentados y de técnicas de balance de armónicos. Este teorema puede extenderse para analizar el mismo fenómeno en sistemas como (15). Con esta metodología, se definen ciertas funciones características a través de las cuales también se pueden analizar bifurcaciones estáticas, efectuar continuaciones de curvas de Hopf o detectar degeneraciones de Hopf. En particular, se pueden obtener fórmulas aproximadas de alto orden para las soluciones periódicas, empleando las generalizaciones del teorema de Hopf para EDR. Cada aproximación permitirá estudiar el operador de monodromía de la solución periódica, de cuyo espectro resultará el análisis de su estabilidad. Entre los infinitos autovalores, conocidos como multiplicadores de Floquet, aparece el multiplicador trivial 1. La precisión con la que éste se obtiene, puede ser considerada como una medida para evaluar la metodología empleada. Siguiendo una curva de bifurcaciones de Hopf, el análisis de la evolución de los multiplicadores permite detectar cambios de estabilidad y con ello bifurcaciones de ciclos locales. Los resultados alcanzados muestran una clara correspondencia con los del programa DDE-BIFTOOL v. 2.00 [1], específico de esta temática.

Referencias:
[1] Engelborghs, K., Luzyanina, T. and Samaey, G., DDE-BIFTOOL v. 2.00: a Matlab package for numerical analysis of delay differential equations, Report TW 330, Dept. of Comp. Science, K.U.Leuven, Belgium, 2001. Disponible en:
http://www.cs.kuleuven.be/~twr/research/software/delay/ddebiftool.shtml.

Autores: M. Gaudiano, T. Godoy, C. Turner
Lugar: UNC
Expositor: M. Gaudiano

Comportamientos Asintóticos en el Problema de Frontera Libre de la Difusión de Solvente en Polímeros

El estudio de la difusión de solventes en polímeros es de gran utilidad en la industria del plástico. Matemáticamente, estos procesos pueden ser modelados como problemas de frontera libre bajo diversas condiciones de contorno. Aquí presentaré cómo una condición de borde del tipo convectiva, con coeficiente de transferencia h, puede transformarse asintóticamente en una condición tipo Dirichlet cuando $h \to \infty$. La convergencia es uniforme.

Autores: Julián Fernández Bonder, Juan Pablo Pinasco
Lugar: Dto. Matemática, FCEN-UBA
Expositor: Julián Fernández Bonder
Conferencia Invitada

Estimaciones de autovalores para sistemas elípticos cuasilineales

En esta charla mostraremos cotas inferiores explícitas para los autovaolres de Dirichlet de sistemas elípticos cuasilineales de tipo resonantes con pesos en térmonos de los autovalores del $p-$Laplaciano. Además mostraremos cotas asintóticas de los autovalores por medio del estudio de la función espectral que es definida como la cantidad de autovalores menores que un número dado.

Autores: Tomás Godoy, Uriel Kaufmann
Lugar: FaMAF - UNC
Expositor: Uriel Kaufmann
Conferencia Invitada

Soluciones positivas a problemas no lineales de tipo elíptico o parabólico periódico

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio suave y acotado. Estudiamos existencia y no existencia de soluciones positivas a problemas periódicos parabólicos semilineales con condición de borde Dirichlet de la forma

$$\begin{cases} Lu = h(x,t,u) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} & \end{cases}$$

para una clase de funciones Caratheodory $h : \Omega \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tales que $h\,(.,0) = 0$ y $\lim_{\xi\to 0^+} \xi^{-1} h\,(.,\xi) = 0$ ó $\pm\infty$. Todos los reultados permanecen válidos para los correspondientes problemas elípticos.

Autores: P. Amster, P. De Nápoli
Lugar: Universidad de Buenos Aires
Expositor: Pablo De Nápoli

CONFERENCIA INVITADA

UN PROBLEMA RESONANTE PARA UN SISTEMA CON CONDICIONES PERIÓDICAS

Estudiamos el siguiente sistema no lineal de ecuaciones de segundo orden para una función vectorial $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^N$ que satisface:

$$u'' + m^2 u + g(u) = p(t) \qquad 0 < t < 2\pi$$

bajo condiciones periódicas:

$$u(0) = u(2\pi), \qquad u'(0) = u'(2\pi).$$

Suponemos que que g es continua y acotada, y que $m \neq 0$ es entero, situación que se conoce en la literatura como un caso de resonancia en un autovalor de orden superior.

Para el caso $N = 1$, Lazer y Leach [LL] probaron que si existen los límites $g(\pm\infty)$ en infinito, entonces una condición suficiente para la existencia de soluciones es:

$$\sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2} < \frac{2}{\pi}\left|g(+\infty) - g(-\infty)\right|,$$

en donde α_p and β_p son los m-ésimos coeficientes de Fourier de p.

En este trabajo presentamos una generalización de este resultado para el caso $N > 1$, bajo una condición apropiada en el grado de la extensión de g a la esfera infinita.

[LL] A. Lazer, D. Leach, Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance, Ann. Mat. Pura Appl. 82 (1969), pp. 49-68.

Autores: Alberto Déboli, Pablo Amster
Lugar: Universidad de Buenos Aires
Expositor: Alberto Déboli

UN PROBLEMA DE NEUMANN EN LA SEMIRECTA

En este trabajo probamos existencia de solución de un problema tipo Neumann en la semirecta que presenta la particularidad de que en la ecuación intervienen los datos de contorno:

$$\begin{cases} u'' = f(t, u, u(0), u(\infty)) & \text{en } (0,\infty) \\ u'(0) = u_0, \; u'(\infty) = 0 \end{cases}$$

donde $f \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ y $u \in C^2([0,\infty); \mathbb{R})$ bajo la hipótesis de existencia de sub y super-soluciones globales ordenadas.

Un antecedente de este problema se halla en el artículo de Thompson [T] en el cual se prueba existencia y unicidad de solución bajo condiciones apropiadas para f en un intervalo acotado usando un argumento del tipo *shooting*.

Para realizar la prueba, en una primer etapa probamos solución para todo intervalo acotado recurriendo a la teoría del punto fijo de Schauder y en una segunda etapa construimos una solución en la semirecta positiva usando el método de la diagonal.

[T] Thompson B. H. Existence for a two Point Boundary Value Problem Arising In Electrodifusion. Acta Mathematica Scientia 8 (1988), 4, 373-387.

Autores: Fernando E. Menzaque, Cristina V. Turner
Lugar: FaMAF-UNC
Expositor: Fernando E. Menzaque

Análisis de estabilidad para flujos de dos y tres capas

En este trabajo se analizan modelos para fluidos estratificados de dos y tres capas teniendo en cuenta el balance hidrostático.

Las ecuaciones diferenciales que modelan el problema de n capas en general, pueden ser escrita de la siguiente forma : [1]

$$
\begin{aligned}
{S^j}_t - \left(\left(1 - S^j\right) u^j\right)_x &= 0 & (16)\\
{u^j}_t + u^j {u^j}_x + {M^j}_x &= 0\,, & (17)\\
\Delta_2 M^j &= S^j & (18)
\end{aligned}
$$

donde el espesor de cada capa es $h^j = 1 - S^j$, u^j es la correspondiente velocidad, la diferencia entre las densidades de dos capas ha sido normalizada a 1, y M^j es el llamado potencia de Montgomery dado por

$$M^j = h(p^{j+1} + p^{j-1}) + g\,\rho^j\,h(z^{j+1} + z^{j-1})\,. \qquad (19)$$

La variable p^j representa la presión en la interfase entre dos capas , z^j la altura , y $\Delta_2 M^j = M^{j+1} - 2M^j + M^{j-1}$.

Para el caso de dos capas se muestran las tranformaciones no lineales que mapean las ecuaciones del modelo de dos capas con tapas rígidas en las ecuaciones para aguas poco profundas.

Para flujos de dos capas períodico probaremos que para número de Richardson mayor que uno el fluido es no linearmente estable. Para flujos de tres capas mostraremos dominios de estabilidad local. Más aún para estos flujos se puede ver que no poseen un criterio de estabilidad no lineal como el caso de dos capas.

Referencias

[1] L. Chumakova, F. Menzaque, P. A. Milewski, R. R. Rosales, E. G. Tabak, C. V. Turner, “Shear instability for stratified hysdrostatic flows”, submitted, 2007.

[2] Howard, L. N., “Note on a paper of John W. Miles”, *J. Fluid Mech.*, **10**, 509, 1961.

[3] A. J. Majda, Michael Shefter, “Nonlinear instability of elementary stratified flows at large Richardson numbres”, *J. Fluid Mech.*, **10**, 2000.

[4] Miles, J. W., “On the stability of heterogeneous shear flows”, *J. Fluid Mech.*, **10**, 496, 1961.

[5] P. A. Milewski, E. G. Tabak, C. V. Turner, R. R. Rosales, F. Menzaque, “Nonlinear stability of two–layer flow”, *Comm. Math. Sci.*, **2**, 427–442, 2004.

Autores: O. Barraza, C. Ruscitti
Lugar: UNLP
Expositor: Oscar Barraza

Comportamiento asintótico de las soluciones de las ecuaciones de Boussinesq

En la transferencia natural convectiva, el calor es transportado entre una superficie sólida y un fluido que se mueve sobre ella. El movimiento del fluido puede ser laminar o turbulento, sin embargo, debido a las bajas velocidades que existen en el proceso de convección natural, generalmente el flujo laminar es el más frecuente. Este fenómeno puede ser modelizado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_t + (v \ . \ \nabla)v + \nabla p = \triangle v - \beta T + F, \\ \nabla \ . \ v = 0, \\ T_t + v \ . \ \nabla T = \triangle T, \\ v(0,x) = v_0(x), \ T(0,x) = T_0(x), \end{aligned}$$

denominado sistema de ecuaciones de Boussinesq viscoso.

Aquí, la variable temporal t pertenece al intervalo $[0, \infty)$, la variable espacial x pertenece a $\mathbb{R}^3$, el vector $v(t,x)$ es la velocidad desconocida del fluido y la función escalar $T(t,x)$ es la temperatura desconocida. Además, $F(t,x)$ es un fuerza externa dada, β es el vector proporcional al coeficiente de dilatación térmica del fluido y a la fuerza gravitacional, v_0 y T_0 son condiciones iniciales dadas.

En este trabajo, bajo ciertas hipótesis, se estudia el comportamiento asintótico de soluciones globales del sistema de Boussinesq en ciertos espacios de Banach abstractos.

Autores: T. Godoy, U. Kaufmann, S. Paczka
Lugar: FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba
Expositor: Tomás Godoy
Conferencia Invitada

Una fórmula para autovalores principales de problemas parabólico periódicos con peso

Sea V un dominio suave en R^N y sea $m = m(x,t)$ una función definida sobre VxR. Asúmase que $m(x,t)$ es T-periódica en t, que m restringida a $V \times (0,T)$ pertenece a $L^r(V \times (0,T))$ para algún $r > N+2$ y que $\int_{(0,T)} esssup_{x \in V} m(x,t)dt > 0$. Sea L un operador parabólico con coeficientes T periódicos de la forma

$$Lu = u_t - div(A\nabla uu) + < b, \nabla u > + c_0 u.$$

Asumiendo que A es uniformemente elíptica sobre VxR, que c_0 es no negativa y también condiciones standard de regularidad sobre los coeficientes de L, demostramos que el autovalor principal positivo $\lambda_1(m)$ del problema

$$Lu = \lambda_1(m)muenVR, u = 0en\partial VR, u > 0enVR, uT - periodica$$

puede ser expresado como

$$\lambda_1(m) = inf_u(/Int(< A\nabla u, \nabla u > + < b, \nabla u > u + c_0u^2 > + u^2(< A\nabla W_u, \nabla W_u >)$$

donde U es un apropiado espacio de funciones y W_u es una solución de la ecuación

$$(u^2)_t - div(u^2(2A/nablaW_u - b)) = 0.$$
