Matrices totalmente positivas

Agustín García Iglesias

Índice

1. Introducción.

Este capítulo está basado en un trabajo de T. Ando [1], aparecido en 1987. En la sección 3 se introducen las nociones de positividad total y regularidad de signo, así como criterios efectivos para la positividad total. La sección 4 esta dedicada al estudio de varios métodos de producción de nuevas matrices totalmete positivas a partir de otras, dadas. Se da en la sección 5 un criterio simple para que una matriz totalmente positiva tenga una potencia estrictamente totalmente positiva. En la sección 6 se estudian la relación entre la regularidad de signo de una matriz y la propiedad de disminución de variación que tiene el mapa que ésta induce. En la sección 7 los teoremas mejorados del tipo de Perrón Forbenius son establecidos para matrices totalmente positivas. Finalmente se presentan ejemplos, algunos sin demostración, de matrices totalmente positivas en la sección 8.

2. Productos alternados.

Comenzaremos fijando ciertas convenciones de notación conocidas.

1. Para cada $n \geq 1$, llamaremos $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n$ (o $\mathbb{R}^n$), el espacio vectorial (real o complejo) de vectores $x = (x_i)_{i \in \mathbb{I}_n}$, con el producto interno usual. Denotaremos por $e_1^{(n)}, \ldots, e_n^{(n)}$ a los vectores de la base canónica de $\mathbb{H}_n$.

2. Un vector $x \in \mathbb{H}_n$ es *positivo* (respectivamente, *estrictamente positivo*), en símbolos, $x \geq 0$ (resp. $x > 0$), si $x_i \geq 0$ (resp. $x_i > 0$) para todo $i \in \mathbb{I}_n$.

3. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{C}^n$, denotaremos por $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$ a la matriz $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ tal que $C_i(A) = a_i$. Notar que A el la matriz inducida por la aplicación $A : \mathbb{H}_m \to \mathbb{H}_n$ dada por $a_j = Ae_j^{(m)}$ $j \in \mathbb{I}_n$, relativa a la base canónica de ambos espacios.

4. Un matriz $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ se dice *positiva* (*estrictamente positiva*), en símbolos $A \geqslant 0$, si transforma todo vector positivo no nulo a un vector positivo (estrictamente positivo). Entonces A es positiva (estrictamente positiva) si $a_i \geqslant 0$ (resp. $a_i > 0$), $i \in \mathbb{I}_m$, o equivalentemente, si $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$), $i \in \mathbb{I}_m$, $j \in \mathbb{I}_n$.

5. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\bigotimes^k \mathbb{H}_n$, el *espacio k-tensorial* sobre $\mathbb{H}_n$. El producto interno sobre $\bigotimes^k \mathbb{H}_n$ está determinado por
$$\langle x_1 \otimes x_2 \cdots \otimes x_k, y_1 \otimes y_2 \cdots \otimes y_k \rangle = \prod_{k}^{i=1} \langle x_i, y_i \rangle \quad , \tag{1}$$
para $x_1, \ldots, \ x_k, \ y_1, \ldots, \ y_k \in \mathbb{H}_n$.

6. La base canónica ortonormal de $\bigotimes^k \mathbb{H}_n$ es por definición
$$\left\{ e_{\alpha_1}^{(n)} \otimes e_{\alpha_2}^{(n)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_k}^{(n)} \ : \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{I}_n^k \right\}.$$

7. Todo operador $A : \mathbb{H}_m \to \mathbb{H}_n$ induce un operador de $\bigotimes^k A : \bigotimes^k \mathbb{H}_m \to \bigotimes^k \mathbb{H}_n$, llamado *potencia k-tensorial*, determinado por la fórmula
$$\bigotimes^k A \ (x_1 \otimes x_2 \cdots \otimes x_k) = Ax_1 \otimes Ax_2 \otimes \cdots \otimes Ax_k \ , \tag{2}$$
para $x_1, \ldots, \ x_k \in \mathbb{H}_n$.

8. Si B es otro operador lineal de $\mathbb{H}_l$ a $\mathbb{H}_m$, se sigue que $\bigotimes^k (AB) = (\bigotimes^k A) \cdot (\bigotimes^k B)$.

9. Sea $\mathbf{S}_k$ el *grupo simétrico* de grado k, esto es el grupo de todas la permutaciones de $\mathbb{I}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Cada $\pi \in \mathbf{S}_k$ da lugar a un operador linear $P_\pi^{(n)} \in \mathcal{U}(\bigotimes^k \mathbb{H}_n)$, dado por
$$P_\pi^{(n)}(x_1 \otimes x_2 \cdots \otimes x_k) = x_{\pi^{-1}(1)} \otimes x_{\pi^{-1}(2)} \cdots \otimes x_{\pi^{-1}(k)} \ , \tag{3}$$
para $x_1, \ldots, \ x_k \in \mathbb{H}_n$.

Definiremos a continuación las nociones básicas de productos alternados

Definición 2.1. 1. Un k-tensor $x \in \bigotimes^k \mathbb{H}_n$ se dice *alternado* si

$$P_\pi^{(n)} x = \operatorname{sgn}(\pi) x \quad \text{para toda} \quad \pi \in \mathbf{S}_k \ .$$

donde $\operatorname{sgn}(\pi) = \pm 1$ de acuerdo a si π es una permutación par o impar.

2. El subespacio de todos los k-tensores alternados sobre $\mathbb{H}_n$ es llamado el espacio *k-alternado* (o k-ésimo *Grassmann*) sobre $\mathbb{H}_n$, y denotado por $\Lambda^k \mathbb{H}_n$. La proyección ortogonal $\mathbf{P}_k^n$ de $\bigotimes^k \mathbb{H}_n$ sobre $\Lambda^k \mathbb{H}_n$ está dada por

$$\mathbf{P}_k^n = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \ \mathbf{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) \ \mathbf{P}_\pi^n.$$

3. Dados $x_1, \dots, \ x_k \in \mathbb{H}_n$, se define el k-tensor

$$x_1 \wedge x_2 \cdots \wedge x_k := \mathbf{P}_k^n \ (x_1 \otimes x_2 \ldots \otimes x_k).$$

llamado k-ésimo *producto alternado* de la k-upla ordenada $\{x_1, x_2 \dots, x_k\}$. Luego, se sigue de la definición que

$$x_{\pi^{-1}(1)} \wedge x_{\pi^{-1}(2)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi^{-1}(k)} = \operatorname{sgn}(\pi) x_1 \wedge x_2 \cdots \wedge x_k. \tag{4}$$

donde $\operatorname{sgn}(\pi)$ es el signo definido anteriormente. $\diamondsuit$

Proposición 2.2. *Sean $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{H}_n$. Entonces*

$$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k, y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_k \rangle = \frac{1}{k!} \ \det \ \big(\langle x_i, y_j \rangle \big)_{i,j \in \mathbb{I}_k} \tag{5}$$

En particular, se tiene que el conjuntos $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k = 0$.

Demostración. Es consecuencia de la ecuación (1), por la definición de determinante. En efecto, si $D = \langle x_1 \cdots \wedge x_k, y_1 \wedge \cdots \wedge y_k \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} D &= \left\langle \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) x_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi^{-1}(k)}, \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) y_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma^{-1}(k)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\pi, \sigma \in \mathbf{S}_k} \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^k \big\langle x_{\pi^{-1}(i)}, y_{\sigma^{-1}(i)} \big\rangle \\ &= \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\pi, \sigma \in \mathbf{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma \pi^{-1}) \prod_{j=1}^k \big\langle x_{\sigma \pi^{-1}(j)}, y_j \big\rangle \\ &= \frac{1}{k!} \ \sum_{\gamma \in \mathbf{S}_k} \operatorname{sgn}(\gamma) \prod_{j=1}^k \big\langle x_{\gamma(j)}, y_j \big\rangle = \frac{1}{k!} \ \det \ \big(\langle x_i, y_j \rangle \big)_{i,j \in \mathbb{I}_k} \ . \end{aligned}$$

En donde la última igualdad surge de considerar la aplicación $\mathbf{S}_k \times \mathbf{S}_k \to \mathbf{S}_k$ dada por $(\sigma, \pi) \mapsto \gamma = \sigma \pi^{-1}$. Notar que cada $\gamma \in \mathbf{S}_k$ es imagen de $k!$ elementos, a saber, los de la forma $(\gamma\pi, \pi)$, parametrizados por $\pi \in \mathbf{S_k}$. $\square$

Observación 2.3. Se sigue de (2) y (3) que, para cada operador linear $A : \mathbb{H}_m \to \mathbb{H}_n$, su k-potencia tensorial "mezcla" $\mathbf{P}_\pi^n$ y $\mathbf{P}_\pi^n$ en el siguiente sentido:

$$\mathbf{P}_\pi^n \left(\bigotimes^k A \right) = \left(\bigotimes^k A \right) \mathbf{P}_\pi^m \qquad \text{para toda} \qquad \pi \in \mathbf{S}_k \ .$$

Así, $\bigotimes^k A$ mezcla las proyecciones $\mathbf{P}_k^{(n)}$ y $\mathbf{P}_k^{(m)}$:

$$\mathbf{P}_k^{(n)} \left(\bigotimes^k A \right) = \left(\bigotimes^k A \right) \mathbf{P}_k^{(n)}.$$

Por lo tanto $\displaystyle\bigotimes^k A(\Lambda^k \mathbb{H}_n) \subseteq \Lambda^k \mathbb{H}_n$. ♢

Definición 2.4. La restricción de $\bigotimes^k A$ al espacio alternado $\Lambda^k \mathbb{H}_n$ es llamada la *k-potencia exterior* de A, y denotada por $\Lambda^k A \in L(\Lambda^k \mathbb{H}_n)$. Por (2), la potencia exterior $\Lambda^k A$ está determinada por la fórmula:

$$(\Lambda^k A)(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k) = (Ax_1) \wedge (Ax_2) \wedge \cdots \wedge (Ax_k), \tag{6}$$

para $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{H}_n$. ♢

Observación 2.5. Si I_n es la identidad de $\mathbb{H}_n$, entonces

$$\Lambda^k I_n = I_{\Lambda^k \mathbb{H}_n} \tag{7}$$

Se sigue de (2) o (6) que si $B : \mathbb{H}_l \to \mathbb{H}_m$,

$$\Lambda^k (AB) = (\Lambda^k A)(\Lambda^k B) \tag{8}$$

Una consecuencia de (7) y (8) es que si $A \in \mathcal{G}l(n)$, entonces $\Lambda^k A$ es inversible y

$$(\Lambda^k A)^{-1} = \Lambda^k A^{-1} \tag{9}$$

♢

Definición 2.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{I}_n$.

1. Notamos por $Q_{k,n}$ al conjunto de sucesiones estrictamente crecientes de k enteros elegidos en $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$Q_{k,n} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{I}_n^k \ : \ 1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k \le n \ \right\}.$$

2. Se define la relación de orden entre dos elementos α y β de $Q_{k,n}$ dada por

$$\alpha \le \beta \quad \text{si} \quad \alpha_i \le \beta_i \ , \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{I}_k \ .$$

3. Dado $\alpha \in Q_{k,n}$, se define su *complemento* $\alpha' = \mathbb{I}_n \setminus \alpha$, ordenado de manera creciente. Notar que $\alpha' \in Q_{n-k,n}$.

4. Dados $\alpha \in Q_{k,n}$ y $\beta \in Q_{l,n}$ tales que $\alpha \cap \beta = 0$, su unión $\alpha \cup \beta$ estará siempre ordenada crecientemente para ser un elemento de $Q_{k+l,n}$.

5. Para cada $\alpha \in Q_{k,n}$ su *número de dispersión* $d(\alpha)$ está definido por:

$$d(\alpha) := \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i - 1) = \alpha_k - \alpha_1 - (k-1), \tag{10}$$

   con la convención $d(\alpha) = 0$ para $\alpha \in Q_{1,n}$. Entonces $d(\alpha) = 0$ significa que α consiste de k enteros consecutivos.

6. Para $\alpha \in Q_{k,n}$, la $\alpha -$ *proyección* de un vector $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ es el vector en $\mathbb{C}^k$ con entradas $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$.

7. El espacio de todas las α-proyecciones es denotado por $\mathbb{H}_\alpha$. Es decir, $\mathbb{H}_\alpha = \mathbb{C}^\alpha = \mathbb{H}_k$, pero indexado por $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. $\diamondsuit$

Notaciones para submatrices: Sean $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, $\alpha \in Q_{k,n}$, y $\beta \in Q_{l,n}$. Entonces denotaremos por $A[\alpha|\beta]$ a la submatriz de $k \times l$ de A que se obtiene usando filas numeradas por α y columnas numeradas por β. Si se considera a A como una función de $\mathbb{H}_m$ en $\mathbb{H}_n$, entonces $A[\alpha|\beta]$ denota a la función inducida, de $\mathbb{H}_\beta$ en $\mathbb{H}_\alpha$. Cuando $\alpha = \beta$, $A[\alpha|\beta]$ es simplemente denotado por $A[\alpha]$. En más, utilizaremos las siguientes notaciones:

$$A[\alpha|\beta) := A[\alpha|\beta'], \qquad A(\alpha|\beta] := A[\alpha'|\beta],$$
$$A(\alpha|\beta) := A[\alpha'|\beta'], \qquad A(\alpha) := A[\alpha'|\alpha'].$$

y

$$A[-|\beta] := A[1,2,\ldots,n|\beta], \qquad A[\alpha|-] := A[\alpha|1,2,\ldots,m],$$
$$A[-|\beta) := A[1,2,\ldots,n|\beta'], \qquad A(\alpha|-] := A[\alpha'|1,2,\ldots,m].$$

Dada $\alpha \in Q_{k,n}$, usaremos la abreviación:

$$\mathbf{e}_\alpha^\wedge \;=\; \mathbf{e}_\alpha^{(n)\,\wedge} := e_{\alpha_1}^{(n)} \wedge e_{\alpha_2}^{(n)} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}^{(n)}. \tag{11}$$

Luego, por (5), $\{\sqrt{k!}\ \mathbf{e}_\alpha^\wedge : \alpha \in Q_{k,n}\}$ es un sistema ortonormal completo del k-espacio alternado sobre $\mathbb{H}_n$, y se toma como la base canónica ortonormal de $\Lambda^k\mathbb{H}_n$. Así las nociones de positividad para un k-tensor alternado y un operador linear entre espacios alternados siempre se refiere a estas base canónica. De acuerdo a (5) y (11), para un operador linear A de $\mathbb{H}_m$ a $\mathbb{H}_n$, la entrada (α, β) de la matriz $\Lambda^k A$ está determinada por:

$$k! \left\langle (\Lambda^k A)\mathbf{e}_\beta^{(m)}, \mathbf{e}_\alpha^{(n)} \right\rangle = \det A[\alpha|\beta]. \tag{12}$$

De hecho,

$$\left(\Lambda^k A\right)_{\alpha,\beta} = \left\langle \Lambda^k \sqrt{k!}\ \mathbf{e}_\beta^{(m)}, \sqrt{k!}\ \mathbf{e}_\alpha^{(m)} \right\rangle = k! \left\langle \mathbf{e}_\beta^{(m)}, \mathbf{e}_\beta^{(m)} \right\rangle = \det\left[\left\langle Ae_{\beta_i}, e_{\alpha_j}\right\rangle\right] = \det A[\alpha|\beta].$$

Así $\Lambda^k A$ es positiva (estrictamente positiva), en símbolos $\Lambda^k A \geq 0$ (> 0), si y sólo si $\det A[\alpha|\beta] \geq 0$ (> 0), para todo $\alpha \in Q_{k,n}$, $\beta \in Q_{k,m}$, o equivalentemente si $a_{\beta_1} \wedge a_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge a_{\beta_k} \geq 0$ (> 0) para todo $\beta \in Q_{k,n}$. En lo que resta de esta sección, asumiremos que $n = m$, con lo que A y B serán matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Primero, la ley de multiplicación (8) produce, vía (12):

$$\begin{aligned}
\det(AB)[\alpha,\beta] &= k! \left\langle \Lambda^k AB\mathbf{e}_\beta^{(m)}, \mathbf{e}_\alpha^{(m)} \right\rangle = k! \left\langle \Lambda^k A \Lambda^k B \mathbf{e}_\beta^{(m)}, \mathbf{e}_\alpha^{(m)} \right\rangle \\
&= \left(\Lambda^k A \Lambda^k B\right)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma \in Q_{k,n}} \left(\Lambda^k A\right)_{\alpha\gamma} \left(\Lambda^k B\right)_{\gamma\beta} \\
&= \sum_{\gamma \in Q_{k,n}} \det A[\alpha|\gamma] \det B[\gamma|\beta].
\end{aligned}$$

Tenemos entonces la llamada fórmula de Cauchy Binnet:

$$\det(AB)[\alpha|\beta] = \sum_{\omega \in Q_{k,n}} \det A[\alpha|\omega] \det B[\omega|\beta] \quad \alpha,\ \beta \in Q_{k,n}\ . \tag{13}$$

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es a veces conveniente considerar su *adjunta* A^* y su *conversión* $A^\#$, cuyas entradas (i,j) están dadas por $\overline{a_{ji}}$ y $a_{n-i+1,n-j+1}$, respectivamente. Luego es inmediato de la definición que para $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ se tiene $\det A^*[\alpha|\beta] = \det \overline{A[\beta|\alpha]}$, lo cual sale de la fórmula (12) y $\det A^\#[\alpha|\beta] = \det A[\alpha^\#|\beta^\#]$, donde $(\alpha^\#)_i = n - \alpha_i + 1, i = 1, \ldots, k$ y análogamente para $\beta^\#$. Podemos ver esto de la siguienete manera:

$$\begin{aligned}
\det A^\#[\alpha|\beta] &= \left(\Lambda^k A^\#\right)_{\alpha\beta} = k! \left\langle \Lambda^k A^\# \mathbf{e}_\beta^{(m)}, \mathbf{e}_\alpha^{(m)} \right\rangle \\
&= k! \left\langle A^\# e_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge A^\# e_{\beta_k}, e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k} \right\rangle \\
&= k! \left\langle Ae_{m-\beta_1+1} \wedge \ldots \wedge A_{m-b_k+1}, e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k} \right\rangle \\
&= k! \left\langle \Lambda^k A^\# \mathbf{e}_{\beta^\#}^{(m)}, \mathbf{e}_\alpha^{(m)} \right\rangle = \left(\Lambda^k A\right)_{\alpha^\# \beta^\#} = \det A[\alpha^\#|\beta^\#]\ ,
\end{aligned}$$

ya que la columna β_i de $A^\#$ es la columna $n - \beta_i + 1$ de A, reordenada por $\alpha^\#$.

Enunciamos ahora el siguiente teorema, cuya demostración hemos visto anteriormente:

Teorema 2.7. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *con autovalores* $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$. *Entonces para cada* $1 \leq k \leq n$, *los autovalores de la matriz* $\Lambda^k A$ *están dados por*

$$\lambda_\alpha(\Lambda^k A) = \prod_{i=1}^k \lambda_{\alpha_i}(A)\ , \quad \alpha \in Q_{k,n}\ ,$$

contando las multiplicidades. Notar que $\dim \Lambda^k \mathbb{H}_n = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \# Q_{k,n}$.

3. Complementos de Schur e identidades asociadas a determinantes.

Definición 3.1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{I}_n$ y $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$.

1. Cuando $A[\alpha|\beta]$ es inversible, el *complemento de Schur* de $A[\alpha|\beta]$ en A, es la matriz $A/[\alpha|\beta] \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$, indexada por α' y β', dada por:
$$A/[\alpha|\beta] = A(\alpha|\beta) - A(\alpha|\beta]A[\alpha|\beta]^{-1}A[\alpha|\beta) \ . \tag{14}$$
2. Cuando $\alpha = \beta$, usaremos A/α en lugar de $A/[\alpha|\alpha]$. $\diamondsuit$

Definición 3.2. Sea $\alpha \in Q_{k,n}$.

1. Llamaremos $\operatorname{tr} \alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.
2. Llamaremos $\operatorname{sgn}(\alpha)$ al signo de la permutación $\pi \in \mathbf{S}_n$ dada por $\pi(\alpha_i) = i$ para $i \in \mathbb{I}_k$, y $\pi(\alpha'_j) = k + j$ para $j \in \mathbb{I}_{n-k}$. Por lo tanto,
$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \prod_{i=1}^{k}(-1)^{\alpha_i - i} = (-1)^{\operatorname{tr}\alpha - k(k+1)/2}. \tag{15}$$
En efecto, se puede ver que
$$\pi = (k, \dots, \alpha_k)(2, \dots, \alpha_2)(1, 2, \dots, \alpha_1),$$
donde $(a_1, \dots, a_r)$ denota al r-ciclo asociado. Esto se deduce de que el primer ciclo (que consta de $\alpha_1 - 1$ trasposiciones) manda α_1 al lugar 1. El segundo (que consta de $\alpha_2 - 2$ trasposiciones) manda α_2 al lugar 2 (observar que $(1, 2, \dots, \alpha_1)$ no movió a α_2). Se sigue así hasta mandar α_k al lugar k . Lo demás (los valores que toma en α') queda armado para producir la permutación π, porque se mantuvo su orden interno, y van a donde deben ir.
3. Sea $T_\alpha \in \mathcal{U}(n)$, la matriz de permutación asociada, dada por
$$\begin{cases} T_\alpha e_i = e_{\alpha_i} & \text{si} \quad i = 1, \dots, k \\ T_\alpha e_{k+j} = e_{\alpha'_j} & \text{si} \quad j = 1, \dots n-k \ . \end{cases} \tag{16}$$
Tenemos entonces que
$$\det T_\alpha = \operatorname{sgn}(\alpha). \tag{17}$$

Teorema 3.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{I}_n$ y $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$. Si $A[\alpha|\beta] \in \mathcal{G}l(k)$, entonces*
$$\det A = \operatorname{sgn}(\alpha) \ \operatorname{sgn}(\beta) \ \det A[\alpha|\beta] \ \det(A/[\alpha|\beta]). \tag{18}$$
Si, además, $A \in \mathcal{G}l(n)$, entonces $A/[\alpha|\beta] \in \mathcal{G}l(n-k)$ y
$$\Big(A/[\alpha|\beta]\Big)^{-1} = A^{-1}(\beta|\alpha) \ . \tag{19}$$

Demostración. Empecemos con el caso particular $\alpha = \beta = \mathbb{I}_k$. Como A admite la factorización

$$A = \begin{bmatrix} I_n[\alpha] & 0 \\ A(\alpha|\alpha]A[\alpha]^{-1} & I_n(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A[\alpha] & 0 \\ 0 & A/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n[\alpha] & A[\alpha]^{-1}A[\alpha|\alpha) \\ 0 & I_n(\alpha) \end{bmatrix} , \tag{20}$$

la ecuación ((18)) es inmediata, porque los factores de la derecha y de la izquierda en el lado derecho de (20) tienen determinante 1, mientras que el factor central tiene determinante igual a $\det A[\alpha]\ \det(A/\alpha)$. También, (19) sale de (20), tomando inversas a ambos lados.

Para probar el caso general, consideremos las matrices T_α, T_β definidas en (16). Luego, se sigue inmediatamente de (**??**) y (16) que, con una identificación de índices adecuada,

$$(T_\alpha^{-1}AT_\beta)[\mathbb{I}_k] = A[\alpha|\beta] \quad , \quad (T_\alpha^{-1}AT_\beta)(\mathbb{I}_k) = A(\alpha|\beta), \tag{21}$$

$$(T_\alpha^{-1}AT_\beta)(\mathbb{I}_k|\mathbb{I}_k] = A(\alpha|\beta], \quad \text{y} \quad (T_\alpha^{-1}AT_\beta)[\mathbb{I}_k|\mathbb{I}_k) = A[\alpha|\beta); \tag{22}$$

de donde

$$(T_\alpha^{-1}AT_\beta)/\mathbb{I}_k = A/[\alpha|\beta]. \tag{23}$$

Veamos (21), y las demás igualdades se muestran de manera análoga: dados $i, j \in \mathbb{I}_k$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\,(T_\alpha^{-1}AT_\beta)[\mathbb{I}_k]\,)_{ij} &= \langle T_\alpha^{-1}AT_\beta e_j, e_i\rangle = \langle AT_\beta e_j, T_\alpha e_i\rangle \\ &= \left\langle Ae_{\beta_j}, e_{\alpha_i}\right\rangle = A_{\alpha_i\beta_j} = A[\alpha|\beta]_{ij}\ . \end{aligned}$$

Ahora, (18) se sigue del caso particular probado arriba, usando (17). Finalmente, (19) resulta de la relación:

$$A^{-1}(\beta|\alpha) = (T_\beta^{-1}A^{-1}T_\alpha)(\mathbb{I}_k) = (T_\alpha^{-1}A^{-1}T_\beta)^{-1}(\mathbb{I}_k)\ , \tag{24}$$

y del caso particular citado. □

En el siguiente enunciado veremos que toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puede ser aproximada tanto como se quiera por matrices tales que todas sus submatrices cuadradas son inversibles. Esto será usado para obtener varias identidades de determinantes a partir del Teorema 3.3.

Lema 3.4. *Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$, existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que*

1. *$\|A - B\| < \varepsilon$, donde $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

2. *Todas las submatrices cuadradas de B son inversibles.*

Demostración. La cantidad total de submatrices cuadradas de A es $M = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Consideremos la función $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^M$ que asigna a cada $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la lista de los determinantes de todas sus submatrices cuadradas, en algún orden prefijado. Notar que ϕ es una función continua. Llamemos

$$\Gamma = \phi^{-1}\Big(\ \{a \in \mathbb{R}^M : \ a_i \neq 0 \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{I}_M\} \ \Big).$$

El enunciado del Lema equivale a decir que Γ es denso en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Llamemos, para cada $i \in \mathbb{I}_M$,

$$\Gamma_i = \phi^{-1}\Big(\ \{a \in \mathbb{R}^M : a_i \neq 0\} \ \Big).$$

Es claro que todos estos conjuntos son abiertos y que $\Gamma = \bigcap_{i=1}^{M} \Gamma_i$. Por otra parte, cada Γ_i es denso en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, porque $\mathcal{G}l(k)$ es denso en $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, si $\phi(A)_1 = \det A$, entonces $\Gamma_1 = \mathcal{G}l(n)$. El resultado se sigue de que una intersección finita de abiertos densos es densa. En efecto, si U y V son abiertos densos y Z es abierto, entonces $Z \cap U$ es un abierto no vacío. Entonces $(Z \cap U) \cap V = Z \cap (U \cap V) \neq \emptyset$ para todo abierto Z. Por lo tanto $U \cap V$ es denso. $\square$

3.5. Si $A \in \mathcal{G}l(n)$, entonces se cumple la *identidad de Jacobi*:

$$\det A^{-1}[\alpha|\beta] = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta)\frac{\det A(\beta|\alpha)}{\det A} \quad \text{para} \quad \alpha, \beta \in Q_{k,n} \ . \tag{25}$$

Esto se sigue de (19) y (18), aplicados a α' y β':

$$\det A^{-1} = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta) \det A^{-1}[\alpha|\beta] \det A^{-1}/[\alpha|\beta]$$

$$\Rightarrow \det A^{-1}[\alpha|\beta] = \frac{\operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta)}{\det A} \cdot (\det A^{-1}/[\alpha|\beta])^{-1} = \frac{\operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta)}{\det A} \cdot \det A(\beta|\alpha).$$

Cuando $k = 1$, (27) induce la identidad:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\det A(j|i)}{\det A} \ , \quad i, j \in \mathbb{I}_n \ , \tag{26}$$

conocida como la regla de Cramer. $\diamondsuit$

3.6. Sean $J_n = \operatorname{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}) \in \mathcal{U}(n)$, y $\omega, \alpha \in Q_{k,n}$. Luego

$$\det J_n[\alpha|\omega] = \delta_{\alpha\beta} \operatorname{sgn}(\alpha)(-1)^{k(k-1)/2} \ ,$$

donde $\delta_{\alpha,\beta} = 1$ o 0 de acuerdo a si $\alpha = \beta$ o $\alpha \neq \beta$. En efecto, si $\alpha \neq \omega$, en $J_n[\alpha|\omega]$ hay una columna de ceros, y por lo tanto su determinante es cero. Cuando $\alpha = \omega$ tenemos que, si p_α denota al número de elementos pares de α, entonces

$$p_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - 1) = \operatorname{tr} \alpha - k \quad (\text{módulo} \ \ 2) \ .$$

Luego

$$\det J_n[\alpha] = (-1)^{p_\alpha} = (-1)^{\operatorname{tr}\alpha - k} = \operatorname{sgn}(\alpha)\cdot(-1)^{k(k+1)/2-k} = \operatorname{sgn}(\alpha)(-1)^{k(k-1)/2} \ ,$$

lo que culmina la prueba. La siguiente igualdad se sigue de (25), usando (13):

$$\det(J_n A^{-1} J_n)[\alpha|\beta] = \frac{\det A(\beta|\alpha)}{\det A} \quad \text{para} \quad \alpha,\beta\in Q_{k,n} \ , \tag{27}$$

dado que $\det J_n[\alpha]\cdot\operatorname{sgn}(\alpha) = \det J_n[\beta]\cdot\operatorname{sgn}(\beta) = (-1)^{k(k-1)/2}$. $\diamondsuit$

3.7. La siguiente igualdad es válida para toda $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: dados $\alpha,\beta\in Q_{k,n}$,

$$\sum_{\omega\in Q_{k,n}} \operatorname{sgn}(\omega)\ \det A[\alpha|\omega]\ \det A(\beta|\omega) = \delta_{\alpha,\beta}\ \operatorname{sgn}(\beta)\ \det A \ . \tag{28}$$

De hecho, cuando A es inversible, por (25), el lado izquierdo de la (28) es igual a

$$\operatorname{sgn}(\beta)\ \det A \sum_{\omega\in Q_{k,n}} \det A[\alpha|\omega]\ \det A^{-1}(\omega|\beta) \ .$$

que coincide con el lado derecho por (13). $\diamondsuit$

3.8. Dados $\alpha,\beta\in Q_{k,n}$ y, además, $\omega,\tau\in Q_{l,n}$ tales que $\omega\subset\alpha',\tau\subset\beta'$, sean

$$\mu=\alpha\cup\omega=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{k+l}) \quad \text{y} \quad \nu=\beta\cup\tau=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{k+l})\in Q_{k+l,n} \ .$$

Existen entonces γ y $\sigma\in Q_{k,k+l}$ tales que $\alpha_i=\mu_{\gamma_i}$ y $\beta_i=\nu_{\sigma_i}$, $i\in\mathbb{I}_k$. Luego definimos

$$\operatorname{sgn}(\alpha/\alpha\cup\omega) := \operatorname{sgn}(\gamma) = (-1)^{\operatorname{tr}\gamma - k(k+1)/2}, \quad \operatorname{sgn}(\beta/\beta\cup\tau) := \operatorname{sgn}(\sigma) \ . \tag{29}$$

Con estas notaciones, se tiene que

$$\det A[\alpha|\beta]\det\Big((A/[\alpha|\beta])[\omega|\tau]\Big) = \operatorname{sgn}(\alpha/\alpha\cup\omega)\operatorname{sgn}(\beta/\beta\cup\tau)\det A[\alpha\cup\omega|\beta\cup\tau] \tag{30}$$

En efecto, consideremos la matriz $B=(a_{\mu_i\nu_j})_{i,j\in\mathbb{I}_{k+l}}\in\mathcal{M}_{k+l}(\mathbb{R})$. Entonces vemos que (30) coincide con (18) para B,γ,σ en lugar de A,α,β, respectivamente. De hecho, como $B=A[\mu|\nu]=A[\alpha\cup\omega|\beta\cup\tau]$, entonces $B[\gamma|\sigma]=A[\alpha|\beta]$ y, por otra parte,

$$\begin{aligned} B/[\gamma|\sigma] &= B(\gamma|\sigma) - B(\gamma|\sigma]\,B[\gamma|\sigma]^{-1}\,B[\gamma|\sigma) \\ &= A(\alpha|\beta)[\omega|\tau] - A(\alpha|\beta]\,A[\alpha|\beta]^{-1}\,A[\alpha|\beta)[\omega|\tau] \\ &= (A/[\alpha|\beta])[\omega|\tau] \ . \end{aligned}$$

Una consecuencia inmediata es la siguiente caracterización de las entradas de un complemento de Schur: Dados $\alpha,\beta\in Q_{k,n}$, se tiene

$$\{A/[\alpha|\beta]\,\}_{(\alpha'_i,\beta'_j)} = \operatorname{sgn}(\alpha/\alpha\cup\{\alpha'_i\})\ \operatorname{sgn}(\beta/\beta\cup\{\beta'_j\})\frac{\det A[\alpha\cup\{\alpha'_i\}|\beta\cup\{\beta'_j\}]}{\det A[\alpha|\beta]} \tag{31}$$

3.9. Más aún, dados $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, se cumple la *identidad de Sylvester*:

$$\det\Big(\big\{\det A[\alpha \cup \{\alpha'_i\} | \beta \cup \{\beta'_j\}]\big\}_{i,j \in \mathbb{I}_{n-k}}\Big) = \det A \ \det A[\alpha|\beta]^{n-k-1} \tag{32}$$

De hecho, con $\xi_{\alpha'_i} = \operatorname{sgn}(\alpha/\alpha \cup \{\alpha'_i\})$ y $\eta_{\beta'_j} = \operatorname{sgn}(\beta/\beta \cup \{\beta'_j\})$, $i, j \in \mathbb{I}_{n-k}$, se sigue de (31) que el lado izquierdo de (32) es igual a

$$\det\Big[\det A[\alpha|\beta]\,(A/[\alpha|\beta])_{ij} \operatorname{sgn}(\alpha/\alpha \cup \{\alpha'_i\}) \operatorname{sgn}(\beta/\beta \cup \{\beta'_i\})\Big] =$$

$$\det A[\alpha|\beta]^{n-k} \det[\operatorname{diag}(\xi_{\alpha'_1}, \xi_{\alpha'_2}, \ldots, \xi_{\alpha'_{n-k}}) A/[\alpha|\beta] \operatorname{diag}(\eta_{\beta'_1}, \eta_{\beta'_2}, \ldots, \eta_{\beta'_{n-k}})] =$$

$$\det A[\alpha|\beta]^{n-k-1} \det A[\alpha|\beta] \det(A/[\alpha|\beta]) \prod_{i=1}^{n-k} \operatorname{sgn}(\alpha/\alpha \cup \{\alpha'_i\}) \times \prod_{i=1}^{n-k} \operatorname{sgn}(\beta/\beta \cup \{\beta'_i\}) \ .$$

La fórmula (32) se sigue de (18) y el siguiente resultado: $\diamondsuit$

Lema 3.10. *Sea $\alpha \in Q_{k,n}$. Entonces*

$$\prod_{i=1}^{n-k} \operatorname{sgn}(\alpha/\alpha \cup \{\alpha'_i\}) = \operatorname{sgn}(\alpha) \ . \tag{33}$$

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{I}_{n-k}$, sea $\gamma^i \in Q_{k,k+1}$, definido como en 3.8 para α y $\alpha \cup \{\alpha'_i\}$. Luego $\operatorname{sgn}(\alpha/\alpha \cup \{\alpha'_i\}) = \operatorname{sgn}(\gamma^i) = (-1)^{\operatorname{tr}\gamma^i - k(k+1)/2}$. Entonces

- Si $\alpha'_i < \alpha_1$, entonces $\operatorname{tr}\gamma^i = 2 + \cdots + k + (k+1) = \dfrac{(k+2)(k+1)}{2} - 1$.
- Si $\alpha_1 < \alpha'_i < \alpha_2$, $\operatorname{tr}\gamma^i = 1 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \dfrac{(k+2)(k+1)}{2} - 2$.
- ....
- Si $\alpha_{k-1} < \alpha'_i < \alpha_k$, $\operatorname{tr}\gamma^i = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + (k+1) = \dfrac{(k+2)(k+1)}{2} - k$.
- Si $\alpha_k < \alpha'_i$, $\operatorname{tr}\gamma^i = 1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Resumiendo tenemos que, llamando $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_{k+1} = \infty$,

$$\operatorname{tr}\ \gamma^i - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} - j = k - j + 1 \ , \quad \text{si} \quad \alpha_{j-1} < \alpha'_i < \alpha_j \ .$$

Como $\#\{i : \alpha'_i < \alpha_1\} = (\alpha_1 - 1)$, $\#\{i : \alpha_{j-1} < \alpha'_i < \alpha_j\} = (\alpha_j - \alpha_{j-1} - 1)$ (para todo $2 \le j \le k$), y $\#\{i : \alpha_k < \alpha'_i\} = n - \alpha_k$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-k}\Big(\operatorname{tr}\gamma^i - \frac{k(k+1)}{2}\Big) &= \sum_{j=1}^{k}(k-j+1)(\alpha_j - \alpha_{j-1} - 1) + 0\cdot(n - \alpha_k) \\ &= \sum_{j=1}^{k}\alpha_j - \sum_{j=1}^{k}(k-j+1) = \operatorname{tr}\alpha - \frac{k(k+1)}{2} \ ,\end{aligned}$$

lo que prueba la fórmula (33). $\square$

3.11. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in Q_{n-1,n}$, $\omega \in Q_{n-2,n}$ y $\omega \subset \alpha$, entonces para todo $1 < q < n$,

$$\det A[\omega|1,n) \det A[\alpha|q) = \det A[\omega|1,q) \det A[\alpha|n) + \det A[\omega|q,n) \det A[\alpha|1). \qquad (34)$$

En efecto, fijemos $p \in \omega$ y sean $\mu := \omega - \{p\}$ y $\nu := \{1,q,n\}'$. Además sea $\{m\} = \alpha \setminus \omega$ y $B := A[\mu|\nu]$. Por (30) y (31), dividiendo ambos lados de (34) por $\det A[\mu|\nu]^2$ tenemos que el lado izquierdo de la igualdad es

$$\frac{\det B[\mu \cup \{p\}|\nu \cup \{q\}] \det B[\mu \cup \{p,m\}|\nu \cup \{1,n\}]}{\det B[\mu|\nu]^2} = \diamond$$

y el derecho,

$$\frac{\det B[\mu \cup \{p\}|\nu \cup \{n\}] \det B[\mu \cup \{p,m\}|\nu \cup \{1,q\}]}{\det B[\mu|\nu]^2} \quad +$$

$$\frac{\det B[\mu \cup \{p\}|\nu \cup \{1\}] \det B[\mu \cup \{p,m\}|\nu \cup \{q,n\}]}{\det B[\mu|\nu]^2} = \diamond\diamond \ .$$

Notar que

$$\diamond = (B/[\mu|\nu])_{pq} \ \varepsilon_1 \ \det\Big(\ (B/[\mu|\nu])[p,m|1,n]\Big) \ ,$$

donde $\varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(\mu/\mu \cup \{p\}) \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{q\}) \operatorname{sgn}(\mu/\mu \cup \{p,m\}) \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1,n\})$. Por otra parte,

$$\diamond\diamond = (B/[\mu|\nu])_{pn} \ \varepsilon_2 \ \det B/[\mu|\nu][p,m|1,q] + (B/[\mu|\nu])_{p1} \ \varepsilon_3 \ \det B/[\mu|\nu][p,m|q,n] \ ,$$

donde

$$\varepsilon_2 = \operatorname{sgn}(\mu/\mu \cup \{p\}) \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{n\}) \operatorname{sgn}(\mu/\mu \cup \{p,m\}) \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1,q\}) \qquad \text{y}$$

$$\varepsilon_3 = \operatorname{sgn}(\mu/\mu \cup \{p\}) \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1\}) \operatorname{sgn}(\mu/\mu \cup \{p,m\}) \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{q,n\}) \ .$$

Sacando como factor a $\operatorname{sgn}(\mu/\mu \cup \{p\})\operatorname{sgn}(\mu/\mu \cup \{p,m\})$, se ve que (34) es equivalente a la siguiente relación:

$$\begin{gathered}\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{q\})\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1,n\}) b_{pq} \det B[p,m|1,n] = \\ \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{n\})\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1,q\}) b_{pn} \det B[p,m|1,q] \quad + \\ \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1\})\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{q,n\}) b_{p1} \det B[p,m|q,n] \ .\end{gathered}$$

Por otra parte, se sigue de (29) que

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{q\})\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1,n\}) &= \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{n\})\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1,q\}) \\ &= \operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1\})\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{q,n\}) \\ &= (-1)^{q-1} \ .\end{aligned}$$

En efecto, supongamos que $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-3})$, con $2 < \nu_1,\ \nu_{n-3} < n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\nu \cup \{q\} &= (\nu_1, \dots, \nu_{q-2}, q, \nu_{q-1}, \dots, \nu_{n-3}), \quad \nu \cup \{1\} = (1, \nu)\ , \\
\nu \cup \{n\} &= (\nu, n)\ , \quad \nu \cup \{1, n\} = (1, \nu, n)\ , \\
\nu \cup \{1, q\} &= (1, \nu_1, \dots, \nu_{q-2}, q, \nu_{q-1}, \dots, \nu_{n-3}) \quad \text{y} \\
\nu \cup \{q, n\} &= (\nu_1, \dots, \nu_{q-2}, q, \nu_{q-1}, \dots, \nu_{n-3}, n)\ .
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{q\}) &= 1 + \ldots + q - 2 + q - 1 + \ldots + n - 2 - (1 + \ldots n - 3) \\
&= n - 2 - (q - 1) \\
\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1\}) &= 2 + \ldots + n - 2 - (1 + \ldots + n - 3) = n - 2 - 1 = n - 3 \\
\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{n\}) &= 1 + \ldots n - 3 - (1 + \ldots + n - 3) = 0 \\
\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1, n\}) &= 2 + \ldots + n - 1 - (1 + \ldots + n - 3) \\
&= n - 2 + n - 1 - 1 = 2n - 4 \\
\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{1, q\}) &= 2 + \ldots + q - 1 + q + 1 - (1 + \cdots + n - 3) \\
&= n - 2 + n - 1 - q = (2n - 2) - (q - 1) \\
\operatorname{sgn}(\nu/\nu \cup \{q, n\}) &= 1 + \ldots + q - 2 + q + \ldots + n - 1 - (1 + \ldots + n - 3) \\
&= n - 2 + n - 1 - (q - 1) = (2n - 3) - (q - 1)\ .
\end{aligned}$$

y de estas igualdades se deduce lo buscado. Por lo tanto (34) es finalmente equivalente a la siguiente relación :

$$b_{pq} \ \det\ B[p, m|1, n] = b_{pn} \ \det B[p, m|1, q] + b_{p1} \ \det B[p, m|q, n]\ ,$$

que se verifica fácilmente (notar que son determinantes de matrices de 2×2). ♢

El siguiente teorema no será usado explícitamente en lo subsiguiente:

Teorema 3.12. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y supongamos que $A[\alpha|\beta]$ es inversible para algún $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$. Si $\omega, \tau \in Q_{l,n}, \omega \subset \alpha'$ y $\tau \subset \beta'$, entonces la inversibilidad de $(A/[\alpha|\beta])[\omega|\tau]$ es equivalente a la de $A[\alpha \cup \omega|\beta \cup \tau]$. En este caso se cumple:*

$$(A/[\alpha|\beta])/[\omega|\tau] = A/[\alpha \cup \omega|\beta \cup \tau]. \tag{35}$$

Demostración. La primera afirmación es inmediata de (30). Y (35) es equivalente a la relación

$$\det((A/[\alpha|\beta])/[\omega|\tau])[\mu|\nu] = \det(A/[\alpha \cup \omega|\beta \cup \tau])[\mu|\nu]. \tag{36}$$

para cualquier $\mu, \nu \in Q_{p,n}$ tales que $\mu \subset (\alpha \cup \omega)'$ y $\nu \subset (\beta \cup \tau)'$. Pero, nuevamente, por (30), el lado izquierdo de (36) es igual a

$$\varepsilon\ \frac{\det A[\alpha \cup \omega \cup \nu|\beta \cup \tau \cup \nu]}{\det A[\alpha \cup \omega|\beta \cup \tau]}\ ,$$

donde $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\omega/\omega\cup\mu)\operatorname{sgn}(\alpha/\alpha\cup\omega)\operatorname{sgn}(\alpha/\alpha\cup\omega\mu)\operatorname{sgn}(\tau/\tau\cup\nu)\operatorname{sgn}(\beta/\beta\cup\tau)\operatorname{sgn}(\beta/\beta\cup\tau\cup\nu)$, mientras que el lado derecho es igual a

$$\operatorname{sgn}(\alpha\cup\omega/\alpha\cup\omega\cup\nu)\operatorname{sgn}(\beta\cup\tau/\beta\cup\tau\cup\nu)\frac{\det A[\alpha\cup\omega\cup\nu|\beta\cup\tau\cup\nu]}{\det A[\alpha\cup\omega|\beta\cup\tau]} \ .$$

Se ve por (29) que

$$\operatorname{sgn}(\omega/\omega\cup\mu)\operatorname{sgn}(\alpha/\alpha\cup\omega)\operatorname{sgn}(\alpha/\alpha\cup\omega\cup\mu) = \operatorname{sgn}(\alpha\cup\omega/\alpha\cup\omega\cup\mu)$$

y

$$\operatorname{sgn}(\tau/\tau\cup\nu)\operatorname{sgn}(\beta/\beta\cup\tau)\operatorname{sgn}(\beta/\beta\cup\tau\cup\nu) = \operatorname{sgn}(\beta\cup\tau/\beta\cup\tau\cup\nu) \ .$$

Veamos que la primera de estas igualdades es cierta (la otra es análoga) y habremos entonces probado (36), y, por lo tanto, (35). Si la igualdad vale, esto dice que la suma de los exponentes de -1 de ambos términos es par, esto es, congruente a 0 módulo 2. Llamemos $\left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega}\right|$ al exponente de -1 correspondiente al signo de este elemento y hagamos lo mismo para los demás. Queremos ver entonces que:

$$\left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega}\right| + \left|\frac{\omega}{\omega\cup\mu}\right| + \left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right| + \left|\frac{\alpha\cup\omega}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right| \equiv \ 0 \text{ (módulo 2)}$$

Además, si $\left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega}\right| = \operatorname{tr}\gamma - k(k-1)/2$, como en 3.8, notaremos $\operatorname{tr}\gamma = \left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega}\right|_1$. Supongamos que $\alpha\in Q_{n,N}$, $\omega\in Q_{m,N}$, $\mu\in Q_{l,N}$. Entonces valen

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega}\right| &= -\left|\frac{\omega}{\omega\cup\alpha}\right| \ , \\
\left|\frac{\omega}{\omega\cup\mu}\right| &= \left|\frac{\omega}{\omega\cup\mu}\right|_1 - \frac{m(m+1)}{2} \ , \\
\left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right| &= -\left|\frac{\omega\cup\mu}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right|_1 \equiv \left|\frac{\omega}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right|_1 + \left|\frac{\mu}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right|_1 \ , \\
\left|\frac{\alpha\cup\omega}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right| &= -\left|\frac{\mu}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right|_1 \ .
\end{aligned}$$

Sumando,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega}\right| + \left|\frac{\omega}{\omega\cup\mu}\right| + \left|\frac{\alpha}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right| + \left|\frac{\alpha\cup\omega}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right| \equiv \\
&\equiv \left|\frac{\omega}{\omega\cup\alpha}\right|_1 + \left|\frac{\omega}{\omega\cup\mu}\right|_1 + \left|\frac{\omega}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right|_1 - \frac{m(m+1)}{2} \ .
\end{aligned} \tag{37}$$

Ahora,

$$\left|\frac{\omega}{\alpha\cup\omega\cup\mu}\right|_1 - \left|\frac{\omega}{\omega\cup\alpha}\right|_1 = \sum_{i=1}^{m} \#\{\mu_j : \mu_j < \omega_i\}$$

y

$$\left|\frac{\omega}{\omega \cup \mu}\right| = \sum_{i=1}^{m}(\#\{\mu_j < \omega_i\} + 1) = \sum_{i=1}^{m} \#\{\mu_j : \mu_j < \omega_i\} + \frac{m(m+1)}{2}.$$

Por lo tanto, (37) $\equiv 0$ (2). $\square$

4. Criterios para la positividad total.

En esta sección introducimos las nociones fundamentales del trabajo: regularidad de signo y positividad total. Por una *sucesión de signatura* denotamos a una sucesión real (infinita) $\varepsilon = (\varepsilon_i)$, con $|\varepsilon_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$. El múltiplo de una sucesión de signatura $\varepsilon^{(1)} = (\varepsilon_i^{(1)})$ por un número real de módulo 1 εy el producto de $\varepsilon^{(1)}$ por otra sucesión de signatura $\varepsilon^{(2)} = (\varepsilon_i^{(2)})$ son aquellas sucesiones de signatura definidas por $(\varepsilon\varepsilon_i^{(1)}))$ y $(\varepsilon_i^{(2)}\varepsilon_i^{(1)}))$ respectivamente.

Definición 4.1. Sean $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ y ε una sucesión de signatura. Sea $r = \text{mín}\{n, m\}$.

1. Decimos que A es de *signo regular con signatura* ε si

$$\varepsilon_k \cdot \Lambda^k A \geq 0, \quad k \in \mathbb{I}_r \ , \tag{38}$$

La regularidad de signo de A es equivalente a la condición

$$\varepsilon_k \cdot a_{\beta_1} \wedge a_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge a_{\beta_k} \geq 0, \qquad \text{para} \qquad \beta \in Q_{k,m} \ \ k \in \mathbb{I}_r \ , \tag{39}$$

o, por (12), en forma de determinantes,

$$\varepsilon_k \det A[\alpha|\beta] \geq 0 \qquad \text{para} \qquad \alpha \in Q_{k,n} \ , \ \beta \in Q_{k,m} \quad k \in \mathbb{I}_r \ , \tag{40}$$

ya que

$$\varepsilon_k \Lambda^k A \mathbf{e}_\beta = \varepsilon_k a_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \ a_{\beta_k} \ \ \text{y} \ \ \left(\varepsilon_k \Lambda^k A\right)_{\alpha\beta} = \varepsilon_k \left\langle \left(\Lambda^k A\right) \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha \right\rangle = \frac{\varepsilon_k \det A[\alpha|\beta]}{k!}$$

2. A se dice *estrictamente de signo regular con signatura* ε si en (38) (o, equivalentemente, en (39) o (40)), reemplazamos $\geq$ por $>$.

3. Decimos que A es *totalmente positiva* si si es regular de signo respecto de la sucesión $\varepsilon \equiv 1$, es decir, si

$$\Lambda^k A \geq 0, \quad k \in \mathbb{I}_r \ , \tag{41}$$

o equivalentemente si

$$a_{\beta_1} \wedge a_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge a_{\beta_k} \geq 0, \qquad \text{para} \qquad \beta \in Q_{k,m} \ \ k \in \mathbb{I}_r \ , \tag{42}$$

o equivalentemente si

$$\det A[\alpha|\beta] \geq 0 \qquad \text{para} \qquad \alpha \in Q_{k,n} \ , \ \beta \in Q_{k,m} \quad k \in \mathbb{I}_r \ . \tag{43}$$

4. A se dice estrictamente totalmente positiva si $\geq$ es reemplazado por $>$ en (41), (42) o (43). $\diamondsuit$

Para la regularidad de signo de A se requiere chequear los signos de un número muy grande de determinantes. Pero si el rango de A es conocido, en particular si A es inversible, el número necesario de determinantes a chequear puede ser considerablemente reducido.

Teorema 4.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, de rango r, y sea ε una sucesión de signatura. Entonces, para que A sea de signo regular con signatura ε, es suficiente que la ecuación (39) (o (40)) se verifique en los casos en que $d(\beta) \leq m - r$.*

En particular, si (42) (o (43)) es válida en esos casos, entonces A es totalmente positiva.

Demostración. Probamos (40) por inducción en k. Cuando $k = 1$, (40) es cierto porque $d(\beta) = 0$ para $\beta \in Q_{1,m}$. Supongamos que (40) es cierto con $k-2, k-1$ en lugar de k pero no para k. Tomemos $\beta \in Q_{k,m}$ para el cual hay un $\alpha \in Q_{k,n}$ tal que

$$\varepsilon_k \det A[\alpha|\beta] < 0 \tag{44}$$

y que tiene un mínimo $d(\beta) = l$ sobre el requerido. supongamos primero que $d(\alpha) = 0$. Entonces (44) es posible sólo si

$$l > m - r. \tag{45}$$

Afirmamos que $\forall\, p \,:\, \beta_1 < p < \beta_k$ y $p \notin \beta$,

$$a_p \wedge a_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge a_{\beta_{k-1}} = 0 \tag{46}$$

Para esto, fijemos tal p y sea $\tau = \{\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{k-1}\}$. Entonces la afirmación significa que $A[-|\tau \cup \{p\}]$ tiene rango $\leq k-2$. Usemos (34) en la forma que $\forall\, \omega \in Q_{k-1,n}$, con $\omega \subset \alpha$

$$\varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \det A[\omega|\tau \cup \{p\}] \det A[\alpha|\tau \cup \{\beta_1, \beta_k\}] =$$

$$\varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \det A[\omega|\tau \cup \{\beta_k\}] \det A[\alpha|\tau \cup \{\beta_1, p\}] + \varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \det A[\omega|\tau \cup \{\beta_1\}] \det A[\alpha|\tau \cup \{p, \beta_k\}] \tag{47}$$

Como $\tau \cup \{\beta_1, \beta_k\} = \beta$, $d(\tau \cup \{\beta_1, p\}) \leq l - 1$ y $d(\tau \cup \{p, \beta_k\}) \leq l - 1$, se sigue de (44), la hipótesis inductiva y la propiedad minimal de l que la identidad arriba mencionada sólo puede ser válida cuando

$$\det A[\omega|\tau \cup \{p\}] = 0, \ \forall \omega \in Q_{k-1,n}, \ \omega \in \alpha \tag{48}$$

pues el lado derecho de la igualdad (47) es ≥ 0 y en el izquierdo hay, por hipótesis, un factor < 0 y otro $(\det A[\omega|\tau \cup \{p\}])$, ≥ 0. Por otro lado, de acuerdo a (28), por (44), existe $\gamma \in Q_{k-2,n}$, tal que $\gamma \in \alpha$ y $\det A[\gamma|\tau] \neq 0$. para probar la afirmación, esto es, $\operatorname{rank} A[-|\tau \cup \{p\}] \leq k - 2$, es suficiente mostrar que todo vector fila de $A[-|\tau \cup \{p\}]$ es una combinación lineal de los vectores fila con índices en γ, o equivalentemente que

$$\det A[\gamma \cup \{q\}|\tau \cup \{p\}] = 0, \ \text{para } q \notin \gamma. \tag{49}$$

Cuando $q \in \alpha$, (49) sale de (48), ya que $\gamma \cup \{q\} \in Q_{k-1,n}$. Fijemos entonces $q \notin \alpha$, y sea $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} := (\alpha - \gamma) \cup \{q\}$, y $\nu = \{\beta_1, p, \beta_k\}$. Notemos que $d(\alpha) = 0$ implica que $q = \mu_1$ o $q = \mu_3$. Consideremos la matriz 3-cuadrada $B = (b_{ij})$, definida por

$$b_{ij} = \det A[\gamma \cup \{\mu_i\} | \tau \cup \{\nu_j\}], \; i, j = 1, 2, 3.$$

Entonces por hipótesis inductiva todos los b_{ij} tienen el mismo signo ε_{k-1}, y, por (32), todos los subdeterminantes de matrices 2×2 de $B[-|1)$ y $B[-|3)$ tienen el mismo signo $\varepsilon_{k-2}\varepsilon_k$. Por otro lado, (48) implica que $b_{i2} = 0$ siempre que $\mu_i \neq q$. La afirmación dice que $b_2 = 0$. Si $b_2 \neq 0$, las condiciones superiores sólo son consistentes cuando $b_{i1} = 0$ siempre que $\mu_i \neq q$ o $b_{i3} = 0$, siempre que $\mu_i \neq q$ de acuerdo a que $q = \mu_1$ o $q = \mu_3$. Ya que, por ejemplo, si $\mu_1 = q$ (es análogo para μ_3), tenemos que

$$B = \begin{bmatrix} \det A[\gamma \cup \{q\} | \tau \cup \{\beta_1\}] & \det A[\gamma \cup \{q\} | \tau \cup \{p\}] & \det A[\gamma \cup \{q\} | \tau \cup \{\beta_k\}] \\ \det A[\gamma \cup \{\mu_2\} | \tau \cup \{\beta_1\}] & 0 & \det A[\gamma \cup \{\mu_2\} | \tau \cup \{\beta_k\}] \\ \det A[\gamma \cup \{\mu_3\} | \tau \cup \{\beta_1\}] & 0 & \det A[\gamma \cup \{\mu_3\} | \tau \cup \{\beta_k\}] \end{bmatrix}$$

Entonces, por ejemplo

$$\varepsilon_{k-2}\varepsilon_k \det B[1, 2|3) = -\varepsilon_{k-2}\varepsilon_k \det A[\gamma \cup \{\mu_2\} | \tau \cup \{\beta_1\}] \det A[\gamma \cup \{q\} | \tau \cup \{p\}] > 0$$

y

$$\varepsilon_{k-2}\varepsilon_k \det B[1, 2|1) = \varepsilon_{k-2}\varepsilon_k \det A[\gamma \cup \{q\} | \tau \cup \{p\}] \det A[\gamma \cup \{\mu_2\} | \tau \cup \{\beta_k\}] > 0,$$

lo que determina una contradicción. Aplicando nuevamente (32) vemos que cada caso lleva a la contradicción $\det A[\alpha|\beta] = 0$, tomando $A[\alpha|\beta]$ y $A[\alpha|\beta][\gamma|\tau] = A[\gamma|\tau]$ en lugar de A y $A[\alpha|\beta]$, respectivamente. Así b_2, lo que establece (46). Como (46) es válido para l $a'_p s$ con $p \notin \{\beta_2, \dots, \beta_{k-1}\}$, tenemos $0 \leq \operatorname{rank} A \leq m - l$, lo que contradice (45). Esta contradicción muestra que (40) es válido para k siempre que $d(\alpha) = 0$. Esto completa la inducción. La restriccion $d(\alpha) = 0$ puede ser liberada apelando nuevamente a (34) y observando cuentas similares a las hechas arriba. □

Definición 4.3. Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es llamada una *matriz de Jacobi* (o *tridiagonal*) si $a_{ij} = 0$ siempre que $|i - j| > 1$

Corolario 4.4. *Una matriz n-cuadrada inversible, triangular inferior A es totalmente positiva si* $\det A[\alpha|1, 2, \dots, k] \geq 0$ *para cada* $k \in \mathbb{I}_n$ *y cada* $\alpha \in Q_{k,n}$ *.*

Demostración. Sea A triangular inferior. Como el rango de A es n, de acuerdo al Teorema 4.2, basta mostrar que $\det A[\alpha|\beta] \geq 0$, para $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, con $d(\beta) = 0$. Si $\alpha_1 < \beta_1$, entonces $\det A[\alpha|\beta] = 0$ por ser A triangular inferior. Si $\alpha_1 \geq \beta_1$, sea $\tau = \{1, 2, \dots, \beta_1 - 1\}$. Entonces, por hipótesis y la triangularidad inferior,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \det A[\alpha \cup \tau | 1, 2, \dots, \beta_k] = \det A[\alpha \cup \tau \beta \cup \tau] \\ &= \det A[\tau] \det A[\alpha|\beta] = \prod_{i=1}^{\beta_1 - 1} a_{ii} \det A[\alpha|\beta]. \end{aligned}$$

Como $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$, y cada $a_{ii} \geq 0$, se sigue que $\det A[\alpha|\beta] \geq 0$. □

Teorema 4.5. *Sea A una matriz de Jacobi n-cuadrada. Si $A \geq 0$, y todos los menores principales son no negativos, esto es, $\det A[\alpha] \geq 0$ siempre que $d(\alpha) = 0$, entonces A es totalmente positiva y para cualquier $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$,*

$$\det \big(A + \operatorname{diag}(\,t\,)\ \big) \geq \det A + \prod_{i=1}^{n} t_i. \tag{50}$$

Demostración. Por inducción en n. La afirmación es trivial para $n = 1$. Asumamos que la afirmación es válida para $n - 1$ en lugar de n. Podemos obviamente suponer que $a_{11} > 0$. Entonces por (30), $A/\{1\}$ es nuevamente una $(n-1)$-matriz de Jacobi con menores principales no negativos, ya que $\det(A/\{1\})\,[2, 3, \ldots, k] = \frac{\det A[1,2,\ldots,k]}{a_{11}}$ con lo que por hipótesis inductiva $A/\{1\}$ es totalmente positiva y

$$\det(A/\{1\} + \operatorname{diag}(t_2, \ldots, t_n)) \geq \det(A/\{1\}) + \prod_{i=2}^{n} t_i \ .$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.3, $\det(A + \operatorname{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n)) =$

$$\begin{aligned} &= \ (a_{11} + t_1) \det \Big(A/\{1\} + \operatorname{diag}(t_2 + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + t_1}, t_3 \ldots, t_n) \ \Big) \\ &\geq \ a_{11} \det A/\{1\} + \prod_{i=1}^{n} t_i = \det A + \prod_{i=1}^{n} t_i \ . \end{aligned}$$

Resta ver que A es totalmente positiva. Pero el argumento de arriba muestra que, sumando pequeños $t_i > 0$, podemos asumir que $\det A > 0$. Por el Teorema 4.2, tenemos que chequear

$$\det A[\alpha|\beta] > 0 \ \ , \qquad \text{para} \qquad \alpha, \beta \in Q_{k,n} \qquad \text{con} \qquad d(\beta) = 0.$$

Para $k = n$, esto es la hipótesis. **Para $k \leq n - 1$, esto se deriva de la positividad total asegurada en la hipótesis inductiva.** □

Corolario 4.6. *Si una matriz de Jacobi n-cuadrada A es totalmente positiva, también lo es $A +$ diag$(t_1, \ldots, t_n), \forall\, t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 4.5, aplicado a las submatrices principales, que $A+$ $\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ es una matriz de Jacobi positiva con menores principales no negativos. □

Ahora pasemos a los criterios para la regularidad de signo estricta. El número de determinantes se reduce aún más.

Teorema 4.7. *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ es estrictamente de signatura regular con signatura ε si $\varepsilon_k \det A[\alpha|\beta] > 0$ para todo par $\alpha \in Q_{k,n}, \beta \in Q_{k,m}$ tal que $d(\alpha) = d(\beta) = 0$, $k = 1, \ldots, \text{mín}(n, m)$. En particular A es estrictamente totalmente positiva si $\det A[\alpha|\beta] > 0$ siempre que $\alpha \in Q_{k,n}, \beta \in Q_{k,m}$, y $d(\alpha) = d(\beta) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, \text{mín}(n, m)$*

Demostración. Probemos las desigualdades

$$\varepsilon_k \det A[\alpha|\beta] > 0 \text{ para } \alpha \in Q_{k,n}, \beta \in Q_{k,m},\ \ k = 1, 2, \ldots, \min(n, m). \tag{51}$$

por inducción en k. Cuando $k = 1$, esto es trivial porque $d(\alpha) = d(\beta) = 0$ para $\alpha \in Q_{1,n}, \beta \in Q_{1,m}$. Asumamos que (51) es cierto con $k-1$ en lugar de k. Primero fijemos un $\alpha \in Q_{k,n}$, con $d(\alpha) = 0$, y probemos (51) para este α por inducción en $l := d(\beta)$. Cuando $l = 0$, esto se sigue de la hipótesis del teorema. Supongamos que $\varepsilon_k \det A[\alpha|\gamma] > 0$ siempre que $\gamma \in Q_{k,m}$, $d(\gamma) \leq l-1$. Sea $\beta \in Q_{k,m}$ con $d(\beta) = l$ Entonces existe p tal que $\beta_1 < p < \beta_k$, $d(\tau \cup \{\beta_1, p\}) \leq l-1$, y $d(\tau \cup \{p, \beta_k\}) \leq l-1$, donde $\tau = \{\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{k-1}\}$. Se sigue de (34), como en (47) de la prueba del Teorema 4.2,

$$\det A[\omega|\tau \cup \{p\}] \det A[\alpha|\tau \cup \{\beta_1, \beta_k\}] =$$

$$\det A[\omega|\tau \cup \{\beta_k\}] \det A[\alpha|\tau \cup \{\beta_1, p\}] + \det A[\omega|\tau \cup \{\beta_1\}] \det A[\alpha|\tau \cup \{p, \beta_k\}]$$

para cualquier $\omega \in Q_{k-1,n}$, con $\omega \subset \alpha$. Entonces se sigue de las dos hipótesis inductivas que el lado de la derecha de la identidad superior es no nulo con signo $\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k$, mientras que $\det A[\omega|\tau \cup \{p\}]$ en el lado izquierdo es no nulo con signo ε_{k-1}. por lo tanto la igualdad es consistente sólo cuando $\varepsilon_k \det A[\alpha|\beta] > 0$. esto prueba (51) para esta $\alpha \in Q_{k,n}$ con $d(\alpha) = 0$. Luego aplicamos el mismo argumento sobre las filas para concluir que (51) es cierto en general. □

El mismo argumento, combinado con el corolario 4.4, genera lo siguiente:

Corolario 4.8. *Una matriz n-cuadrada triangular inferior A es totalmente positiva si se verifica que* $\det A[\alpha|1, 2, \ldots, k] > 0$ *para cada k y $\alpha \in Q_{k,n}$, con $d(\alpha) = 0$.*

Concluímos esta sección con un teorema de aproximación de una matriz totalmente positiva con otras estrictamente totalmente positivas.

Teorema 4.9. *Toda matriz regular de signo puede ser aproximadada arbitrariamente cerca por matrices estrictamente regulares de signo con la misma signatura.*

En particular, toda matriz totalmente positiva puede ser aproximada arbitrariamente cerca por matrices estrictamente totalmente positivas.

Demostración. Sea A una matriz $n \times m$ regular de signo con signatura ε. Podemos asumir que $n = m$, considerando $[A, 0]$ o $[\frac{0}{A}]$ si es necesario. Como veremos en la Sección 8, existe una sucesión $\{G_p\}$ de matrices n-cuadradas estrictamente totalmente positivas tales que $G_p \to I_n$, cuando $p \to \infty$. Ahora procedamos por inducción hacia atrás en el rango de A. Notemos que (8) implica

$$\varepsilon_i \cdot \Lambda^i(G_p A G_p) > 0 \text{ si } i \leq \text{rank} A \text{ y } = 0 \text{ si } i > \text{rank} A. \tag{52}$$

Cuando el rango de A es n, la afirmación se sigue inmediatamente de (52). Asumamos que la afirmación es cierta para todas las matrices regulares de signo de rango $k+1$.

Sea rank$A = k$, y tomemos un p para el que $B := G_pAG_p$ está suficientemente cerca de A. De acuerdo a (52) y (13), B tiene la propiedad

$$\varepsilon_i \det B[\alpha|\beta] > 0 \qquad \text{para} \qquad \alpha \in Q_{i,n} \ \ i \in \mathbb{I}_k \ . \tag{53}$$

Sea

$$\delta := \min_{1\le i\le k} \frac{\text{mín}_{\alpha,\beta\in Q_{i,n}} |\det B[\alpha|\beta]|}{\text{máx}_{\omega,\tau\in Q_{i-1,n}} |\det B[\omega|\tau]|} \ .$$

Entonces, para cualquier $0 < t < \delta$, la matriz $C = B + t\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}[e_1, 0, 0, \dots, 0]$ es regular de signo con signatura ε y de rango $k+1$ porque, por un lado, B es regular de signo con signatura ε y, por otro lado, porque

$$\det C[\alpha|\beta] = \det B[\alpha|\beta] + t\varepsilon_k\varepsilon_{k+1} \det B[\alpha - \{1\}|\beta - \{1\}] \qquad \text{si} \qquad \alpha_1 = \beta_1 = 1,$$

$$\text{y} \qquad \det C[\alpha|\beta] = \det B[\alpha|\beta] \qquad \text{en otro caso.}$$

Para t chicos, la matriz C está suficientemente cerca de B, y por lo tanto de A. Ahora, por hipótesis inductiva C puede ser aproximada arbitrariamente cerca por matrices estrictamente regulares de signo con signatura ε. Esto completa la inducción. □

5. Permanencia de la positividad total.

Esta sección está dedicada a métodos canónicos de producción de matrices totalmente positivas nuevas a partir de otras dadas. Es claro que si A es de regular de signo con signatura ε, también lo son su adjunta A^* y su conversión $A^\#$.

Teorema 5.1. *Si A es una matriz $n \times m$ regular de signo con signatura ε_A y B es una matriz $m \times l$ regular de signo con signatura ε_B, entonces el producto AB es regular de signo con signatura $\varepsilon_A \cdot \varepsilon_B$. En este caso AB se convierte en estrictamente regular de signo si A lo es y B es de rango min(m, l), o si A es de rango min(n, m) y B es estrictamente regular de signo. En particular si A, B son (estrictamente) totalmente positivas, tambien lo es AB.*

Esto es una consecuencia inmediata de (8) o (13). La suma de dos matrices totalmente positivas no es en general totalmente positiva. Por lo tanto una matriz cuadrada A puede pocas veces generar un *semigrupo totalmente positivo de un parámetro*, esto es, $\exp(tA)$ casi nunca es totalmente positivo $\forall\ t > 0$.

Teorema 5.2. *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ genera un semigrupo de un parámetro totalmente positivo* $\exp(tA)$ *si y sólo si $A = \xi I_n + B$ para algún número real ξ y una matriz de Jacobi totalmente positiva B.*

Demostración. Supongamos primero que A es de la forma mencionada. Entonces, como

$$\exp(tA) = e^{\xi t} \exp(tB) = e^{\xi t} \lim_{p\to\infty} \left(I_n + \frac{t}{p}B\right)^p ,$$

la positividad total de $\exp(tA)$ resulta del Teorema 4.5, ya que, para la matriz de Jacobi totalmente positiva B, $I_n + \frac{t}{p}B$ es nuevamente totalmente positiva por el Corolario 4.6.

Supongamos recíprocamente que $\exp(tA)$ es totalmente positiva para todo $t > 0$. por el Teorema 5.1, basta mostrar que A es una matriz real de Jacobi con elementos no negativos fuera de la diagonal. Como

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{\exp(tA) - I_n\},$$

todas las entradas fuera de la diagonal de A son no negativas porque $\exp(tA) \geq 0$. Finalmente $a_{ij} = 0$ siempre que $|i - j| > 1$. De hecho, si, por ejemplo, $i + 1 > j$,

$$\det \exp(tA)[i, i+1|i+1, j] \geq 0 \text{ para } t > 0 \ ,$$

lo que implica que

$$0 \leq \lim_{t\to 0} \det \left(\frac{I + tA}{t} \big[i, i+1|i+1, j\big] \right) = \lim_{t\to 0} \{ta_{i,i+1}a_{i+1,j} - (1+ta_{i+1,i+1})a_{ij}\} = -a_{ij} \ .$$

□

Teorema 5.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ regular de signo con signatura ε.*

1. *$A[\alpha|\beta]$ es regular de signo con signatura ε para cada $\alpha \in Q_{k,n}$ y $\beta \in Q_{k,m}$.*
2. *A/α' es regular de signo con signatura $\varepsilon_\alpha = (\varepsilon_{n-k}\varepsilon_{n-k+i})_i$ si $n = m$, $\alpha \in Q_{k,n}$ con componentes consecutivas (i. e. $d(\alpha) = 0$), y $A(\alpha)$ es inversible.*
3. *$J_nA^{-1}J_n$ es regular de signo con signatura $\varepsilon_J = (\varepsilon_n\varepsilon_{n-i})_i$, con la convención $\varepsilon_j = 1$ si $j \leq 0$, si $n = m$ y A es inversible.*

En particular, si A es totalmente positiva, también lo son $A[\alpha|\beta]$, A/α' y $J_nA^{-1}J_n$.

Demostración. 1. Es trivial, ya que

$$\varepsilon_p \det A[\alpha|\beta][\omega|\tau] = \varepsilon_p \det A[\omega|\tau] \geq 0 \ , \quad \text{para} \quad \omega,\ \tau \in Q_{p,n} \ , \ \tau \subseteq \beta \ , \ \omega \subseteq \alpha \ .$$

2. Se sigue de (30):

$$\det A/\alpha'[\omega|\tau] = \operatorname{sgn}(\alpha'/\alpha' \cup \omega) \operatorname{sgn}(\alpha'/\alpha' \cup \tau) \frac{\det A[\alpha' \cup \omega|\alpha' \cup \tau]}{\det A[\alpha'|\alpha']}$$

para ω, $\tau \subset (\alpha')' = \alpha$ y $\det A[\alpha' \cup \omega|\alpha' \cup \tau] \geq 0$ tiene signo ε_{n-k+i}; $\det A(\alpha)$, ε_{n-k} y, dado que $d(\alpha) = 0$, $\operatorname{sgn}(\alpha'/\alpha' \cup \omega) = \operatorname{sgn}(\alpha'/\alpha' \cup \tau)$.

3. Tenemos que $\varepsilon_n \det A \geq 0$ y, por (27),

$$\det \left(J_nA^{-1}J_n\right)[\alpha|\beta] = \frac{\det A(\beta|\alpha)}{\det A} \ ,$$

y $\varepsilon_{n-1} \det A(\beta|\alpha) = \varepsilon_{n-1} \det A[\beta'|\alpha'] \geq 0$. □

Corolario 5.4. *Sea* $A = (a_{ij}) = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *totalmente positiva. Si* $a_{1k} \neq 0$*, entonces resulta totalmente positiva la matriz* $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ *definida por*

$$b_i = a_i \ i = 1, , 2, \ldots, k \ y \ b_i = a_i - \frac{a_{1i}}{a_{1k}}, \ i = k+1, \ldots, n.$$

Demostración. Por el Teorema 4.9 podemos asumir que $\det A > 0$. Como obviamente $\det A = \det B$, de acuerdo al Teorema 4.2 basta mostrar que

$$b_i \wedge b_{i+1} \wedge \cdots \wedge b_j \geq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n, \tag{54}$$

i. e. la positividad para los α tales que $d(\alpha) = 0$. Si $j \leq k$ o$i \leq k \leq j$, entonces

$$b_i \wedge b_{i+1} \wedge \cdots \wedge b_j = a_i \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_j,$$

y (54) es válido porque A es totalmente positiva. Si $k < i$, consideremos la matriz n-cuadrada $C = [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0]$. Entonces se ve fácilmente de la definición de $C/\{1\}$ que

$$[b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, 0, \ldots, 0] = \begin{bmatrix} 0 \\ C/\{1\} \end{bmatrix}.$$

En efecto,

$$(C/\{1\})_{ij} = c_{i+1j+1} - \frac{c_{i+11}c_{1j+1}}{c_{11}} = a_{i+1k+j} - \frac{a_{i+1k}a_{1k+j}}{a_{1k}} \text{ si } 1 \leq j \leq n-k \text{ y } = 0 \text{ en otro caso,}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 0 \\ C/\{1\} \end{bmatrix}_{ij} = (C/\{1\})_{i-1j} = a_{ik+j} - \frac{a_{ik}a_{1k+j}}{a_{1k}} \text{ si } 1 \leq j \leq n-k \text{ y } = 0 \text{ en otro caso.}$$

y esto es $[b_{k+1}, \ldots, b_n, 0, \ldots, 0]_{ij}$. Ahora la ecuación (54) se deduce de la positividad total de $C/\{1\}$ por el Teorema 5.3 □

Una factorización $A = BC$ es llamada una *LU-factorización* (resp, UL-factorización) si B (resp. C) es triangular inferior y C (resp. B) es triangular superior.

Teorema 5.5. *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *totalmente positiva con* $n \geq m$*. Entonces* A *admite una LU-factorización* $A = A_L A_U$ *y una* UL*-factorización* $A = \tilde{A}_L \tilde{A}_U$*, donde* A_L*,* $\tilde{A}_U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *y* A_U*,* $\tilde{A}_L \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *son totalmente positivas.*

Demostración. Considerando la matriz $[A, 0] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, podemos confinar la prueba al caso $n = m$. Además, usando conversiones, basta tratar sólo la factorización LU. Cuando $n = 1$, es trivial. Asumamos que la afirmación es cierta para $n - 1$ en lugar de n. Ahora, sea

$$S_j := [e_1, e_2, \ldots, e_{j-1}, 0, e_j, e - j + 1, \ldots, e_{n-1}], \ j \in \mathbb{I}_{n-1} \ .$$

Es claro que S_j es una matriz de Jacobi positiva, triangular superior, y por lo tanto totalmente positiva por el Teorema 4.5. Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0$ pero $a_k \neq 0$, entonces

$$A = [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0]\ S_1^{k-1},$$

y la matriz $[a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0]$ es totalmente positiva. Aplicando este procedimiento a $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n\}$ y así en adelante, llegamos a una factorización, para algún $\omega \in Q_{l,n}$ y $k_i \geq 0$, $i \in \mathbb{I}_l$,

$$A = BS_{\omega_l}^{k_l} S_{\omega_{l-1}}^{k_{l-1}} \cdots S_{\omega_1}^{k_1}.$$

Donde $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ es una matriz totalmente positiva tal que $b_i = 0$ implica que $b_j = 0$, para $j > i$. Si $B[1|-] \neq 0$, tomemos el mayor i para el cual $b_{1i} \neq 0$. Afirmamos que $b_{1,i-1} \neq 0$. En caso contrario, se tendría que

$$b_{1i} \neq 0, \quad b_{1,i-1} = 0 \qquad \text{y} \qquad \det B[1, j|i-1, i] = b_{1i-1}b_{ji} - b_{1i}b_{ji-1} = -b_{1i}b_{ji-1} \geq 0 \ ,$$

lo que implicaría que $b_{j,i-1} = 0$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$. Luego $b_{i-1} = 0$, lo que contradice que $b_i \neq 0$. Ahora B admite una factorización $B = CU$, donde

$$C := [b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i - \frac{b_{1,i}}{b_{1,i-1}} b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n]$$

y

$$U := [e_1, \ldots, e_{i-1}, \frac{b_{1,i}}{b_{1,i-1}} e_{i-1} + e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n].$$

Notemos que ahora $C_{1i} = 0$. U es una matriz de Jacobi positiva, triangular superior, y por lo tanto totalmente positiva por el Teorema 4.5. La positividad total de C se sigue del corolario 4.6, porque por la propiedad maximal de i:

$$b_j = b_j - \frac{b_{1,j}}{b_{1,i-1}} b_{i-1},\ \ j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

Repitiendo este procedimiento, llegamos a una factorizacióin $B = DU_pU_{p-1} \cdots U_1$, dode cada U_i es triabgular superior, tridiagonal, y totalmente positiva mientras que D es una matriz totalmente positiva tal que $D[1|1) = 0$:

$$A = DU_pU_{p-1} \cdots U_1 S_{\omega_l}^{k_l} S_{\omega_{l-1}}^{k_{l-1}} \cdots S_{\omega_1}^{k_1}. \tag{55}$$

Apliquemos el correspondiente procedimiento a los vectores fila de D para obtener una factorizacion:

$$A = S_{\tau_1}^{*j_1} S_{\tau_2}^{*j_2} \cdots S_{\tau_m}^{*j_m} L_1 L_2 \cdots L_q F U_p U_{p-1} \cdots U_1 S_{\omega_l}^{k_l} S_{\omega_{l-1}}^{k_{l-1}} \cdots S_{\omega_1}^{k_1}. \tag{56}$$

Donde cada L_i es una matriz de Jacobi positiva y triangular inferior, y $\tau_j \in Q_{m,n}, j = 1, \ldots, m$ y $j_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$, mientras que F es una matriz totalmente positiva tal que $F[1|1) = F(1|1] = 0$. Como $F(1)$ es una matriz $(n-1)$-cuadrada totalmente positiva, de acuerdo a las hipótesis inductiva admite una factorización LU $F(1) = \hat{F}_L \hat{F}_U$, donde $\hat{F}_L$ y $\hat{F}_U$ son matrices $(n-1)$-cuadradas totalmente positivas. Ahora, por (56), las matrices n-cuadradas A_L y A_U definidas por

$$A_L = S_{\tau_1}^{*j_1} S_{\tau_2}^{*j_2} \cdots S_{\tau_m}^{*j_m} L_1 L_2 \cdots L_q \begin{bmatrix} \sqrt{f_{11}} & 0 \\ 0 & \hat{F}_L \end{bmatrix}$$

y

$$A_U = \begin{bmatrix} \sqrt{f_{11}} & 0 \\ 0 & \hat{F}_U \end{bmatrix} U_p U_{p-1} \cdots U_1 S_{\omega_l}^{k_l} S_{\omega_{l-1}}^{k_{l-1}} \cdots S_{\omega_1}^{k_1}$$

son totalmente positivas y producen una factorización LU $A = A_L A_U$. Esto completa la inducción. □

Corolario 5.6. *Toda $A \in \mathcal{G}l(n)$ triangular superior (inferior) y totalmente positiva es producto de un cierto número de matrices de Jacobi triangulares superiores (inferiores) y totalmente positivas.*

Demostración. Por inducción en n. El caso $n = 1$ es trivial. Asumamos que la afirmación es cierta para $n-1$, y sea $A \in \mathcal{G}l(n)$ triangular superior (inferior) y totalmente positiva. Mirando la prueba del Teorema 5.5 vemos que las S's no aparecen (porque los a_i's son no nulos ya que $a_{ii} \neq 0$, $i \in \mathbb{I}_n$) y la matriz D en la factorización (55) es también triangular superior (porque también lo son las U_i's), por ser A triangular superior y no modificar en el procedimiento las entradas de A. Como

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & D(1) \end{bmatrix}$$

y $D(1) \in \mathcal{G}l(n-1)$ es totalmente positva y triangular superior, por hipótesis inductiva tenemos $D(1) = \hat{W}_1 \hat{W}_2 \cdots \hat{W}_s$ para algunas matrices de Jacobi totalmente positivas y triangulares superiores $\hat{W}_i \in \mathcal{G}l(n-1)$, $i \in \mathbb{I}_s$. Sean

$$W_i = \begin{bmatrix} d_{11}^{1/s} & 0 \\ 0 & \hat{W}_i \end{bmatrix} \quad , \quad i \in \mathbb{I}_s \ .$$

Entonces $A = W_1 W_2 \cdots W_s U_p U_{p-1} \cdots U_1$ es una factorización como la buscada. □

Además de la relación de orden usual $A \geqslant B$ entre matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, introduzcamos una más fuerte: $A \geqslant^t B$ significa, por definición, que $\Lambda^k A \geqslant \Lambda^k B$ para $k \in \mathbb{N}$. En otras palabras,

$$\det A[\alpha|\beta] \geq \det B[\alpha|\beta] \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha, \beta \in Q_{k,n} \ . \tag{57}$$

En esta notación, $A \geqslant^t 0$ significa que A es totalmente positiva. La relación $A \geqslant^t B$ implica $A[\alpha|\beta] \geqslant^t B[\alpha|\beta]$ para cualquier $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, pero no que $A - B \geqslant^t 0$, como puede verse con las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tampoco $A \geqslant^t B \geqslant^t 0$ implica $A/\{1\} \geqslant^t B/\{1\}$ o $J_n A^{-1} J_n \leq^t J_n B^{-1} J_n$.

Lema 5.7. *Sea $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ totalmente positiva. Entonces*

$$\det B \leq \det B[1,2,\ldots,j] \det B[j+1,j+2,\ldots,m] \quad \textit{para} \quad j \in \mathbb{I}_{m-1} \ . \tag{58}$$

Demostración. Probemos (58) por inducción en m. Cuando $m = 2$, esto es cierto porque $b_{12} \geq 0, b_{21} \geq 0$ implica

$$\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \leq b_{11}b_{22}.$$

Asumamos que la afirmación es cierta para todos los casos de orden menor que m. La matriz m-cuadrada B bajo consideración puede asumirse que posea $b_{11} > 0$, por reordenación. Por lo tanto, si $k > 1$, por (18), tomando $A = B[1,2,\ldots,k]$,

$$\det B[1,2,\ldots,k] \det B[k+1,k+2,\ldots,m] = \det(B/\{1\})[k+1,k+2,\ldots,m].$$

Notar que $B/\{1\}[2,\ldots,k] = B[1,2,\ldots,k]/\{1\}$. Como la matriz $B[1,k+1,k+2,\ldots,m]$ de orden menor que m es totalmente positiva, la hipótesis inductiva produce:

$$\begin{aligned} b_{11} \det B[k+1,k+2,\ldots,m] &\geq \det B[1,k+1,k+2,\ldots,m] \\ &= b_{11} \det(B/\{1\})[k+1,k+2,\ldots m]. \end{aligned}$$

Usando nuevamente la hipótesis inductiva en la matriz $B/\{1\}$ de orden $m-1$, que es totalmente positiva por el Teorema 5.3, obtenemos

$$\begin{aligned} \det B[\mathbb{I}_k] \det B[k+1,\ldots,m] &\geq b_{11} \det(B/\{1\})[2,\ldots,k] \det B[1,k+1,\ldots,m] \\ &\geq b_{11} \det(B/\{1\})[2,\ldots,m] = \det B \ . \end{aligned}$$

Si $k = 1$, entonces

$$\det B = \det B[m] \det(B/\{m\}) \leq b_{mm} \det(B/\{m\}[1]) \det(B/\{m\}[2,\ldots,m-1])$$

Ahora, $\det(B/\{m\}[1]) = b_{11} - \frac{b_{1m}b_{m1}}{b_{mm}} \leq b_{11}$ por ser B totalmente positiva y, se ve de la difinición, que $B/\{m\}[2,\ldots,m-1] = (B[2,\ldots,m])/\{m\}$. Así,

$$\begin{aligned} \det B &\leq b_{11}b_{mm} \det B[2,\ldots,m]/\{m\} \\ &= b_{11} \det B[2,\ldots,m] = \det B[1] \det B[2,\ldots,m] \ , \end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

Teorema 5.8. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es totalmente positiva, y $\alpha = \mathbb{I}_k$ o $\alpha = \{k,k+1,\ldots,n\}$, entonces, si $A(\alpha)$ es inversible, se cumple que*

$$A[\alpha] \geqslant^t A/\alpha', \tag{59}$$

Demostración. Prueba para el caso $\alpha = \{1, 2, \ldots, k\}$: Por (30), (59) es equivalente a las desigualdades

$$\det A[\omega \cup \alpha' | \tau \cup \alpha'] \leq \det A[\omega|\tau] \det A(\alpha) \quad \text{para} \quad \omega, \tau \in Q_{l,n} \quad \text{con} \quad \omega, \tau \subset \alpha \ ,$$

ya que queremos probar que $\det A[\alpha][\omega|\tau] \geq \det A/\alpha'[\omega|\tau]$ y, por (30),

$$\det A/\alpha' \ [\omega|\tau] \ = \ \frac{A[\alpha' \cup \omega | \alpha' \cup \tau]}{\det A(\alpha)} \ .$$

Fijemos ω, τ y consideremos la matriz $A[\omega \cup \alpha' | \tau \cup \alpha']$ en lugar de A. Como

$$A[\omega|\tau] = A[\alpha' \cup \omega | \alpha' \cup \tau] \ [1, \ldots, l] \quad \text{y} \quad A(\alpha) = A[\alpha' \cup \omega | \alpha' \cup \tau] \ [l+1, \ldots, n] \ ,$$

el resultado se deduce del Lema 5.7. □

Corolario 5.9. *Si una matriz n-cuadrada A totalmente positiva es inversible, entonces*

$$\det A[\alpha] > 0 \qquad \textit{para cada} \qquad k \in \mathbb{I}_n \qquad \textit{y cada} \qquad \alpha \in Q_{k,n} \ . \tag{60}$$

Demostración. Por inducción en n. El caso $n = 1$ es trivial. Asumamos que la afirmación vale para $n - 1$. Si $\alpha_1 > 1$, entonces $\det A[\alpha] > 0$ se sigue de la hipótesis inductiva aplicada a $A(1)$, la cual es inversible por (58) y totalmente positiva. Si $\alpha_1 = 1$, entonces por (58) $a_{11} > 0$ y por (59) aplicado a $A[\alpha] = A[(\alpha - \{1\}) \cup \{1\}]$,

$$\det A[\alpha] = a_{11} \det(A/\{1\})[\alpha - \{1\}].$$

Ahora $\det A[\alpha] > 0$ sale de la hipótesis inductiva aplicada a $A/\{1\}$, que es inversible por (18) y totalmente positiva por el Teorema 5.3. □

La aplicación de las factorizaciones LU y UL en el Teorema 5.5 da lugar a otras desigualdades.

Teorema 5.10. *Si A es una matriz n-cuadrada totalmente positiva, y $\alpha = \mathbb{I}_k$ o $\alpha = \{k+1, k+2, \ldots, n\}$, entonces, si $A(\alpha)$ es inversible*

$$A[\alpha] - A/\alpha' \geqslant^t 0 \tag{61}$$

Demostración. Prueba para el caso $\alpha = \{k+1, k+2, \ldots, n\}$: Sea $A = A_L A_U$ una factorización LU con A_L, A_U totalmente positivas, garantizada por el Teorema 5.5. Entonces por definición

$$A[\alpha] - A/\alpha' = A[\alpha|\alpha) A(\alpha)^{-1} A(\alpha|\alpha] =$$

$$A_L[\alpha|\alpha) A_U(\alpha) (A_L(\alpha) A_U(\alpha))^{-1} A_L(\alpha) A_U(\alpha|\alpha] = A_L[\alpha|\alpha) A_U(\alpha|\alpha],$$

ya que $A[\alpha|\alpha) = A_L[\alpha|\alpha) A_U(\alpha)$. Como $A_L[\alpha|\alpha)$ y $A_U(\alpha|\alpha]$ son totalmente positivas, también es su producto $A_L[\alpha|\alpha) A_U(\alpha|\alpha]$. Finalmente, una prueba para el caso $\alpha = \{1, 2, \ldots k\}$ se logra usando una factorización UL. □

6. Matrices oscilatorias.

Una matriz n-cuadrada A se dice *oscilatoria* si es totalmente positiva y una cierta potencia A^p es estrictamente totalmente positiva. en esta sección presentaremos un criterio simple para que una matriz totalmente positiva sea oscilatoria.
Observemos que una matriz oscilatoria es inversible, y su adjunta es también oscilatoria. por lo tanto, por el corolario 5.9, si una matriz n-cuadrada A es oscilatoria, entonces $\det A[\alpha] > 0$ para $\alpha \in Q_{k,n}$

Teorema 6.1. *Sea A una matriz n-cuadrada oscilatoria. Entonces*

1. *$J_n A^{-1} J_n$ es oscilatoria.*

2. *$A[\alpha]$ y A/α' son oscilatorias para cada $\alpha \in Q_{k,n}$ con componentes consecutivas, i.e., tal que $d(\alpha) = 0$*

Demostración. Supongamos que A es totalmente positiva y A^p es estrictamente totalmente positiva.

1. $J_n A^{-1} J_n$ es totalmente positiva y $(J_n A^{-1} J_n)^p = J_n (A^p)^{-1} J_n$ es estrictamente totalmente positiva por el Teorema 5.3. Así, $J_n A^{-1} J_n$ es oscilatoria.

2. Probemos primero que $A[\alpha]$ es oscilatoria para el caso $\alpha = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Sea $B = A[1, 2, \ldots, n-1]$. Tomemos $\beta, \tau \in Q_{k,n-1}$, y sea $\mu := \beta \cup \{n\}$ y $\nu := \tau \cup \{n\}$. Por (13), $\det A^p[\mu|\nu] > 0$ implica que existe una sucesión $\omega^{(i)} \in Q_{k+1,n}$, $i = 0, 1, \ldots, p$, tal que $\omega^0 = \mu$, $\omega^{(p)} = \nu$, y

$$\prod_{i=1}^{p} \det A[\omega^{(i-1)}|\omega^{(i)}] > 0$$

Llamemos $\tilde{\omega}^{(i)} \in Q_{k,n-1}$ a la k-upla obtenida eliminando la última componente de $\omega^{(i)}$. Como $A[\omega^{(i-1)}|\omega^{(i)}]$ es totalmente positiva con determinante positivo, por (58)

$$\det B[\tilde{\omega}^{(i-1)}|\tilde{\omega}^{(i)}] > 0, \; i = 1, 2, \ldots, p.$$

Entonces nuevamente, por la positividad total de B y (13),

$$\det B^p[\beta|\tau] \geq \prod_{i=1}^{p} \det B[\omega^{(\widetilde{i-1})}|\tilde{\omega}^{(i)}] > 0,$$

lo que prueba la positividad total estricta de B. El caso $A[2, 3, \ldots, n]$ se trata de manera análoga. Que $A[\alpha]$ para $\alpha \in Q_{k,n}$ con $d(\alpha) = 0$ se prueba por inducción hacia atrás en k, tomando como en el caso $\{1, \ldots, n-1\}$, al que le agregamos n, $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ y agregando α_{k+1} o, como en el otro caso, $\alpha_1 - 1$ si $\alpha_k = n$. Finalmente, que A/α' es oscilatoria se sigue de (19), por (1), ya que

$$J_m (A/\alpha')^{-1} J_m = J_m A^{-1}[\alpha] J_m, \tag{62}$$

entonces $J_m A^{-1}[\alpha] J_m$ es oscilatoria, lo que implica que $(A^{-1}[\alpha])^{-1} = A/\alpha'$ es escilatoria. Veamos (62). En general, $(J_n A J_n)_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$. Ahora,

$(J_m A[\alpha] J_m)_{ij} = (J_m B J_m)_{\alpha_i \alpha_j}$ y $((J_m A J_m)[\alpha])_{ij} = (J_m A J_m)_{\alpha_i \alpha_j} = (-1)^{\alpha_i + \alpha_j} A_{\alpha_i \alpha_j}$,

pero $\alpha_i + \alpha_j \equiv i + j$ (2), ya que $d(\alpha) = 0$: si $\alpha = (\alpha_0 + 1, \ldots \alpha_0 + k)$, $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_0 + i + \alpha_0 + j \equiv i + j$ (2)

□

Lo siguiente da un criterio para la "oscilatoriedad".

Teorema 6.2. *Una matriz n-cuadrada totalmente positiva $A = (a_{ij})$ es oscilatoria si y sólo si es inversible y*

$$a_{i,i+1} > 0, \;\; a_{i+1,i} > 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{63}$$

Demostración. Para una de las implicaciones, notemos que, si A es oscilatoria, por el Teorema 6.1,

$$B := A[i, i+1] = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ii+1} \\ a_{i+1i} & a_{i+1i+1} \end{bmatrix}$$

es oscilatoria, y $B^p > 0$ para algún p. Pero esto es posible sólo cuando $a_{i,i+1} > 0$ y $a_{i+1,i} > 0$, ya que si alguno de los dos se anula, entonces $(B^p)_{ii+1} = 0$ o $(B^p)_{i+1i} = 0$ para todo p. La otra implicación será probada como consecuencia de un resultado más general, hacia el fin de la sección. □

Corolario 6.3. *Sean A, B matrices n-cuadradas totalemente positivas. Si A es oscilatoria y B es inversible, entonces AB y BA son oscilatorias.*

Demostración. Como B es inversible, $b_{ii} > 0$ para $0 = 1, 2, \ldots, n$. Entonces por (13) tanto AB como BA satisfacen la condición (63) junto con A ya que son inversibles por serlo A (por ser oscilatoria) y B y

$$(AB)_{ii+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji+1} > 0 \geq a_{ii+1} b_{i+1i+1} > 0$$

y análogamente para $(i, i+1)$ y BA. □

El siguiente teorema presenta una extensión de la condición (63) para matrices oscilatorias.

Teorema 6.4. *Sea A una matriz n-cuadrada totalmente positva. Si A es inversible y satisface (63), entonces $\det A[\alpha|\beta] > 0$ para cada par $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ tal que*

$$|\alpha_i - \beta_i| \leq 1 y \;\; \text{máx}\,(\alpha_i, \beta_i) < \text{mín}\,(\alpha_{i+1} \beta_{i+1}) \tag{64}$$

donde $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} = \infty$.

Demostración. Por inducción en k. El caso $k = 1$ se sigue de (31) y la suposición (63). **¿Caso k=2?** Fijemos k, y supongamos que la afirmación es cierta para cada par en $Q_{k-1,n}$ que satisface (64) con $k-1$ en lugar de k. Tomemos un par $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ cumpliendo (64). Si $d(\alpha) = d(\beta) = 0$, entoces (64) es consistente sólo cuando $\alpha = \beta$. Entonces en este caso $\det A[\alpha|\beta] > 0$ resulta de (60), lo cual es válido para toda matriz inversible totalmente positiva. Ahora, asumiendo que $d(\beta) > 0$, sea $B = A[\alpha|\beta] = [b_{\beta_1}, b_{\beta_2}, \ldots b_{\beta_k}]$, donde cada b_{β_i} es un k-vector. Tenemos que mostrar que $\det B = \det A[\alpha|\beta] = 0$ produce una contradicción. Primero, se sigue de la hipótesis inductiva que

$$\det B[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}] > 0 \quad \text{y} \quad \det B[\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k|\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_k] > 0$$

lo que implica, junto con la positividad total,

$$b_{\beta_1} \wedge b_{\beta_2} \wedge \ldots \wedge b_{\beta_{k-1}} > 0 \text{ y } b_{\beta_2} \wedge b_{\beta_3} \wedge \ldots \wedge b_{\beta_k} > 0. \tag{65}$$

Entonces $\det B = 0$ garantiza que para ciertos $\xi_i \in \mathbb{R}$

$$b_{\beta_k} = \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i b_{\beta_i} \quad \text{con} \quad \xi_1 \neq 0 \; . \tag{66}$$

Ahora sustituyamos la expresión (66) por b_{β_k} en (65) para obetener

$$(-1)^{k-2} \xi_1 b_{\beta_1} \wedge b_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge b_{\beta_{k-1}} \geq 0. \tag{67}$$

Como $d(\beta) > 0$, el conjunto ordenado $\gamma := \{j \notin \beta : \beta_1 < j < \beta_k\}$ es no vacío. Mostremos que para cada $j \in \gamma$ la α-proyección b_j de a_j es linealmente dependiente con $b_{\beta_1}, b_{\beta_2}, \ldots, b_{\beta_{k-1}}$, o equivalentemente

$$b_j \wedge b_{\beta_1} \wedge b_{\beta_2} \wedge \ldots \wedge b_{\beta_{k-1}} = 0 \tag{68}$$

Para esto, tomemos i tal que $\beta_i < j < \beta_{i+1}$. Entonces, como $A[\alpha|\beta \cup \{j\}]$ es totalmente positiva,

$$b_{\beta_1} \ldots \wedge b_{\beta_i} \wedge b_j \wedge b_{\beta_{i+1}} \wedge \ldots \wedge b_{\beta_{k-1}} \geq 0 \quad \text{y} \quad b_{\beta_2} \ldots \wedge b_{\beta_i} \wedge b_j \wedge b_{\beta_{i+1}} \wedge \ldots \wedge b_{\beta_k} \geq 0. \tag{69}$$

Ahora sustituyamos la expresión (66) para b_{β_k} en (69) para obtener

$$(-1)^{k-1} \xi_1 b_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge b_{\beta_i} \wedge b_j \wedge b_{\beta_{i+1}} \wedge \ldots \wedge b_{\beta_{k-1}} \geq 0. \tag{70}$$

es claro que (65), (67), (69), (70), y $\xi_1 \neq 0$ son consistentes sólo si la igualdad se da en (70), o equivalentemente si (68) es válido. El argumento muestra que la matriz $A[\alpha|\beta \cup \gamma]$ tiene rango $k-1$. Consideremos el conjunto ordenado $\tau := \{i \notin \alpha : \alpha_1 < i < \alpha_k\}$. Ahora, el argumento anterior aplicado a los vectores filas dice finalmente que $A[\alpha \cup \tau|\beta \cup \gamma]$ tiene rango $k-1$. Por último, se sigue de (64) y $d(\beta) > 0$ que hay un $\omega \in Q_{k,n}$ tal que $d(\omega) = 0$, $\omega \subset \alpha \cup \tau$, y $\omega \subset \beta \cup \gamma$. Entonces como $A[\alpha \cup \tau|\beta \cup \gamma]$ es de rango $k-1$, $\det A[\omega] = 0$, lo cual es una contradicción, como fue mostrado antes. Esto completa la prueba $\square$

La "ida" del Teorema 6.2 se verá como consecuencia del siguiente resultado más general.

Teorema 6.5. *Sean A_i, $i = 1, 2, \dots, p$ matrices n-cuadradas, inversibles y totalmente positivas, con $p \geq n - 1$. si cada A_i satisface (63), entonces el producto $A_1 A_2 \cdots A_p$ es estrictamente totalmente positivo.*

Demostración. Por el Teorema 4.7 basta mostrar que

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_p)[\alpha|\beta] > 0 \;\forall\, \alpha, \beta \in Q_{k,n}, \text{ con } d(\alpha) = d(\beta) = 0. \tag{71}$$

Asumamos que $\beta_1 \geq \alpha_1$ y sea $\omega^{(0)} = \alpha$ y $\omega^{(p)} = \beta$. Definamos $\omega^{(l)} \in Q_{k,n}$, para $l = 1, 2, \dots, p - 1$ como

$$\omega_i^{(l)} = \min\{\beta_i, \alpha_i + \max(l + i - k, 0)\}, \; i = 1, 2, \dots, k.$$

Entonces vemos que cada para $\omega^{(l-1)}, \omega^{(l)}$ satisface (64), de donde por el Teorema 66, $\det A_l[\omega^{(l-1)}|\omega^{(l)}] > 0$, $l = 1, 2, \dots, p$. Por lo tanto, se sigue de (13) y la positividad total que

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_p)[\alpha|\beta] \geq \prod_{l=1}^{p} \det A_l[\omega^{(l-1)}|\omega^{(l)}] > 0,$$

lo que prueba (71) □

Corolario 6.6.
1. *Si A es una matriz oscilatoria n-cuadrada, entonces A^{n-1} es estrictamente totalmente positiva.*
2. *Si A es una matriz regular de signo, inversible,, n-cuadrada tal que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $a_{i,i+1} a_{i+1,i} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, entonces $A^{2(n-1)}$ es estrictamente totalmente positiva.*

Demostración.
1. Se sigue inmediatamente del Teorema 6.5.
2. A^2 es totalmente positiva por ser A regular de signo y $(A^2)_{ii+1}$, $(A^2)_{i+1i}$ por hipótesis. Entonces satisface (63). Finalmente, usamos (1).

□

7. Variación de signos.

En esta sección está dedicada a caracterizaciones de la regularidad de signo de una matriz en términos de algunas propiedades de disminución de variación del operador linear que ésta induce.

Por un sucesión de signo de un n-vector real x entendemos cualquier sucesión de signatura ε para la cual $\varepsilon_i x_i = |x_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$. El número de cambios de signo de x asociado a ε, denotado por $C(\varepsilon)$, es el número de índices i tales que $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} < 0$, $1 \leq i \leq n - 1$, esto es,

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \varepsilon_i \varepsilon_{i+1}).$$

Ahora la *máxima (mínima) variación de signos* $V_+(x)$ $(V_-(x))$, es por definición el máximo (mínimo) de $C(\varepsilon)$ cuando ε recorre todas las sucesiones de signo de x. Vemos que

$$0 \le V_-(x) \le V_+(x) \le n-1 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si ninguna componente de x se anula, una sucesión de signo de x está unívocamente determinada, y por lo tanto $V_-(x) = V_+(x)$. Este valor común es llamado la variación de signo exacta y denotado por $V(x)$. Se tiene que

$$V_+(x) + V_-(J_n x) = V_-(x) + V_+(J_n x) = n-1 \tag{72}$$

De hecho, cuando ε recorre todas las sucesiones de signo de x, $J_n\varepsilon$ recorre todas las sucesiones de signo de $J_n x$, y

$$C(\varepsilon) + C(J_n\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(1-\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(1-(J_n\varepsilon)_i(J_n\varepsilon)_{i+1}) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{1=1}^{n-1}(1-\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}) + (1-(-1^{i-1})\varepsilon_i(-1)^i\varepsilon_i)\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(1-\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}) + (1+\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}) = n-1.$$

Si una sucesión $x_p \xrightarrow[p\to\infty]{} x$, entonces

$$V_-(x) \le \liminf_{p\to\infty} V_-(x_p) \qquad \text{y} \qquad \limsup_{p\to\infty} V_+(x_p) \le V_+(x)\ . \tag{73}$$

Esto también es inmediato de la definición, de hecho, existe p_0 tal que $|(x_{p_0})_i - x_i| < \min\{|x_i| : x_i \neq 0\}$. Entonces, si $x_i \neq 0$, $\operatorname{sgn}(x_p)_i = \operatorname{sgn}(x_i)$. Si $x_i = 0$, y $(x_p)_i \neq 0$, podemos elegir ε tal que $C(\varepsilon) \le C(\varepsilon_p)$. Así, para todo $p \ge p_0$, existe una ε tal que $C(\varepsilon) \le C(\varepsilon_p)$. Por lo tanto, $V_-(x) \le \liminf_{p\to\infty} V_-(x_p)$.

Lema 7.1. *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, con $n > m$. Sea $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\sum_{i=1}^m |\xi_i| \neq 0$. Entonces son equivalentes:*

1. *$V_+\left(\sum_{i=1}^m \xi_i a_i\right) \le m-1$.*
2. *$a = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m$ es estrictamente definido (como vector), i. e. $\pm a > 0$.*

Demostración. Para ver la suficiencia, supongamos que $a > 0$ y que $V_+(\sum_{i=1}^m \xi_i a_i) \ge m$ para alguna elección de $\xi \in \mathbb{R}^m$ tal que $\sum_{i=1}^m |\xi_i| \neq 0$. Sea $b = \sum_{i=1}^m \xi_i a_i$. Entonces b es no nulo, porque $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son linealmente independientes. Como $V_+(b) \ge m$, es fácil ver que existe $\alpha \in Q_{m+1,n}$ tal que la α-proyección de b tiene variación máxima m. Es claro que las α-proyecciones a'_i de a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ también cumplen $a'_1 \wedge a'_2 \wedge \cdots \wedge a'_m > 0$. De hecho, si $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, entonces

$$a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} (a_{1j_1} \cdots a_{mj_m})\, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m} > 0$$

lo que implica que, si $a'_i = \sum_{k=1}^{m+1} a_{ij_k} e_{j_k}$, entonces

$$a'_1 \wedge \cdots \wedge a'_m = \sum_{j_{k_1},\ldots,j_{k_n}=1}^{m+1} (a_{1j_{k_1}} \cdots a_{1j_{k_m}})\; e_{j_{k_1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_{k_m}} > 0,$$

por tener algunas de las entradas de a. Por lo tanto, considerando la α-proyección si es necesario, podemos suponer que $n = m+1$ y $(-1)^{i-1} b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Más aún, los $\mathbf{e}^{\wedge}_{(i)} := e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ forman una base completa ortogonal de $\Lambda^m \mathbb{R}^n$, con lo que

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i\; \mathbf{e}^{\wedge}_{(i)} \qquad \text{para ciertos} \qquad \zeta_i > 0,\, i \in \mathbb{I}_n\ .$$

Por otro lado, como b es una combinación lineal de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, y $b = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, por (5)

$$0 = b \wedge a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \zeta_i\; b_i \right\} \cdot e_i \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Entonces $\zeta_i > 0$ y $(-1)^{i-1} b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, (porque $V_+(b_i) \geq m = n-1$), implican que $b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y por lo tanto $b = 0$, una contradicción. Esto completa la prueba de la suficiencia.

Probemos ahora la necesidad. Como $V_+(0) = n-1$ y $m < n$, la hipótesis implica que $a_i, a_2, \ldots, a_m$ son linealmente independientes, esto es, $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m \neq 0$. Sea $A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$. Entonces, por (5)

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m = \sum_{\alpha \in Q_{m,n}} \det A[\alpha|-] \mathbf{e}^{\wedge}_{\alpha},$$

y tenemos que mostrar que $\det A[\alpha|] > 0$ (o < 0) uniformemente para todo $\alpha \in Q_{m,n}$. Dos $\alpha, \beta \in Q_{m,n}$ cualesquiera pueden ser unidos por una sucesión $\omega^{(p)} \in Q_{m,n}$, $p = 0, 1, \ldots, k$, tal que $\alpha = \omega^{(0)}, \beta = \omega^{(k)}$ y para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ existe $\tau^{(i)} \in Q_{m+1,n}$ tal que $\omega^{(i-1)} \subset \tau^{(i)}$ y $\omega^{(i)} \subset \tau^{(i)}$. Como la desigualdad $\det A[\alpha|-] \det A[\beta|-] > 0$ se sigue de las desigualdades

$$\det A[\omega^{(i-1)}] \det A[\omega^{(i)}|-] > 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

pues

$$\operatorname{sgn}(\det A[\alpha|-] \det A[\beta|-]) =$$
$$\operatorname{sgn}(\det A[\alpha|-] \det A[\omega^{(1)}|-] \det A[\omega^{(1)}|-] \cdots \det A[\omega^{(k-1)}|-] \det A[\omega^{k-1}|-] \det B) > 0,$$

considerando, en el paso i, la proyección $\tau^{(i)}$, podemos asumir que $n = m+1$, ya que en cada paso estamos trabajando en los subconjuntos de algún $\tau^{(i)}$. Ahora, como antes,

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \mathbf{e}^{\wedge}_{(i)} \text{ con } \zeta_i = \det A(i|-]$$

y tenemos que mostrar que $\zeta_i\zeta_j > 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Si $\zeta_i = 0$ para algún i, entonces e_i se convierte en una combinación de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, pero $V_+(e_i) = n-1 = m$, una contradicción. Además, si no todos los ζ_j tienen el mismo signo, entonces $\zeta_l\zeta_{l+1} < 0$ para algún l. Entonces, como arriba,

$$(\zeta_{l+1}e_l+\zeta_l e_{l+1})\wedge a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_m = ((-1)^{l-i}\zeta_{l+1}\zeta_l+(-1)^l\zeta_l\zeta_{l+1})\cdots\ e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n = 0,$$

y $\zeta_{l+1}e_l+\zeta_l e_{l+1}$ se vuelve una combinación lineal de $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Pero como $\zeta_l\zeta_{l+1} < 0$, tenemos $V_+(\zeta_{l+1}e_l + \zeta_l e_{l+1}) = n-1 = m$, una contradicción. Esto completa la prueba de la necesidad. $\square$

Teorema 7.2. *Sea $\mathcal{M}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ tal que $0 < \dim \mathcal{M} < n$. Entonces, las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(1) $V_+(x) \leq \dim \mathcal{M} - 1$ para $0 \neq x \in \mathcal{M}$.

(2) $V_-(y) \geq \dim \mathcal{M}$ para $0 \neq y \in \mathcal{M}^\perp$.

Demostración. Tomemos bases completas ortonormales

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \quad \text{para} \quad \mathcal{M}, \quad \text{y} \quad \{a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\} \quad \text{para} \quad \mathcal{M}^\perp .$$

Si $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, entonces A es unitaria y podemos asumir que $\det A = 1$. De acuerdo al Lema 7.1, la condición (1) implica que $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m > 0$ (o bien < 0), lo que es equivalente, por (12), a que $\det A[\alpha|\mathbb{I}_m]$ es no nulo y tiene el mismo signo para todo $\alpha \in Q_{m,n}$. Usando (27) y que $\det A = 1$,

$$\begin{aligned}\det(J_nAJ_n)(\alpha|\mathbb{I}_m) &= \det(J_nA^{*^{-1}}J_n)(\alpha|\mathbb{I}_m) = \det A^*[\mathbb{I}_m|\alpha] \\ &= \det A[\alpha|\mathbb{I}_m].\end{aligned}$$

Por ende, $\det(J_nAJ_n)[\tau|m+1, \ldots, n]$ es no nulo y tiene el mismo signo para todo $\tau \in Q_{n-m,n}$. Equivalentemente, si notamos $b_i := J_nAJ_ne_i$, $i = m+1, \ldots, n$, tenemos que $b_{m+1} \wedge b_{m+2} \wedge \cdots \wedge b_n > 0$ (o bien < 0). Pero es claro que $b_i = (-1)^i J_n a_i$, de donde $J_na_{m+1} \wedge J_na_{m+2} \wedge \cdots \wedge J_na_m$ es estrictamente definida. Entonces nuevamente por el Lema 7.1, $V_+(J_ny) \leq n-m-1$ para $0 \neq y \in \mathcal{M}^\perp$. Ahora aplicamos (1) para obtener (2). La implicación (2) $\Rightarrow$ (1) se prueba de manera similar. $\square$

Una versión local del Teorema 7.2 da la siguiente caracterización de la regularidad de signo estricta en términos de una propiedad de disminución de variación.

Teorema 7.3. *Sea A una matriz real $n \times m$ con $n \geq m$. Entonces A es estrictamente regular de signo si y sólo si el operador linear A de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ disminuye la variación de signos, en el sentido que*

$$V_+(Ax) \leq V_-(x) \qquad \textit{para} \qquad 0 \neq x \in \mathbb{R}^m \tag{74}$$

Demostración. Supongamos que $A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ es estrictamente regular de signo con signatura ε. Tomemos cualquier $0 \neq x \in \mathbb{R}^m$, y sea $k := V_-(x)$. Entonces existen $\beta, \omega \in Q_{k+1,m}$ tales que $\beta_i \leq \omega_i < \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, k+1$ (con $\beta_{k+1} = \infty$) para los cuales, para cada $i = 1, 2, k+1$, las componentes x_j tienen signo constante para todo j entre β_i y ω_i, alternando el signo en i y $x_j = 0$ si $j < \beta_1$, $j > \omega_{k+1}$, o $\omega_i < j < \beta_{i+1}$ para algún i. Sea $b := \sum_{\beta_i \leq j < \omega_i} x_j a_j$, $i = 1, 2, k+1$. Entonces $Ax = \sum_{i=1}^{k+1} b_i$, ya que $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ y $x_j = 0$ si $j \notin \{\beta_i \leq j \leq \omega_i\}$. Ahora la regularidad estricta de signo de A implica que

$$\varepsilon_{k+1} \cdot a_{j_1} \wedge a_{j_2} \wedge \cdots \wedge a_{j_{k+1}} > 0 \text{ para } \beta_i \leq j_i \leq \omega_i,\ i = 1, 2, k+1$$

con lo que

$$b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_{k+1} > 0 \text{ o } < 0; \text{ dependiendo de los } x_i.$$

Entonces el Lema 7.1 dice que

$$V_+(Ax) = V_+\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i\right) \leq k = V_-(x),$$

lo que prueba (74).
Supongamos recíprocamente que $A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ satisface la condición (74). Para cada $\omega \in Q_{k,m}$ y $\xi \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, k$, con $\sum_{i=1}^{k} |\xi_i| \neq 0$, obviamente

$$V_-\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i a_{\omega_i}\right) \leq k-1.$$

De donde por hipótesis

$$V_+\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i a_{\omega_i}\right) = V_+\left(A \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_{\omega_i}\right) \leq k-1.$$

Entonces se sigue del Lema 7.1 que $a_{\omega_1} \wedge a_{\omega_2} \wedge \cdots \wedge a_{\omega_k}$ es estrictamente definida. A será estrictamente regular de signo si $a_{\omega_1} \wedge a_{\omega_2} \wedge \cdots \wedge a_{\omega_k}$ depende sólo de k. Para $k = m$ esto es trivial. Fijemos $1 \leq k \leq m-1$ y tomemos $\alpha, \beta \in Q_{k,m}$. Como observamos en la prueba del Lema 7.1, existe una sucesión $\omega^{(p)} \in Q_{k,m}$, $p = o, 1, \ldots, l$, tal que $\alpha = \omega^{(0)}$, $\beta = \omega^{(l)}$ y hay una sucesión $\tau^{(p)} \in Q_{k+1,m}$ con $\omega^{(i)} \subset \tau^{(i)}$, $\omega^{(i-1)} \subset \tau^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Por lo tanto,para nuestro propósito basta probar que, para cada $\tau \in Q_{k+1,m}$ y $1 \leq i \leq k+1$, $a_{tau_1} \wedge \cdots \wedge a_{\tau_{i-1}} \wedge a_{\tau_{i+1}} \wedge \cdots \tau_{k+1}$ y $a_{\tau_1} \wedge \cdots \wedge a_{\tau_i} \wedge a_{\tau_{i+2}} \wedge \cdots \tau_{k+1}$ tienen el mismo signo. Mediante un argumento de continuidad esto será establecido si

$$a_{\tau_1} \wedge \cdots \wedge a_{\tau_{i-1}} \wedge \{(1-t)a_{tau_i} + t a_{\tau_{i+1}}\} \wedge a_{\tau_{i+2}} \wedge \cdots \tau_{k+1}$$

es estrictamente definido para cada $0 < t < 1$, ya que en 0 y 1 dan lo que buscamos. Pero esta definición estricta sale del Lema 7.1, vía (74), porque para todo $\xi_i \in \Re$, $i = 1, 2, \ldots, k$, con $\sum_{i=1}^{k} |\xi_i| \neq 0$,

$$V_-\left(\sum_{j=1}^{i-1} \xi_j e_{tau_j} + \xi_i((1-t)e_{\tau_i} + t e_{\tau_{i+1}}) + \sum_{j=i+2}^{k+1} \xi_j e_{\tau_j}\right) \leq k-1$$

□

La regularidad de signo está caracterizada por una propiedad de variación de signo más débil.

Corolario 7.4. *Sea A una matriz $n \times m$ real de rango m: Entonces A es regular de signo si y sólo si*

$$V_-(Ax) \leq V_-(x) \text{ para } 0 \neq x \in \mathbb{R}^m. \tag{75}$$

Demostración. Como veremos en la Sección 7, hay una sucesión de matrices n cuadradas, estrictamente totalmente positivas G_p, $p = 1, 2, \ldots$, tales que $G_p \to I_n$ cuando $p \to \infty$. Supongamos primero que A es regular de signo. Como A es inyectiva por hipótesis, G_pA es estrictamente regular de signo, y $G_pA \to A$ cuando $p \to \infty$. Entonces el Teorema 7.3 garantiza que

$$V_+(G_pAx) \leq V_-(x) \text{ para } 0 \neq x \in \mathbb{R}^m,$$

lo que da (75) vía (73), ya que tenemos

$$V_-(Ax) \leq \underline{\lim}_{p\to\infty} V_-(G_pAx) \leq V_+(G_{p_0}Ax) \leq V_-(x)$$

Supongamos ahora que (75) es válido. Por el Teorema 7.3, aplicado a G_p,

$$V_+(G_pAx) \leq V_-(Ax) \; 0 \neq x \in \mathbb{R}^m,$$

porque A es inyectiva. Ahora (75) combinado con el Teorema 74 muestra que G_pA es estrictamente regular de signo para $p \in \mathbb{N}$. Entonces A es regular de signo. □

Usando la relación de dualidad (72), podemos hablar de algunas propiedades de aumento de signo.

Corolario 7.5. *Sea A una matriz real $n \times n$ de rango m. Entonces J_nAJ_m es estrictamente regular de signo (respectivamente, regular de signo) si y sólo si*

$$n - m + V_+(x) \leq V_-(Ax) \; (V_+(Ax)) \; para 0 \; \neq X \in \mathbb{R}^m.$$

Cuando $n = m$, la regularidad de signo admite varias caracterizaciones equivalentes.

Teorema 7.6. *Sea A una matriz n-cuadrada inversible. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es regular de signo.*
2. *$V_+(Ax) \leq V_+(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*
3. *$V_-(Ax) \leq V_+(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*
4. *$V_-(Ax) \leq V_-(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$: Si A es regular de signo (e inversible), también lo es $J_n A^{-1} J_n$ por el Teorema 5.3. Entonces 2 se sigue del Corolario 7.5, reemplazando A y x por A^{-1} y Ax respectivamente.

$2 \Rightarrow 3$: Trivial.

$3 \Rightarrow 4$: Resulta de reemplazar x por $G_p x$ y tomar el límite cuando $p \to \infty$, donde G_p es una matriz estrictamente totalmente positiva como en la prueba de el Corolario 7.4.

$4 \Rightarrow 1$: Se sigue del Corolario 7.4. $\square$

8. Autovalores y autovectores.

En esta sección estudiaremos propiedades espectrales de las matrices regulares de signo o totalmente positivas. La herramienta clave para esto son los resultados de Perron y Frobenius para matrices positivas. Formulamos aquí la parte más elemental del teorema de Perron-Frobenius, la cual es la necesaria para nuestro propósito. Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ llamaremos $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ a sus autovalores, ordenados de forma que $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \cdots \geq |\lambda_n(A)|$.

Lema 8.1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A \geq 0$. Entonces el primer autovalor de A es real y no negativo, i.e., $\lambda_1(A) \geq 0$, y hay un autovector positivo $u_1 \geq 0$ correspondiente a $\lambda_1(A)$. Si A es estrictamente positiva, $A > 0$, entonces $\lambda_1(A) > |\lambda_2(A)|$, y cada autovector corrrespondiente a $\lambda_1(A)$ es un múltiplo escalar de un $u_1 > 0$, estrictamente positivo.

Teorema 8.2. *Si A es una matriz n-cuadrada estrictamente regular con signatura ε, entonces todos los autovalores de A son reales y distintos. Más aún,*

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}} \lambda_m(A) > |\lambda_{m+1}(A)| \ , \qquad \textit{para todo} \quad m \in \mathbb{I}_n \, , \tag{76}$$

donde usamos la convención $\varepsilon_0 = 1$ y $\lambda_{n+1}(A) = 0$. Además, los correspondientes autovectores $u_1, u_2, \dots, u_n$ pueden ser elegidos en $\mathbb{R}^n$, y de modo tal que

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m > 0 \quad \textit{(como vector)} \ , \ \textit{para todo} \quad m \in \mathbb{I}_n \, . \tag{77}$$

Demostración. La prueba se hará por inducción en m. El caso $m = 1$ es consecuencia del Lema 8.1 porque $\varepsilon_1 A > 0$ por hipótesis. Supongamos que el resultado es cierto para $1 \leq i \leq m-1$. Como $\varepsilon_m \cdot \Lambda^m A > 0$ por hipótesis, y $\lambda_1(\varepsilon_m \cdot \Lambda^m A) = \varepsilon_m \prod_{i=1}^m \lambda_i(A)$ por el Teorema 2.7, se sigue nuevamente del Lema 8.1 que

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} \lambda_i(A) = \varepsilon_m \prod_{i=1}^{m} \lambda_i(A) > \prod_{i=1}^{m-1} |\lambda_i(A)| \cdot |\lambda_{m+1}(A)| > 0.$$

Entonces (76) para m se deduce de la hipótesis inductiva, que en particular nos dice que $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}}\,\lambda_i(A) = |\lambda_i(A)|$, para $i < m$. Ahora, como $\lambda_m(A)$ es real, u_m puede ser elegido real. Por lo tanto tenemos que $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m$ es autovector no nulo de $\varepsilon_m \cdot \Lambda^m A$ correspodiente a $\lambda_1(\varepsilon_m \cdot \Lambda^m A)$, y tiene cordenadas reales. Entonces, por el Lema 8.1, tomando $\xi = 1$ o bien $\xi = -1$, tenemos que $\xi \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m > 0$. Ahora, reemplazando a u_m por ξu_m en caso de que sea necesario, obtenemos (77) para todo $m \in \mathbb{I}_n$. □

El conjunto con autovalores reales $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ conseguidos en el Teorema 8.2 posee propiedades oscilatorias interesantes. Para sus formulaciones, necesitamos algunas definiciones.

1. A cada $x \in \mathbb{R}^n$ le asignamos la función linear a trozos $x(t) : [1, n] \to \mathbb{R}^n$ definida por:
$$x(t) = (k + 1 - t)x_k + (t - k)x_{k+1} \quad \text{si} \quad k \le t \le k + 1 \ , \quad k \in \mathbb{I}_{n-1} \ . \tag{78}$$
2. Los *nodos* de $x(t)$ son las raíces de la ecuación $x(t) = 0$, ordenados de manera creciente.
3. Dos sucesiones ordenadas $\xi_1 < \xi_2 < \cdots \xi_k$ y $\eta < \eta_2 \cdots < \eta_{k+1}$ se dicen *entrelazadas* si
$$\eta_k < \xi_k < \eta_{k+1} \ , \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{I}_k \ .$$

Teorema 8.3. *Sea A una matriz n-cuadrada, estrictamente regular de signo. Entonces su autovector real u_k, correspondiente al k-ésimo autovalor, tiene exactamente $k - 1$ variaciones de signo:*
$$V(u_k) = k - 1, \ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{79}$$
Además los nodos de $u_k(t)$ y los de $u_{k+1}(t)$ están entrelazados.

Demostración. Por el Teorema 8.2, para cada k tenemos $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k > 0$ o < 0; de donde $V_+(u_k) \le k - 1$ por el Lema 7.1. Para ver que $V_- u_k \ge k - 1$, de acuerdo a (72), basta mostrar que $V_+(J_n u_k) \le n - k$. Consideremos $J_n A^{-1} J_n$, la cual es nuevamente estrictamente regular de signo por el Teorema 5.3. Como $J_n u_k$ es un autovector de $J_n A^{-1} J_n$ correspondiente a $1/\lambda_k(A) = \lambda_{n-k+1}(J_n A^{-1} J_n)$, el argumento anterior da que $V_+(J_n u_k) \le n - k$. Esto prueba (79). Ahora afirmamos que para $1 \le k \le n - 1$
$$V_+(\xi u_k + \zeta u_{k+1}) - 1 \le V_-(\xi u_k + \zeta u_{k+1}) \text{ siempre que } \xi, \zeta \in \mathbb{R} \text{ y } |\xi| + |\zeta| \ne 0. \tag{80}$$
Como nuevamente $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \wedge u_{k+1} > 0$ o < 0, el Lema 7.1 garantiza que
$$V_+(\xi u_k + \zeta u_{k+1}) \le (k + 1) - 1 = k.$$
Apliquemos el mismo argumento a $J_n u_n, J_n u_{n-1}, \ldots, J_n U_k$, los cuales son los primeros $n - k + 1$ autovectores de las matriz estrictamente regular de signo $J_n A^{-1} J_n$ para ver
$$V_+(\xi J_n u_k + \zeta J_n u_{k+1}) \le n - k.$$

Entonces (72) determina (80):

$$V_-(\xi u_k + \zeta u_{k+1}) = n - 1 - V_+(\xi J_n u_k + \zeta J_n u_{k+1}) \geq k - 1 \geq V_+(\xi U_k + \zeta u_{k+1}) - 1.$$

Ahora pasemos a la prueba de la segunda afirmación. Sea $x(t) = u_k(t)$ e $y(t) = u_{k+1}(t)$. Por (79), $x(t)$ e $y(t)$ tienen $k-1$ y k nodos respectivamente, y ninguno de estos nodos es entero, por ejemplo, para x, los nudos sólo se dan si

$$\operatorname{sgn}(x_i) \neq \operatorname{sgn}(x_{i+1}) \ , \quad \text{en} \quad i < \frac{i(x_i + |x_{i+1}|) + x_i}{x_i + x_{i+1}} < i + 1$$

(si $x_i = -x_{i+1}$, no hay nodos por que $x(t) \equiv x_i$). Sean $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ los nodos de $y(t)$. Entonces para la segunda afirmación basta probar que $x(t)$ tiene al menos un nodo en cada intervalo abierto (t_l, t_{l+1}), $l = 1, 2, \ldots, k-1$. Para esto, (80) será usado en la siguiente forma: si $|\xi| + |\zeta| \neq 0$ y $1 < j < n$,

$$\{\xi x(j-1) + \zeta y(j-1)\} \{\xi x(j+1) + \zeta y(j+1)\} < 0 \ , \tag{81}$$

siempre que $\xi x(j) + \zeta y(j) = 0$, ya que, para un vector x dado, se cumple que $V_+(x) - 1 \leq V_-(x)$ sólo si por cada componente nula x_i de x, tenemos que $i = 1, n$ o $x_{i-1}x_{i+1} < 0$.

Supongamos que $x(t)$ no tiene nodos en el intervalo (t_l, t_{l+1}), esto es, $x(t) > 0$, por ejemplo, en este intervalo. Afirmamos que $x(t) \geq \delta > 0$ uniformemente en el intervalo cerrado $[t_l, t_{l+1}]$. De otro modo, si por ejemplo $x(t_l) = 0$, tomemos i tal que $i-1 < j < i$. Como $x(t)$ es lineal para $i - 1 < t < i$, tenemos que $x(i-1)x(i) < 0$, y con la elección

$$\xi = -\frac{y(i)}{x(i)},$$

El paper dice $-\frac{y(i)-y(i-1)}{x(i)-x(i-1)}$.

$\xi x(t) + y(t)$ se anula para todo $i - 1 \leq t \leq i$, ya que $\xi x(i) + y(i) = \xi x(t_l) + y(t_l) = 0$, y es una función lineal en $(i, i+1)$. Esto contradice (81). Ahora, por la definición de nodos, $y(t)$ es definido, supongamos ≥ 0, en el intervalo $[t_l, t_{l+1}]$. Ahora sea η el mínimo de los $\eta > 0$ para los cuales $-\eta y(t) + x(t)$ tiene un nodo s, $t_l \leq s \leq t_{l+1}$. Como por la propiedad minimal, $-\eta y(t) + x(t) \geq 0$ en el intervalo, y porque $-\eta y(t) + x(t)$ es linear a trozos como (78), esto es posible sólo cuando s es un entero o $-\eta y(t) + x(t)$ se anula en todo el intervalo $j - 1 \leq t \leq j$ conteniendo a s. Pero cada una de estas psibilidades produce una contradicción a (81) $\square$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es estrictamente regular de signo, su adjunta A^* es también estrictamente regular de signo. Por el Teorema 8.2, los autovectores reales $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de A^* pueden ser elegidos de forma tal que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k > 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{82}$$

Las propiedades (77) y (82) de los autvectores de A y A^* caracterizan en algún sentido la regularidad de signo estricta.

Teorema 8.4. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es inversible, tiene n autovalores reales de distinto módulo, y los autovectores reales u_k de A y v_k de A^*, correspondientes a $\lambda_k(A) = \lambda_k(A^*)$, son elegidos de forma tal que satisfagan (77) y (82):*

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k > 0 \quad \text{ y } \quad v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k > 0, \quad \textit{para todo} \quad k \in \mathbb{I}_n\,,$$

entonces alguna potencia de A es estrictamente regular de signo.

Demostración. Sea $\lambda_k = \lambda_k(A)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ y sean

$$U = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \quad \text{ y } \quad V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]\,.$$

Entonces U y V son inversibles,

$$A = U \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \cdot U^{-1},\ A^* = V \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \cdot V^{-1}, \tag{83}$$

y

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0. \tag{84}$$

Como claramente $\langle u_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, i. e. V^*U diagonal, (83) implica que

$$U^{-1} = \operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) V^* \tag{85}$$

para algunos ρ_i no nulos, $i = 1, 2, \ldots, n$, ya que resulta, si $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $A = U\Lambda U^{-1} = V^{-1^*}\Lambda V^*$, de donde $V^*U\Lambda U^{-1}V^{-1^*} = \Lambda$. Estos ρ_i son todos positivos, porque

$$0 < \langle u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle = \prod_{i=1}^{k} \rho_i^{-1},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Por (13), para todo entero positivo p y $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, se sigue de (83) y (85) que

$$\begin{aligned}
\det A^p[\alpha|\beta] &= \sum_{\omega \in Q_{k,n}} \det U[\alpha|\omega] \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \lambda_{\omega_i} \right)^p \cdot \det U^{-1}[\omega|\beta] \\
&= \sum_{\omega \in Q_{k,n}} \det U[\alpha|\omega] \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \lambda_{\omega_i} \right)^p \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \rho_{\omega_i} \right) \cdot \det V[\beta|\omega] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k} \lambda_{\omega_i} \right)^p \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \rho_i \right) \det U[\alpha|1, 2, \ldots, k] \det V[\beta|1, 2, \ldots, k] \quad + \\
&\quad + \quad \sum_{\substack{\omega \in Q_{k,n} \\ \omega \neq \{1, 2, \ldots, k\}}} \det U[\alpha|\omega] \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \rho_{\omega_i} \right) \cdot \det V[\beta|\omega].
\end{aligned}$$

Notar que (84) implica que

$$\prod_{i=1}^{k} |\lambda_i| > \prod_{i=1}^{k} |\lambda_{\omega_i}| \text{ para } \omega_i \in Q_{k,n},\ \omega \neq \{1,2,\ldots,k\},$$

mientras que (77) y (82) implican que

$$U[\alpha|1,2,\ldots,k] > 0 \text{ y } V[\beta|1,2,\ldots,k] > 0 \text{ para} \alpha,\beta \in Q_{k,n}.$$

Entonces para un p suficientemente grande, $\det A^p[\alpha|\beta]$ es no nulo y tiene el mismo signo que $\left(\prod_{i=1}^{k}\right)^p$ para cada $\alpha,\beta \in Q_{k,n}$, esto es, A^p es estrictamente regular de signo. $\square$

Ahora compararemos los autovalores de A con los de $A[\alpha]$, para un α adecuado. El siguiente teorema generaliza un hecho que sabíamos para $A \in H(n)$ y $\alpha \in Q_{n-1,n}$ (entrelace de Cauchy) y que habíamos mencionado para también para $Q_{k,n}$.

Teorema 8.5. *Si A es una matriz n-cuadrada oscilatoria, entonces para cada $\alpha \in Q_{k,n}$ ($1 \leq k \leq n-1$) con componentes consecutivas, i. e. $d(\alpha) = 0$,*

$$\lambda_j(A) > \lambda_j(A[\alpha]) > \lambda_{n+j-k}(A),\ j = 1,2,\ldots,k, \tag{86}$$

y

$$\lambda_j(A) > \lambda_j(A/\alpha') > \lambda_{n+j-k}(A),\ j = 1,2,\ldots,k. \tag{87}$$

Demostración. Probaremos (86) por inducción hacia atrás en k. Cuando $k = n-1$, tenemos $\alpha = \{1,2,\ldots,n-1\}$ o $= \{2,3,\ldots,n\}$. Supongamos $\alpha = \{1,2,\ldots,n-1\}$, y sea $B = A[\alpha]$. Claramente $\lambda_l := \lambda_j(A)$, $j = 1,2,\ldots,n$ son los únicos nodos del polinomio $d_A(t) := \det A_t$ donde $A_t := tI_n - A$, mientras que $\lambda_j(B)$, $j = 1,2,\ldots,n-1$, son los únicos nudos del polinomio $d_B(t) := \det B_t$, donde $B_t := tI_n - B$. Para ver (86) para este α, basta mostrar que

$$d_B(\lambda_i)d_B(\lambda_{i+1}) < 0,\ i = 1,2,\ldots,n-1. \tag{88}$$

Consideremos los vectores x_t, con parámetro real t, definidos por

$$x_t := \left[(-1)^{n+i} \det A_t[\alpha|i)\right]_{1\leq i\leq n}.$$

Entonces (25) muestra que $A_t x_t = d_A(t)e_n$, con lo que

$$Ax_{\lambda_j} = \lambda_j x_{\lambda_j},\ j = 1,2,\ldots,n. \tag{89}$$

La n-ésima componente $x_t(n)$ de x_t coincide con $d_B(t)$, mientras que la primera componente $x_t(1)$ admite la representación

$$x_t(1) = \sum_{j=2}^{n} t^{n-j} \sum_{\substack{\omega\in Q_{j,n}\\ \omega_1=1,\omega_j=n}} \det A[\omega - \{n\}|\omega - \{1\}]. \tag{90}$$

Esto último sale del hecho de que $(tI_n - A)[1, \ldots, n-1, 2, \ldots, n]$ tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{23} & \ldots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ t-a_{22} & -a_{23} & \ldots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ -a_{32} & t-a_{33} & \ldots & -a_{3n-1} & -a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_{n-12} & -a_{n-13} & \ldots & t-a_{n-1n-1} & -a_{n-1n} \end{bmatrix}$$

y viendo que subdeterminantes le correponden a cada potencia de t.

Afirmamos que $x_t(1) > 0$ para todo $t > 0$. De hecho, como $d_B(t)$ tiene sólo $n-1$ nodos, para algún j tenemos $x_{\lambda_j}(n) = d_B\lambda_j \neq 0$. Entonces por (89), x_{λ_j} es un vector no nulo de la matriz oscilatoria A, correspondiente a $\lambda_j = \lambda_j(A)$, y su primer componente $x_{\lambda_j}(1)$ no se anula, porque x_{λ_j} tiene exactamente $j-1$ variaciones de signo según el Teorema 8.3. Por otro lado, como A es totalmente positiva, (90) muestra que $x_t(1)$ es un polinomio de t con coeficientes no negativos. Entonces $x_t(1) > 0$ para todo $t > 0$. Ahora por (89), para cada i, x_{λ_i} es el i-ésimo autovector de A con componente primera positiva. Luego se sigue del Teorema 8.3 que la n-ésima componente tiene signo $(-1)^{i-1}$. Esto establece (78), porque $x_{\lambda_i}(n) = d_B(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Para $\alpha = \{2, 3, \ldots, n\}$, tomamos nuevamente $B = A[\alpha]$ y ahora

$$y_t = \left[(-1)^{1+i} \det A_t[\alpha|i)\right]_{1\leq i\leq n}.$$

En este caso tenemos $A_t y_t = d_A(t)e_1$, lo que implica que $Ay_{\lambda_j} = \lambda_j y_{\lambda_j}$. Aquí, la primera componente de y_t coincide con $d_B(t)$, mientras que la última admite un representación como la anterior. Entonces la primera tioene signo $(-1)^{i-1}$ y obtenemos así (86).
Supongamos que (86) es cierto para $k > 1$ y tomemos $\alpha \in Q_{k-1,n}$ con $d(\alpha) = 0$. podemos asumir que $\alpha = \{i, i+1, \ldots, i+k-2\}$ e $i+k-1 \leq n$. Ahora aplicamos el argumento anterior la matriz oscilatoria k-cuadrada $A[\alpha \cup \{i+k-1\}]$ para obtener

$$\lambda_j(A[\alpha \cup \{i+k-1\}]) > \lambda_j(A[\alpha]) > \lambda_{j+1}(A[\alpha \cup \{i+k-1\}]),\ j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Por otro lado, la hipótesis inductiva implica

$$\lambda_j(A) > \lambda_j(A[\alpha \cup \{i+k-1\}]) > \lambda_{n+j-k}(A),\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Estas desigualdades prueban (86) para el caso $k-1$ completando la inducción. Resta ver el caso en que $i+k-2 = n$, i. e. $\alpha = \{i, i+1, \ldots, n\}$, que se obtiene de manera análoga, aplicando el segundo argumento a la matriz $A[\alpha \cup \{i-1\}]$. Finalmente (87) se sigue de (86). De hecho, $J_nA^{-1}J_n$ es también oscilatoria y $(J_nA^{-1}J_n)[\alpha] = J_\alpha(A/\alpha')^{-1}J_\alpha$ por el Teorema 6.2. Observemos que $J_nA^{-1}J_n\tilde{x} = \lambda\tilde{x}$ si y sólo si $A^{-1}x = \lambda x$ y $\tilde{x}J_nx$. Ahora aplicamos (86), notando que

$$\frac{1}{\lambda_j(A)} = \lambda_{n-j+1}(J_nA^{-1}J_n) \text{ y } \frac{1}{\lambda_j(a/\alpha')} = \lambda_{k-j+1}((J_nA^{-1}J_n)[\alpha]).$$

De hceho, de la desigualdad $\lambda_j(J_nA^{-1}J_n) > \lambda_j(J_nA^{-1}J_n[]\alpha) > \lambda_{n+j-k}(J_nA^{-1}J_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_j(A) &= \frac{1}{\lambda_{n-j+1}(J_nA^{-1}J_n)} > \frac{1}{\lambda_{k-j+1}(J_nA^{-1}J_n[\alpha])} \\ &= \lambda_j(A/\alpha') > \frac{1}{\lambda_{k-j+1}(J_nA^{-1}J_n)} = \lambda_{n+j-k}(A) \ ,\end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

Con la ayuda del Teorema de aproximación 4.9, algunos de los resulatdos anteriores pueden ser genarlizados al caso en que A es regular de signo o totalmente positiva.

Corolario 8.6. *Si A es una matriz n-cuadrada, regular de signo con signatura ε, entonces todos sus autovalores son reales, y*

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}}\lambda_k(A) > 0, \ \ k = 1, 2, \ldots, rank(A).$$

Si A es totalmente positiva, entonces para cada $\alpha \in Q_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n-1)$ con componentes consecutivas, i. e. $d(\alpha) = 0$,

$$\lambda_j(A) \geq \lambda_j(A[\alpha]) \geq \lambda_{n+j-k}(A), \ \ j = 1, 2, \ldots, k.$$

□

Dado un n-vector $x = (x_i)$, denotemos por x^* a su reordenación decreciente:

$$x_1^* \geq x_2^* \geq \cdots \geq x_n^* \text{ y } x_i^* = x_{\pi(i)} \text{ para alguna } \pi \in \mathbf{S}_n. \tag{91}$$

Teorema 8.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y sea $\delta(A) := (a_{ii}) \in \mathbb{R}^n$, la diagonal de A. Si A es totalmente positiva, entonces $\delta(A) \prec \lambda(A)$ (mayorizado por).*

Demostración. Por inducción en n. para $n = 1$, es trivial. Asumamos que vale para $n-1$. Como $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = \sum_{i=1}^n \delta_i(A)$, y $\lambda_i(A) = \lambda_i^*(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, por definici´on y por el Corolario 8.6, basta mostrar que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(A) \geq \sum_{i=1}^k \delta_i^*(A) \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{92}$$

Sea $\delta_1(A) = \delta_p^*(A)$ y $\delta_n(A) = \delta_q^*(A)$. Tomando la conversión de A en caso de que sea necesario, podemos asumir que $p > q$. Sea $B = A(n)$ y $C = A(1)$. Como B y C son matrices $(n-1)$-cuadradas totalmente positivas, la hipótesis inductiva determina que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(B) \geq \sum_{i=1}^k \delta_i^*(B) \text{ y } \sum_{i=k}^{n-1} \lambda_i(C) \leq \sum_{i=k}^{n-1} \delta_i^*(C), \ \ k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{93}$$

Como $\delta_i^*(B) = \delta_i^*(A)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, por definición y porque $\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ por el Corolario 8.6, (93) implica (92) para $i = 1, 2, \ldots, p$. En lugar de probar (92) para $k > p$, mostremos la igualdad

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i(A) \leq \sum_{i=k+1}^{n} \delta_i^*(A). \tag{94}$$

Como $\delta_i^*(A) = \delta_i^*(C)$, $i = p+1, p+2, \ldots, n$, y $\lambda_{i-1}(C) \geq \lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, por el Corolario 8.6, (93) implica (94). □

9. Algunos ejemplos.

En esta sección presentamos algunos ejemplos de matrices totalmente positivas y la caracterización de estas matrices.

9.1 (Núcleos totalmente positivos)**.** La mayor parte de las matrices totalmente positivas no triviales surgen de la restricción de núcleos totalemnte positivos a conjuntos finitos adecuados. Estas son algunas fórmulas de producción de núcleos totalmente positivos. Sean Γ, Λ conjuntos totalmente ordenados (en general, subconjuntos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$). Una función a valores reales $K(s,t)$ para $s \in \Gamma$, $t \in \Lambda$ es un *núcleo totalmente positivo* si la matriz $[K(s_i, t_j)]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ es totalmente positiva para toda elección $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. La positividad total estricta de un núcleo se define análogamente.

Si $K(s,t)$ es totalmente positivo y $f(s), g(t)$ son funciones positivas en Γ y Λ respectivamente, entonces el núcleo $f(s)K(s,t)g(t)$ es totalmente positivo. Si $K(s,t)$ es totalmente positivo y $\phi(s)$ es un operador monótonamente creciente de un conjunto totalmente ordenado Γ_1 a Γ, y $\psi(t)$ es un operador monótonamente creciente de un conjunto totalmente ordenado Λ_1 a Λ, entonces $K(\phi(s), \psi(t))$ es un núcleo totalmente positivo en $\Gamma_1 \times \Lambda_1$. Si dos núcleos $L(s,t)$ y $M(s,t)$ son totalmente positivos y $d\sigma(\cdot)$ es una medida en Γ, entonces el núcleo

$$K(u,v) := \int_T L(s,u)M(s,v)d\sigma(s), \; u, v \in \Lambda, \tag{95}$$

es totalmente positivo en $\Lambda \times \Lambda$, si la integral existe. Esto es sólo una modificación del Teorema 5.1. Pasemos ahora a la construcción de ejemplos concretos

1. Para cualesquiera α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, el núcleo $K(s,t) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k s^k t^k$ es totalmente positivo en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. De hecho, $K(s,t)$ es una composición del tipo (95), con $L(k,t) = M(k,t) = t^k$ en $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}_+$. La positividad total del núcleo $L(k,t)$ es una consecuencia del *determinante de Vandermonde*:

$$det\left[t_j^i\right]_{\substack{i=0,1,\ldots,n-1\\ j=1,2,\ldots,n}} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i). \tag{96}$$

2. Para cualquier $\sigma > 0$ el núcleo $K(s,t) = \exp(\sigma st)$ es totalmente positivo en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, como límite de núcleos del tipo 1. este núcleo es estrictamente totalmente positivo en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ también. En consecuencia $\exp[-\sigma(s-t)^2]$ es estrictamente totalmente positivo en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ porque

$$\exp\left[-\sigma(s-t)^2\right] = \exp(-\sigma s^2)\exp(2\sigma st)\exp(-\sigma t^2).$$

3. Para $p = 1, 2, \ldots$, las matrices n-cuadradas

$$G_p = \left[\det\left(-\frac{(i-j)^2}{p}\right)\right]$$

son estrictamente totalmente positivas por 2., y $G_p \to I_n$ cuando $p \to \infty$. Esta sucesión ha sido usada varias veces en secciones anteriores.

4. Para cada $0 < \lambda < 1$ y $0 \neq p \in \mathbb{R}$, consideremos el *promedio pesado* en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$M_{\lambda,p} := \{\lambda s^p + (^{\text{o}} - \lambda)t^p\}^{1/p}. \tag{97}$$

Entonces $M_{\lambda,p}(s,t)$ o $1/M_{\lambda,p}(s,t)$ es totalmente positivo de acuerdo a si $p < 0$ o $p > 0$. Esto se sigue de la observación de que para cualquier $\gamma > 0$

$$\frac{1}{(s+t)^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^{0} e^{us} e^{ut} \frac{du}{|u|^{1-\gamma}}, \tag{98}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, y el núcleo $\exp(us)$ es totalmente positivo en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

5. El núcleo $K(s,t) := \min(s,t)$ es totalmente positivo en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, porque

$$K(s,t) = \lim_{p \to -\infty} M_{\lambda,p}(s,t) \tag{99}$$

6. Si $f(t), g(t)$ son funciones positivas en $\mathbb{R}_+$ tales que $h(t) := f(t)/g(t)$ es no decreciente, entonces el núcleo

$$K(s,t) := f(\text{mín}(s,t))g(\text{máx}(s,t))$$

es totalmente positivo en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, porque

$$K(s,t) = \text{mín}\{h(s), h(t)\}g(\text{mín}(s,t))g(\text{máx}(s,t)) = g(s) \cdot \text{mín}\{h(s), H(t)\} \cdot g(t).$$

Para $\sigma > 0$, con $g(t) = \exp(-\sigma t)$ y $h(t) = \exp(2\sigma t)$, el núcleo $\exp(-\sigma|s-t|)$ es totalmente positivo en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

7. Sean $\{b_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ y $\{c_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ sucesiones positivas. Entones la matriz n-cuadrada $[b_{\text{mín}(i,j)} c_{\text{máx}(i,j)}]$ es totalmente positiva si y sólo si $b_1/c_1 \leq b_2/c_2 \leq \ldots \leq b_n/c_n$. esto se sigue inmediatamente de (6), ya que podemos considerando las funciones $f(t) = b_i$, si $i - 1 \leq t < i$ y $g(t) = c_i$, si $i - 1 \leq t < i$. Una matriz de este tipo es llamada *matriz de Green.* $\diamondsuit$

9.2 (Matriz de Hurwitz)**.** Es un conocido teorema de A. Hurwitz que un polinomio $p(z) = d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \ldots + d_n$ a coeficientes reales ($d_0 > 0$) tiene todos sus ceros en semiplano abierto $\operatorname{Re} z < 0$ si y sólo si la matriz n-cuadrada

$$H := [d_{2j-i}] = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & d_5 & d_7 & d_9 & \cdots & 0 \\ d_0 & d_2 & d_4 & d_6 & d_8 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & d_5 & d_7 & \cdots & 0 \\ 0 & d_0 & d_2 & d_4 & d_6 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \tag{100}$$

donde $d_k = 0$ para $k < 0$ o $> n$, tiene menores principales positivos:

$$\det H[1, 2, \ldots, k] > 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{101}$$

Un tal polinomio $p(z)$ es llamado un *polinomio de Hurwitz* y la matriz H es la matriz de Hurwitz asociada a él.
Mostremos, por inducción en n, que la matriz de Hurwitz es totalmente positiva. Cuando $n = 1$ es trivial. Supongamos que es cierto para $n-1$. Como $d_1 > 0$ para una matriz de Hurwitz (100), se sigue de (30) que la matriz $(n-1)$-cuadrada $G := H/\{1\}$, indexada por $2, 3, \ldots, n$ tiene también menores principales positivos:

$$\det G[2, 3, \ldots, k] > 0, \;\; k = 2, 3, \ldots, n. \tag{102}$$

Sean g_j, $j = 2, 3, \ldots, n$ los $n-1$-vectores fila de G y $c = d_0/d_1$. Entonces las matriz $(n-1)$-cuadrada F, indexada por $2, 3, \ldots, n$, cuyos vectores fila f_j están definidos por

$$f_2 := g_2, \text{ y } f_{2j-1} := g_{2j-1}, \;\; f_{2j} := g_{2j} - c g_{2j-1} \text{ para } j \geq 2, \tag{103}$$

también tiene menores principales positivos. Haciendo la cuenta vemos que F es una matriz de la forma (100) con $n-1$ en lugar de n, y d'_j en lugar de d_j, donde

$$d'_{2j} = d_{2j+1} \text{ y } d_{2j-1} = d_{2j} - c d_{2j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{104}$$

Entonces de acuerdo a la hipótesis inductiva, F es totalmente positiva, y también lo es la matriz n-cuadrada

$$\tilde{F} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}.$$

Ahora se ve, haciendo la cuenta, de (104) que

$$H[1, 2, \ldots, n-2] = H(n-1, n) = \left(\left\{ S + \frac{c}{2}(I_n - J_n) \right\} S \tilde{F} S^* \right)(n-1, n), \tag{105}$$

donde $S = [0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}]$. Las matrices S y S^* son totalmente positivas, y lo es la matriz triangular superior $S + \frac{c}{2}(I_n - J_n)$.
Ahora la positividad total de H sale de (105) por los Teoremas 5.1 y 4.2, ya que de

allí deducimos que $H[1,\ldots,n-2]$ es totalmente positiva. Pero de esto se puede deducir la positividad total de H, por la forma de esta matriz. Veamos cómo se realiza esto en el caso $n=3$. En este caso,

$$H=\begin{bmatrix} d_1 & d_3 & 0 \\ d_0 & d_2 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Tenemos que

1. $d_1>0$,
2. $d_1d_2-d_0d_3\geq 0$,
3. $\det H>0$.

Basta entonces chequear que $\det H[\alpha|\beta]\geq 0$ para β con $d(\beta)=0$. Si $\beta\in Q_{1,3}$, sabemos que $d_0,d_1>0$ y, si $d_2<0$, por (2),

$$d_1d_2^2\leq d_0d_3d_2\Rightarrow d_3\leq 0$$

pero

$$\det H=d_3\det\left(\begin{bmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{bmatrix}\right)>0\Rightarrow d_3>0.$$

Si $\beta\in Q_{2,3}$ y $d(\beta)=0$, tenemos dos posibilidades, $\beta=(1,2)$ o $\beta=(2,3)$. En el primer caso, si $\alpha=(1,2)$, tenemos la positividad por hipótesis, y, si $\alpha=(1,3)$ o $(2,3)$, obtenemos

$$\det\left(\begin{bmatrix} d_1 & d_3 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right)=d_1^2>0,\ \det\left(\begin{bmatrix} d_0 & d_2 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right)=d_0d_1>0$$

Finalmente, si $\beta=(2,3)$, para cada $\alpha=(1,2),(1,3),(2,3)$ tenemos, respectivamente,

$$\det\left(\begin{bmatrix} d_3 & 0 \\ d_2 & 0 \end{bmatrix}\right)\geq 0,\ \det\left(\begin{bmatrix} d_3 & 0 \\ d_1 & d_3 \end{bmatrix}\right)=d_3^2\geq 0,\ \det\left(\begin{bmatrix} d_2 & 0 \\ d_1 & d_3 \end{bmatrix}\right)=d_2d_3\geq 0.$$

y por lo tanto H resulta totalmente positiva. $\diamondsuit$

9.3 (Matrices de Toeplitz)**.** Para una sucesión (bi-)infinita $\{a_n:-\infty<n<\infty\}$, la matriz $(a_{i-j})_{i,j=1,2,\ldots}$ es llamada su matriz de Toeplitz, y la función $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n$, su función generadora. Un matriz de Toeplitz es totalmente positiva si y sólo si su función generadora es de la forma

$$f(z)=Cz^k\exp\left(\gamma_1 z+\frac{\gamma_{-1}}{z}\right)\cdot\frac{\prod_1^\infty(1+\alpha_nz)\prod_1^\infty\left(1+\frac{\rho_n}{z}\right)}{\prod_1^\infty(1-\beta_nz)\prod_1^\infty\left(1-\frac{\delta_n}{z}\right)},$$

donde k es un entero, $C\geq 0$, $\gamma_1,\gamma_{-1}\geq 0$ y $\alpha_n,\beta_n,\rho_n,\delta_n\geq 0$ son tales que $\sum_1^\infty(\alpha_n+\beta_n+\rho_n+\delta_n)<\infty$.

Cuando $a_n = 0$ para $n < 0$, la matriz de Toeplitz es totalmente positiva si y sólo si su función generadora es de la forma

$$f(z) = Ce^{\gamma z} \frac{\prod_1^\infty (1 + \alpha_n z)}{\prod_1^\infty (1 - \beta_n z)},$$

donde $C \geq 0$, $\gamma \geq 0$, y $\alpha_n, \beta_n \geq 0$ son tales que $\sum_1^\infty (\alpha_n + \beta_n) < \infty$. Las pruebas de estos hechos, basadas fuertemente en la teoría de funciones analíticas están más allá del alcance de este trabajo. Cuando es aplicada a un polinomio la caracterización anterior implica que un polinomio $p(z) = d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \ldots + d_n$ $(d_0 > 0)$ tiene todos sus ceros en eje real no negativo si y sólo si la matriz infinita $(d_{n+j-i})_{i,j=1,2,\ldots}$ es totalmente positiva, donde $d_k = 0$ para $k < 0$ o $> n$. Notemos que la matriz de Hurwitz H introducida antes es una submatriz de T, más precisamente $H = T[n+1, n+2, \ldots, 2n|2, 4, \ldots, 2n]$. $\diamondsuit$

9.4 (Función de frecuencia de Pólya)**.** Una función $f(t)$ en $(-\infty, \infty)$ es llamada una *función de frecuencia de Pólya* si el núcleo $K(s,t) := f(s-t)$ es totalmente positivo. La siguiente caracterización se debe a Schoenberg (1953), $f(t)$ es una función de frecuencia de Pólya si y sólo si su transformada bilátera de Laplace existe en una tira abierta que contenga al eje imaginario y tiene la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(s) ds = C \exp(\gamma t^2 + \delta t) \cdot \prod_1^\infty \frac{\exp(\alpha_n t)}{1 + \alpha_n t},$$

donde $C > 0$, $\gamma \geq 0$, δ y α_n son reales tales que $0 < \sum_1^\infty |\alpha_n|^2 < \infty$. La prueba de este resultatdo está más alla del alcance de este trabajo. $\diamondsuit$

Referencias

[1] T. Ando, Totally positive matrices, Linear Algebra Appl. 90 (1987), 165-219.

[2] R. Bhatia; *Matrix Analysis*, Springer, New York, 1997.

[3] A. Benedek y R. Panzone; *La matriz positiva y su espectro*, Informe Técnico interno No.86, INMABB, Bahía Blanca, 2003.

[4] M. C. González; *Relaciones de Mayorización para el Producto de Hadamard*, Tesis de licenciatura, Depto. Mat. FCEA-UNC, Neuquén, 2003.

[5] R. Horn y C. Johnson; *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[6] R. Horn y C. Johnson; *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[7] P. D. Lax, Linear Algebra, Springer Verlag, Berlín, 1998.

[8] L. Mirsky, An introduction to Linear Algebra, Clarendon Press, Oxford, 1963.

[9] M. L. Metha, Matrix Theory, 2a Ed., Hindustan Publishing Co. 1989.

[10] R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, 2a Ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

[11] W. F. Donoghue, Jr., Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[12] A. W. Marshall y I. Olkin, Inequalities: Theory of Mayorization and its Applications, Academic Press, New York, 1979.

[13] B. Simon, *Trace ideals and their applications*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 35, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1979.