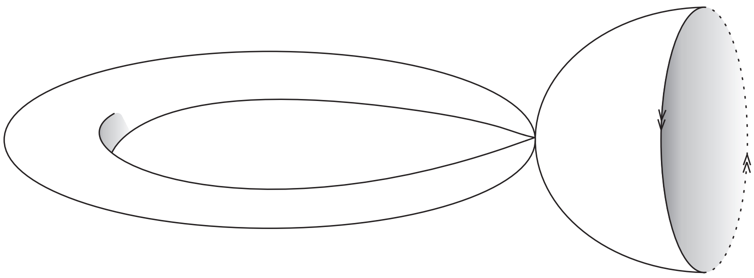
Exámenes de Doctorado

1996 – 2009



Recopilación de:
Agustín García Iglesias
Emilio Lauret

Junio 2009

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

Prefacio

El examen de doctorado ("qualifying") es uno de los requerimientos de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF) para optar por el título de "Doctor en Matemática".

En el año 1995 la Dra. María J. Druetta hizo una recopilación de exámenes de doctorado tomados desde la creación de la carrera en 1980 hasta marzo de 1995. El trabajo de archivo de la Dra. Druetta fue realmente excelente ya que se publicaron 68 de los 70 exámenes tomados en ese período de 15 años. Esta publicación pretende continuar y actualizar la tarea de la Dra. Druetta. En nuestro caso, hemos podido publicar 78 de un total de 111. Los exámenes faltantes pertenecen principalmente a la época 1996–2000.

El contenido matemático de los exámenes aquí reproducidos se mantiene fiel al de los originales. Sin embargo, nos hemos permitido hacer algunas modificaciones en la presentación de los mismos, siguiendo una línea estética propia.

La idea de hacer esta recopilación surgió naturalmente cuando los autores, al prepararse para rendir este examen, lamentaron no contar con exámenes más recientes. Esperamos que los futuros doctorandos encuentren en las páginas de este libro el entrenamiento y la confianza necesarios para sobrellevar esta primera prueba en el camino al doctorado.

Agradecemos a todos los profesores de esta facultad que restaron minutos de su tiempo para ayudarnos en la tarea, buscando los exámenes que ellos hubieran tomado.

Agradecemos también a la Comisión Editora de Publicaciones de Matemática su aporte para llevar a cabo esta publicación.

Los autores.
Junio, 2009.

Contenidos

CAPÍTULO 1

Funciones complejas

Agosto 2009

El examen se aprueba sumando al menos 50 puntos.

1. (16pt.)

(a) Sea u una función armónica en $\Omega = \{z : |z| < R\}$ y continua en $\overline{\Omega}$ tal que $u \equiv 0$ sobre el borde $\partial\Omega$. Probar que $u \equiv 0$ en Ω.

(b) Sea $f(z)$ analítica en una región $A \supset \overline{D} = \{z : |z| \leq 2\}$ tal que $f(\partial D) \subset i\mathbb{R}$. ¿Qué puede afirmar sobre f? Justificar.

2. (17pt.) Sea $A = \{z : |z+i| < 1\} \cap \{z : |z-1| < 1\}$. Mostrar que existe (construir) una aplicación conforme de A sobre el disco unitario $U = \{z : |z| < 1\}$.

3. (17pt.)

(a) Sea $f(z)$ analítica en un abierto $A \supset \overline{U} = \{z : |z| \leq 1\}$, que satisface $|f(z)| < 1$, $\forall z \in \partial U$. Probar que f tiene exactamente un punto fijo en el disco unitario $U = \{z : |z| < 1\}$.

(b) ¿Verdadero o falso? Para todo $n \geq 3$, la ecuación $e^z = nz^n$ tiene n soluciones en el disco unitario U. Justificar.

4. (17pt.)

(a) Sea Ω una región de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en Ω tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. Probar que f es analítica en Ω y que $f_n' \to f'$ uniformemente sobre subconjuntos compactos.

(b) Mostrar que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} ze^{-nz}$ es analítica en $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ y calcular $f'(z)$. ¿Admite f una extensión analítica a un abierto $A \supsetneq \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$? Justificar.

5. (17pt.)

(a) Sea $f(z)$ una función analítica en la franja $\mathcal{F} = \{z : a < \mathrm{Im}(z) < b\}$, que satisface $f(z+1) = f(z)$ para todo $z \in \mathcal{F}$. Mostrar que f admite el desarrollo

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}, z \in \mathcal{F},$$

y que éste es uniformemente convergente en $\mathcal{F}_\varepsilon = \{z : a + \epsilon \leq \operatorname{Im}(z) \leq b - \varepsilon\}$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Dar la fórmula integral de los coeficientes c_n, $n \in \mathbb{Z}$ en términos de f. (Ayuda: probar que $\tilde{f}(e^{2\pi i z}) = f(z)$ define una función analítica en una corona, luego aplicar Laurent).

(b) ¿Verdadero o falso? $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} z^j = \cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \ldots$ coincide con el desarrollo de Laurent de una función analítica en una corona. Justificar.

6. (16pt.) Calcular el valor principal de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\, \mathrm{d}x.$$

Marzo 2009

1. Sea x un número real tal que $0 < x < 1$. Calcular la siguiente integral, donde C es la circunferencia de centro cero y radio uno recorrida en sentido antihorario.

$$\int_C \frac{\left(1 - 2xz + z^2\right)^2}{z\,(1 - xz)^2\,(z - x)^2}\, \mathrm{d}z.$$

2. Probar que una transformación homográfica f transforma el disco $|z| < 1$ sobre el disco $|w| < 1$ si y sólo si existen α, β, con $|\alpha| < 1$ y $|\beta| = 1$ tales que para todo z,

$$f\,(z) = \beta\, \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1}.$$

3. (a) Sea f una función analítica y sin ceros en un dominio simplemente conexo D. Demostrar que f tiene un logaritmo analítico, es decir, existe una función g, analítica en D, tal que $e^g = f$.

(b) Sea D el complemento en $\mathbb{C}$ de $A \cup B$, donde A y B son las trayectorias de las siguientes curvas α y β.

$$\begin{aligned} &\alpha : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}, && \alpha\,(s) = \mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \\ &\beta : (-\infty, 0] \to \mathbb{C}, && \beta\,(s) = s + 2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Sea h la rama de la función de la función logaritmo definida en D con $h\,(-1) = -\pi\mathrm{i}$. Calcular $h\,(\mathrm{i})$.

4. (a) Enunciar con precisión el Teorema de Morera.

(b) Sea s_n una sucesión de funciones analíticas en el disco $|z - z_o| < R$, que converge puntualmente a una función s. Suponer que la convergencia es uniforme en todo disco cerrado $|z - z_o| \leq R - \delta$, para cada $0 < \delta < R$. Probar que s es analítica en el disco $|z - z_o| < R$.

5. Decir en cada caso si es verdadero o falso. Justificar.

(a) Si $0 < x < \pi/2$, entonces la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = \operatorname{sen}(x + t\mathrm{i})$, tiene su trayectoria contenida en una hipérbola.

(b) Si f y g son funciones analíticas que cumplen $f(z) = g(1/\bar{z})$ para todo $|z| = 1$, entonces f y g conciden.

(c) Existe un polinomio $p(z)$ con $p(-1) \neq 0$ tal que si

$$f(z) = \frac{\cos\left(z^3 + 1\right)}{p(z)},$$

entonces la función $z \mapsto |f(z)|$ alcanza un máximo local en $z_o = -1$.

Diciembre 2008

1. (a) Enuncie y demuestre el lema de Schwartz.

(b) Pruebe que si $f : U \to U$ analítica y no inyectiva entonces $|f'(0)| < 1$.

2. (a) Calcule la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2}\,\mathrm{d}x, \quad a > 0,\ b > 0.$$

(b) Calcule la integral

$$\int_{|z|=4/3} \frac{\mathrm{e}^{z^4+4z^2-1}}{z^8(z^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

3. (a) Exhiba una función entera cuyos ceros estén exactamente en los puntos $z_n = \log n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Justifique.

(b) Si $\Gamma(z)$ denota la función Gamma, pruebe que para todo $z \notin \mathbb{Z}$ se tiene

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

4. ¿Verdadero o falso? Justifique.

(a) Sea $f(z)$ meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $|f(z) + 1 + 3\mathrm{i}| > \frac{1}{17}$ para todo z. Entonces f es constante.

(b) Si una sucesión $a_n \in \mathbb{C}$ satisface $\sum_n |a_n| < \infty$ y $\sum_n n|a_n| = \infty$, entonces la serie $\sum_n n^k |a_n|$ tiene radio de convergencia 1.

(c) Si una sucesión $a_n \in \mathbb{C}$ satisface $\sum_n |a_n| < \infty$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_n n^k|a_n| = \infty$, entonces la serie $\sum_n a_n z^n$ tiene radio de convergencia 1.

Agosto 2008

1. Halle la forma general de una aplicación bianalítica de D en D, donde D es el disco abierto de centro 0 y radio 1. Demuestre.

2. Pruebe que si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n$, donde $|z| < 1$ y $h(z)$ es un polinomio a coeficientes enteros, entonces $g(z)$ admite una extensión analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

3. Defina la función Gamma (denotada $\Gamma(z)$). Pruebe:

$$\text{(i)} \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \text{(ii)} \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

4. Sea la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, holomorfa en $U = \{z : |z| < 1\}$. Pruebe que $f(z)$ no posee extensión holomorfa a ningún abierto U' donde $U \subset U'$, $U \neq U'$. Sugerencia: considere el comportamiento de $f(z)$ en direcciones radiales $z = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{k}{m!}}$ tal que $1 \leq k \leq m-1$.

5. ¿Verdadero o falso? Justificar.

(a) Sea f analítica en $G \supset \overline{D}$ tal que $f(0) = 1$ y $|f(z)| > |z|$ si $|z| = 1$. Entonces f tiene un cero en D.

(b) Si f es entera y $|f(z)| \leq 1 + |z|^{1/2}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

(c) Sean f, g funciones analíticas en una región G tales que $\bar{f}g$ es analítica. Entonces f es constante o $g \equiv 0$.

Marzo 2008

1. Halle una transformación conforme (esto es una aplicación biyectiva y analítica) entre la region $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y el complemento en $\mathbb{C}$ del eje real positivo $[0, \infty)$.

2. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Demuestre que si f es una biyección analítica de D en D entonces f es de la forma

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

con $\theta \in \mathbb{R}$ y con $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| < 1$.

3. Demuestre que una función entera con un polo en ∞ es un polinomio.

4. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}\, \mathrm{d}x.$$

5. Calcular

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, \mathrm{d}x.$$

(Integre $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ sobre un camino apropiado).

6. (a) Demuestre que la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ que no contengan ningún entero.

(b) Probar que

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

(Ver que $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} - \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ se extiende a una función entera $g(z)$ que es acotada).

(c) Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

7. Demuestre que toda función entera y acotada es constante.

8. Enuncie alguna versión del teorema de Rouché.

Diciembre 2007

1. Sea f continua en $\overline{D} = \{z : z \leq 1\}$.

(a) Probar

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

(b) Si $f(z)$ es analítica en un abierto que contiene a $\overline{D}$ entonces

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \overline{f(0)} & \text{si } |a|<1, \\ \overline{f(0)} - \overline{f\left(\frac{1}{\bar a}\right)} & \text{si } |a|>1. \end{cases}$$

2. (a) Sea G una región en $\mathbb{C}$, $a \in G$, y $f : G - \{a\} \to \mathbb{C}$, una función analítica tal que $\Omega = f(G - \{a\})$ es acotado. Probar que f tiene una singularidad evitable en $z = a$. Además si f es inyectiva entonces $f(a) \in \partial\Omega$.

(b) ¿Es posible construir una transformación conforme inyectiva de

$$\{0 < |z| < 1\} \quad \text{sobre} \quad \{r < |z| < R\}, \ \text{ para } r > 0?$$

3. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. Probar que si G es una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$ tal que su borde ∂G tiene al menos dos puntos, entonces G se aplica conformemente sobre un abierto acotado de $\mathbb{C}$ (Dar una prueba constructiva).

5. Discutir la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar

(a) Si $f(z)$ es una función analítica en un entorno de z_0, entonces existe una sucesión $b_n \geq 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} (b_n)^{\frac{1}{n}} = \infty \quad \text{y} \quad \left|f^{(n)}(z_0)\right| > n!\, b_n.$$

(b) Existe una función entera no constante $f(z)$ que satisface la propiedad

$$f(z) = f\left(\tfrac{z}{|z|}\right) \quad \text{para todo } z, \ \ |z| \geq 1.$$

(c) Si $f(z)$ es una función analítica y sin ceros en una región G, entonces $\log|f(z)|$ es armónica en G.

(d) Si $\operatorname{Re} z_n > -1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ converge absolutamente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

Marzo 2007

1. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

(a) Si z_0 es una singularidad aislada de una función f y $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0$ para todo contorno γ simple, cerrado, alrededor de z_0, que no pasa por z_0, entonces z_0 es singularidad evitable de f.

(b) Existe f entera, no constante, con $|f(z)| = 2$ para todo z.

(c) Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Si f es analítica y acotada en A entonces f se prolonga analíticamente a $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

2. Determine el radio de convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n \qquad (|q| < 1)$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $a_{2n} = b^{2n}$, $a_{2n+1} = a^{2n+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a, b < 1$.

3. Sea $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y sea O un abierto que contiene a $\overline{B}$. Sea f analítica en O, $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in T$, tal que $f(z_0) = z_0$ para algún $z_0 \in B$.

(a) Demuestre que

$$|f(z) - z_0| \leq \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}\, |z - z_0|\,, \tag{†}$$

para todo z tal que $|z - z_0| \leq 1 - |z_0|$.

(b) Si en la desigualdad (†) vale la igualdad para algún z con $|z - z_0| < 1 - |z_0|$, demuestre que

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0),$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$.

4. Sea n un entero ≥ 2. Muestre que

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

5. (a) Enuncie y demuestre el teorema de Casorati-Weierstrass.

(b) Enuncie el teorema de Picard.

Diciembre 2006

1. Pruebe que toda función meromorfa en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una función racional.

2. Sean $f(z)$ y $g(z)$ enteras tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué conclusión puede obtenerse sobre f y g?

3. Sean f_n funciones holomorfas en un abierto Ω de $\mathbb{C}$, f_n sin ceros en Ω $\forall n$. Si $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos, pruebe que f es idénticamente cero o f no tiene ceros en Ω.

4. Demuestre el teorema de Montel para familias normales. Explique el uso del mismo en la prueba del teorema de la aplicación de Riemann.

5. ¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta dando una demostración o un contraejemplo.

(a) Sea $f(z)$ continua en $\operatorname{Im} z \geq 0$, holomorfa en $\operatorname{Im} z > 0$. Sea

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \overline{f(\bar{z})} & \operatorname{Im} z \leq 0. \end{cases}$$

Entonces, $\widetilde{f}$ define una función holomorfa en $\mathbb{C}$ y además $\widetilde{f} = f$ si y sólo si f es real en $z \in \mathbb{R}$.

(b) Sean $z_1, \ldots, z_r$ puntos distintos en $\mathbb{C}$ y $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$. Sea

$$V = V(z_1, \ldots, z_r; k_1, \ldots, k_r)$$

el espacio de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{z_1, \ldots . z_r\}$ que poseen un polo de orden $\leq k_j$ en z_j para cada $1 \leq j \leq r$.
Entonces $\dim V = k_1 + \ldots + k_r + 1$.

Junio 2006

1. (a) Una transformación de Möbius transforma un par de círculos concéntricos en otro par de círculos concéntricos. Demostrar que las relaciones de los radios deben ser iguales.

(b) Hallar una transformación de Möbius que lleve el círculo $|z| = 1$ y el círculo $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ en círculos concéntricos. ¿Cuál es la relación de sus radios?

2. (a) Sea G una región, sea $a \in G$ y supongamos que $f : G - \{a\} \to \mathbb{C}$ es una función analítica tal que $f(G - \{a\}) = \Omega$ es acotado. Demostrar que $z = a$ es una singularidad evitable de f. Si $f : G - \{a\} \to \mathbb{C}$ es uno a uno, demostrar que $f(a) \in \partial\Omega$.

(b) Demostrar que no hay ninguna función analítica uno a uno que transforme $G = \{z : 0 < |z| < 1\}$ sobre la corona $\Omega = \{z : r < |z| < R\}$, donde $r > 0$.

3. (a) Calcular
$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}.$$
(b) Usar el teorema de Cauchy para calcular
$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. (a) Sea $\Omega=\{z=x+iy\,:\,a<y<b\}$. Sea $f\in H(\Omega)$ tal que $f(z)=f(z+1)$ para todo $z\in\Omega$. Demostrar que f tiene un desarrollo de Fourier en Ω,
$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz},$$
que converge uniformemente en $z\,:\,a+\epsilon<y<b-\epsilon$, para todo ϵ.
(b) Hallar las fórmulas integrales que expresan los coeficientes de Fourier c_n en términos de f.

5. (a) ¿Cuándo se dice que el producto $\prod_{n\geq 1} z_n$ es absolutamente convergente?
(b) ¿Para qué valores de z es convergente el producto $\prod_{n\geq 1}(1-z^n)$?
(c) ¿Existe un conjunto abierto no vacío G tal que $\prod_{n\geq 1}(1-z^n)$ converja uniformemente en todo subconjunto compacto de G? Si así fuera, ¿cuál sería el G más grande?

Marzo 2006

1. (a) Demostrar que si f es una función analítica en un abierto que contiene al disco $\overline{B(a;R)}$ entonces
$$|f(a)|^2\leq\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R|f(a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$
(b) Sean G una región del plano complejo y M una constante fija. Probar que
$$\mathcal{F}=\{f\in H(G)\,:\,\iint_G|f(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leq M\}$$
es una familia normal.
(c) Sea D el disco unidad abierto. Probar que $\mathcal{F}=\{f\in H(D)\,:\,\mathrm{Re}(f)>0,\ f(0)=1\}$ es una familia normal. ¿Qué pasa si quitamos la hipótesis $f(0)=1$?

2. (a) Sea R una función racional sin polos en el eje real positivo tal que $\lim_{x\to\infty}xR(x)=0$. Demostrar que
$$\sum\mathrm{Res}(R(z)\log^2(z))=-2\int_0^{\infty}R(x)\log x\,\mathrm{d}x-2\pi\mathrm{i}\int_0^{\infty}R(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Calcular
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x.$$

3. (a) Probar que la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ define una función meromorfa en $\mathbb{C}$.

(b) Sea $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$. Probar que $f(z+1) = f(z)$. Hallar los polos de f y la parte singular en cada uno de ellos. Probar que $\lim\limits_{|y|\to\infty} f(z) = 0$ uniformemente en x.

(c) Sea $g(z) = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2$. Probar que g es meromorfa, de período 1. Calcular los polos de g y la parte singular de cada polo. Probar que $\lim\limits_{|y|\to\infty} g(z) = 0$ uniformemente en x.

(d) Probar que
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2.$$

(e) Deducir la relación de Euler:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si f es meromorfa en una región simplemente conexa Ω entonces $f = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}$ tiene una solución g meromorfa si y sólo si los residuos de f en Ω son todos ceros.

(b) $\displaystyle\int_{|z|=5/2} \frac{\mathrm{d}z}{\Gamma(z)\operatorname{sen}(\pi z)} = 0.$

Agosto 2005

1. Sea g_n una sucesión de funciones enteras que converge uniformemente en compactos a una función entera g, tal que el conjunto de ceros de cada g_n está contenido en $\mathbb{R}$. Mostrar que el conjunto de ceros de g está contenido en $\mathbb{R}$.

2. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos
$$h(z) = \int_0^1 f(t)\cos(tz)\,\mathrm{d}t, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

(a) Mostrar que h es una función entera y calcular los coeficientes del desarrollo de Taylor de h centrado en 0.

(b) Mostrar que si h es la función nula, entonces f es la función nula.

3. Sea h una función entera tal que
$$h(0) = 3 + 4\mathrm{i} \quad \text{y} \quad |h(z)| \leq 5 \quad \text{si} \quad |z| < 1.$$
Mostrar que $h(z) = 3 + 4\mathrm{i}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

4. Sea f una función entera no polinómica, mostrar que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$ y que existen infinitos puntos w_n tal que la fibra $f^{-1}(w_n)$ tiene cardinal infinito para cada n.

5. Calcular la integral
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta.$$

6. Mostrar que existe una función analítica en el conjunto $\{z \in : |z| > 4\}$ cuya derivada es
$$\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

7. Sea f analítica en el semiplano $H := \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ de modo que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in H$ y $f(1) = 0$ Mostrar que
$$|f'(1)| \leq \frac{1}{2}.$$
Ayuda: considerar la función $h(z) = \frac{1+z}{1-z}$ y $f \circ h$.

Diciembre 2004

1. Probar que:

(a) $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$ define una función analítica en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(b) Γ satisface la ecuación funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(c) Γ admite una continuación analítica a todo $\mathbb{C}$, salvo por polos simples en $z = 0, -1, -2, \ldots$. Hallar el residuo de f en dichos polos.

(d) Para $x > 0,\ y > 0$,
$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
(Ayuda: Expresar $\Gamma(x)\Gamma(y)$ como una integral doble y cambiar a coordenadas polares).

2. Calcular $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, evaluando las integrales de la función $f(z) = \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}$ sobre contornos apropiados.

3. Hallar todas las funciones analíticas biyectivas de
$$G = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > -1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$
sobre el disco unidad D.

4. (a) Enunciar y demostrar el Teorema de Montel. (Definir los conceptos involucrados).

(b) Sea G una región y M una constante fija. Probar que
$$\mathcal{F} = \left\{ f \in H(G) : \iint_G |f(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq M \right\}$$
es una familia normal.

(c) Sea D el disco unidad abierto. Probar que

$$\mathcal{F} = \{f \in H(D) : \mathrm{Re}(f) > 0,\ f(0) = 1\}$$

es una familia normal. ¿Qué pasa si quitamos la hipótesis $f(0) = 1$?

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) La imagen de una función entera no constante es densa en $\mathbb{C}$.

(b) La función $f(z) = z^4 - 6z + 3$ tiene 2 ceros en $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

(c) Sea G un abierto simplemente conexo. Si $f \in H(G)$ entonces existe una sucesión de polinomios tales que $f = \lim p_n$ en $H(G)$.

(d) Toda función meromorfa en la esfera de Riemann S^2 es una función racional.

Julio 2003

1. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

(a) Si z_0 es una singularidad aislada de una función $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, U abierto, y si f es acotada en algún entorno de z_0 entonces z_0 es una singularidad evitable de f.

(b) Existe f entera, tal que $f^{(n)}(0) = n! \quad \forall\, n \geq 1$.

(c) Si $f = u + \mathrm{i}v$ es analítica en una región G y $u^2 = v$ en G entonces f es constante en G.

2. Sea

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}.$$

Demuestre que f es meromorfa en $\mathbb{C}$ y tiene polos simples en los enteros. *Ayuda:* Pruebe que f tiene estas propiedades en cualquier disco de radio R centrado en el origen.

3. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada, C^1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que γ no pasa por α. Sea

$$w(\gamma, \alpha) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{z - \alpha}\, \mathrm{d}z.$$

Demuestre que $w(\gamma, \alpha)$ es un número entero.

4. Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. Enuncie el Teorema de Rouché.

Agosto 2000

1. Sea
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}.$$
Pruebe que
$$z^2 f''(z) + z f'(z) = 4z^2 f(z).$$

2. Sea C el círculo $|z| = 3$ orientado positivamente. Pruebe que si
$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w}\, \mathrm{d}z \quad (|w| \neq 3),$$
entonces $g(2) = 8\pi\mathrm{i}$. ¿Cuál es el valor de $g(w)$ cuando $|w| > 3$?

3. (a) Sea $f(z) = \dfrac{1}{q(z)^2}$, q analítica en z_0, $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$. Pruebe que z_0 es polo de orden 2 de f con residuo
$$b_1 = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^3}.$$
(b) Calcule
$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z + z^2)^2}$$
donde C es el círculo centrado en el origen, de radio 2, orientado positivamente.

4. Determine el número de ceros de $z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$,

(a) dentro del círculo de radio 1 centrado en el origen;

(b) dentro del círculo de radio 2 centrado en el origen.

5. (a) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto U. Supongamos que para cada subconjunto compacto K de U, la sucesión converge uniformemente sobre K y sea f el límite de f_n. Demuestre que f es analítica en U.

(b) Sea
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$
Demuestre que esta función es analítica en $U = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$.

Marzo 2000

1. Sea $f(z)$ analítica y no acotada en $\{z : 0 < |z| < 1\}$. Mostrar que una y sólo una de las siguientes posibilidades pueden ocurrir:

(a) $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to 0$,

(b) para todo ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$, $\{f(z) : 0 < |z| < \epsilon\}$ es denso en el plano.

2. Sea $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+4}$.

(a) Obtener la representación en serie de potencias de f alrededor de $z_0 = 0$.

(b) Obtener la representación en serie de Laurent de f en potencias de z alrededor de $z_0 = \infty$.

En cada caso, describir el conjunto en el que la serie representa a la función.

3. Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - x + 1}\, \mathrm{d}x$. Expresar la respuesta como número real.

4. Sea D la intersección de los discos $|z| < 1$ y $|z-1| < 1$. Encontrar una aplicación conforme de D sobre el disco unidad $|w| < 1$.

5. (a) Sea f una función entera. Supongamos que existen constantes positivas A, B y α tales que $|f(z)| \leq A + B|z|^\alpha$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es un polinomio. ¿Cuál es el valor más grande que puede tener el grado de f?

(b) Sea f analítica en un conjunto abierto D que contiene al disco $|z| \leq 1$. Suponer además que $f(0) = 1$ y $|f(z)| > 2$ para todo z con $|z| = 1$. Probar que f tiene al menos un cero en $|z| < 1$.

6. Sea $D = \{z : |z| < 1\}$. Sea $f : D \to \mathbb{C}$ analítica, no constante y tal que $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ para todo $z \in D$.

(a) Mostrar que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in D$.

(b) Usando una transformación de Möbius apropiada y el Lema de Schwarz, probar que si $f(0) = 1$ entonces

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad \text{para todo } \ |z| < 1.$$

Agosto 1997

1. Si f y h son dos funciones analíticas en sendos entornos de la clausura $\overline{D}$ del disco $D \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, determinar (con prueba o contraejemplo según el caso) la validez o falsedad de cada una de las siguientes implicaciones:

(a) $|f| < |h|$ en $\partial D \doteq$ frontera de $D \quad \Longrightarrow \quad |f| \leq |h|$ en D.

(b) $|f| < |h|$ en ∂D y $|h| > 0$ en $D \quad \Longrightarrow \quad |f| < |h|$ en D.

(c) $|f| \leq |h|$ en ∂D y $|h| > 0$ en $D \quad \Longrightarrow \quad |f| \leq |h|$ en D.

(d) $f(1/n) = h(-1/n) = 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv h$ en D.

(e) $f(1/n) = h(-1/n) = 1/n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv h$ en D.

(f) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{\frac{1}{2} - nz} = \int_{\partial D} \frac{h(z)\,\mathrm{d}z}{\frac{1}{2} - nz} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv h$ en D.

(g) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{2n - z} = \int_{\partial D} \frac{h(z)\,\mathrm{d}z}{2n - z} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv h$ en D.

(h) $|f| = |h|$ en $\partial D \implies \{|f| \leq |h|$ en $D\}$ ó $\{|f| \geq |h|$ en $D\}$.

Preguntas complementarias: ¿Qué relación hay entre la cantidad de ceros de h y de $f+h$ en D (contados según sus multiplicidades) bajo la hipótesis de (a)? ¿Pueden los ceros de f en D estar en cantidad infinita numerable? ¿Qué cantidad de llamadas pudo haber hecho Yabrán al celular del Padre Farinello aquella noche? En fin, piense sin apuro.

2. Si log indica una rama del logaritmo complejo, definida en el complemento de la semirecta $(-\infty, 0]$ por $\log z \doteq \ln|z| + i(2k\pi + \arg z)$ (con un entero k fijo, $-\pi < \arg z < \pi$, y ln = logaritmo real), señale el error del siguiente razonamiento: $(1+\mathrm{i})^2 = (-1-\mathrm{i})^2 \Rightarrow 2\log(1+\mathrm{i}) = 2\log(-1-\mathrm{i}) \Rightarrow \arg(1+i) = \arg(-1-i) \Rightarrow \pi/4 = -3\pi/4 \Rightarrow 4 = 0$ (paradoja de Bernoulli). Si su religión proclama la igualdad de todos los números no haga esa parte del ejercicio, pero en cambio pruebe que el radio de convergencia de la serie de Taylor de log en un punto z_0 es $|z_0|$. ¿Puede hacerse esto sin el conocimiento explícito de los coeficientes de la serie, usando quizá el "principio de unicidad del prolongamiento analítico", o algo así? ¿Usted qué piensa? Ya volvemos.

3. Halle $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{z \operatorname{sen} z}$ a lo largo de $|z| = n \in \mathbb{N}$.

4. Si una $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ no constante cumple una acotación del tipo $|f(z)| \leq R(1+|z|)^{1-r} \quad \forall z \in \mathbb{C}$ con ciertos R y $r > 0$, tal que f no puede ser una función entera (¿y descremada?).

5. Defina el concepto de dominio simplemente conexo y enuncie (pero no pruebe) el teorema de la aplicación conforme de Riemann. Después muestre que quitando de $\mathbb{C}$ el origen y la espiral dada por $t \to \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, con $t \in \mathbb{R}$, se obtiene un abierto A simplemente conexo. Ilustre el teorema de Riemann exhibiendo una transformación conforme que aplique (inyectivamente) tal A sobre el disco $|z| < 1$, llevando el punto $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi/2}$ al origen (¿puede exhibir más de una?). En fin, notemos que A se parece también a la Argentina, pues yendo en sentido antihorario (o sea hacia atrás en la historia) el panorama se ensancha y se engrandece, mientras que hacia el futuro el camino se estrecha y nos infunde angustia e incertidumbre. ¿Perderá Menem el juicio si en el próximo comicio se derrumba el edificio que con tanto sacrificio construyó con gran oficio para nuestro beneficio? ¿Cederá terreno Terragno en su terruño y se dará Alfonsín un chasco más en Chascomús? ¿Podrá el Chacho con calma chicha seguir sin chucho esperando chocho que pierda Chiche? Para ver qué nos espera hay que recorrer A en sentido horario.

Marzo 1997

1. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa y justifique su respuesta.

(a) Toda función armónica en un dominio D en $\mathbb{C}$ es la parte imaginaria de una función analítica en D.

(b) Las funciones racionales son exactamente las funciones meromorfas sobre la esfera de Riemann.

(c) La siguiente función es entera.

$$f(z) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{z}) & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

2. Probar que si la integral sobre cualquier camino triangular en un dominio D de una función continua se anula, entonces la función es analítica en D.

3. Calcular:

(a) la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

evaluando las integrales de la función $\dfrac{1}{z^2 \operatorname{sen} z}$ sobre contornos apropiados;

(b) el número de soluciones de módulo menor que 1 —contando multiplicidades— de la ecuación

$$\operatorname{sen}^2(z) = 9z^3.$$

4. Encontrar las transformaciones conformes biyectivas del dominio $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ en el círculo de centro z_0 y radio r.

5. Sea D un dominio en el plano complejo, $C(D, \mathbb{C})$ el espacio de funciones continuas de D en $\mathbb{C}$, y $H(D)$ el espacio de funciones holomorfas en D.

(a) Demostrar que $H(D)$ es cerrado en $C(D, \mathbb{C})$.

(b) Demostrar que la aplicación $f \to f'$ de $H(D)$ en sí mismo, es continua.

(c) ¿Es válida la afirmación (a) si reemplazamos "holomorfa" por "meromorfa" y "$C(D, \mathbb{C})$" por "$C(D, \mathbb{C} \cup \{\infty\})$"?

Marzo 1996

1. Sea z_0 una singularidad aislada de f. Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) Si f es acotada en algún entorno de z_0 entonces z_0 es una singularidad evitable de f.

(b) Si $f(z) \to \infty$ cuando $z \to z_0$ entonces z_0 es un polo de f.

(c) Si f tiene una singularidad esencial en z_0 entonces $f(\Delta - \{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ para todo disco abierto Δ tal que $z_0 \in \Delta$.

2. Sea $f(z) = \dfrac{z - \pi}{z \operatorname{sen} z}$.

(a) Describa la singularidades de f (no olvide el punto en el infinito).

(b) ¿Cómo debe definirse f en las singularidades evitables para que sea holomorfa allí?

(c) Calcule

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{y} \quad \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

donde γ es el círculo $|z - \frac{\pi}{2}| = \pi$ orientando positivamente.

3. Sea $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+4}$.

(a) Obtener la representación en serie de potencias de f alrededor de $z_0 = 0$.

(b) Obtener la representación en serie de Laurent de f en potencias de z alrededor de $z_0 = \infty$.

En cada caso, describir el conjunto en el que la serie representa a la función.

4. Evaluar las siguientes integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots); \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \cos\theta} \quad (0 < a < 1).$$

5. Encontrar una aplicación conforme de la franja $0 < \operatorname{Im} z < 1$ sobre el disco $|z| < 1$.

6. (a) Enuncie y pruebe el Lema de Schwarz.

(b) Sea f holomorfa en $\operatorname{Re}(z) > 0$, $f(1) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo z tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$. Encontrar el máximo valor posible que puede tomar $|f(2)|$ y $|f'(1)|$. ¿Cuáles son las funciones extremales (es decir, las funciones que alcanzan estos valores máximos)?

7. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique claramente su respuesta.

(a) Si f es entera y $|f(z)| < 1$ para todo z tal que $|z| = 1$ entonces la ecuación $f(z) = z$ tiene al menos una solución en $|z| < 1$.

(b) Existe una función entera f que satisface todas las propiedades siguientes:

(i) $f(x) > 0$ para todo $x > 0$;
(ii) $f(\mathrm{i}y) > 0$ para todo $y > 0$;
(iii) $f'(0) = 1$.

(c) La familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{f \,:\, f \text{ es holomorfa en } |z| < 1 \text{ y } \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \leq M\}$$

es normal (M no depende de f).

(d) La familia

$$\mathcal{F} = \{f \,:\, f \text{ es holomorfa en } |z| < 1,\ f(0) = 1 \text{ y } 0 \notin \operatorname{rango}(f)\}$$

no es normal.

8. Sea f una aplicación conforme del disco $|z| < 1$ sobre un cuadrado S con centro en el origen y tal que $f(0) = 0$. Entonces:

(a) $f(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}f(z)$; y

(b) si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $a_n = 0$ salvo cuando $n \equiv 1 \mod 4$.

CAPÍTULO 2

Funciones reales

Agosto 2009

Se aprueba con un mínimo de 60 puntos.

1. (18 puntos) Sea $(\mathcal{A},\mu)$ una medida sobre un conjunto X (o sea, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de $P(X)$, $\mu(\emptyset)=0$ y $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ es una función σ-aditiva). Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

(a) Si $\mathcal{A}_k\in\mathcal{A}, k\in\mathbb{N}$ y $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2\subset\cdots\subset\mathcal{A}_k\subset\ldots$ entonces

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\mu(\mathcal{A}_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(\mathcal{A}_k).$$

(b) Si $\mathcal{A}_k\in\mathcal{A}, k\in\mathbb{N}$ y $\mathcal{A}_1\supset\mathcal{A}_2\supset\cdots\supset\mathcal{A}_k\supset\ldots$ entonces

$$\mu(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_k)=\inf_{k\in\mathbb{N}}\mu(\mathcal{A}_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(\mathcal{A}_k).$$

2. (16 puntos)

(a) Determine el

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nt^3}{1+nt^3}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

(b) Demuestre que si $f:E\to[0,1]$ es una función integrable entonces

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f^k\,\mathrm{d}m=m\{t\in E:f(t)=1\}.$$

3. (18 puntos) Sean $1\le p<q\le\infty$.

(a) Demuestre que $L^q[0,1]\subset L^p[0,1]$ y que la inclusión $\iota:L^q[0,1]\subset L^p[0,1]$ es continua pero no suryectiva.

(b) Demuestre que $L^q[0,1]$ es de primera categoría en $L^p[0,1]$.

4. (18 puntos)

(a) Enuncie el Teorema de Fubini.

(b) Dé un ejemplo que evidencie que la conclusión del Teorema de Fubini puede no ser cierta si alguna hipótesis no se cumple.

5. (12 puntos) Demuestre que si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son espacios de Hilbert y $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ es una función suryectiva tal que

$$\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle$$

para cualquier par de funciones $f, g \in \mathcal{H}$, entonces U es lineal.

6. (18 puntos) Demuestre que si μ es una medida compleja sobre X entonces

$$|\mu|(X) < \infty.$$

Marzo 2009

1. Sea f una función medible en $[0,1]$ y sea $g(x,y) = f(x) - f(y)$. Probar que $g \in L^1([0,1] \times [0,1])$ si y sólo si $f \in L^1([0,1])$. Justificar las afirmaciones acerca de la medibilidad de cada una de las funciones involucradas.

2. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre el $[0,1]$, con la topología dada por

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \, \mathrm{d}x,$$

y sea Y el espacio vectorial de las funciones continuas sobre el $[0,1]$, con la topología dada por

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Decidir si

(a) la identidad $I : X \to Y$ es continua;

(b) la identidad $I : X \to Y$ es abierta.

3. Sea $D_N(t) = \sum\limits_{j=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}$.

(a) Probar que

$$D_N(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

y que $\|D_N\|_1 \to \infty$ para $N \to \infty$.

(b) Sea, para $f \in L^1([-\pi, \pi])$, el n-ésimo coeficiente de Fourier de f definido por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Sea $C_0 = \{\{a_n\} : |a_n| \to 0, \text{para } n \to \infty\}$. Probar que la aplicación

$$F : L^1([-\pi, \pi]) \to C_0$$

es lineal, continua, inyectiva y no es sobre. Ayuda: para probar la última afirmación puede usar (a).

4. (a) Probar que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y,$$

entonces $f * g$ es una función continua.

(b) Probar que si A y B son dos conjuntos medibles Lebesgue, de medida positiva, entonces $A+B := \{a+b \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$ contiene un intervalo. Ayuda: observar que si A tiene medida positiva, entonces existe un intervalo I tal que $I \cap A$ tiene medida positiva y entonces pruebe que $\chi_A * \chi_B$ no puede ser la función nula. χ_A es la función característica de A.

5. Sea E un conjunto medible, contenido en $\mathbb{R}^n$. Probar que a. e. $x \in \mathbb{R}^n$ existe

$$D_E(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{m(E \cap (-\delta, \delta))}{2\delta}$$

y que $D_E(x) = 1$ a. e. $x \in E$ y que $D_E(x) = 0$ a. e. $x \notin E$.

6. Sea v_n el volumen de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$. Usar el teorema de Fubini para probar que

$$v_n = 2v_{n-1} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Julio 2007

$\mathbb{R}$ indica números reales; $\mathbb{N}$ números naturales; m medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$.

1. Sea $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ función.

(a) Si f_n es medible Lebesgue para todo n, y f_n converge puntualmente a f, mostrar que f es medible Lebesgue.

(b) Si f_n es continua para todo n, y f_n converge uniformemente a f, mostrar que f es continua.

(c) Si f_n es continua para todo n, y f_n converge puntualmente a f, mostrar que f puede ser discontinua.

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que tiene derivada en todo punto del intervalo.

(a) Mostrar que f' es medible Lebesgue.

(b) Suponer que además f es creciente, mostrar que

$$\int_a^b f'(t)\, \mathrm{d}m(t) \le f(b) - f(a).$$

3. (a) Enunciar el teorema de Baire.

(b) Mostrar que existe una función continua en el intervalo $[0, 1]$ que no es derivable en ningún punto.

4. Enunciar el teorema de Fubini. Dar un ejemplo de función $f : X \times X \to \mathbb{R}$ donde las integrales iteradas son iguales y de manera que la integral doble de f no existe.

5. (a) Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. Mostrar que $L^p(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$ para $p \geq 1$.

(b) Sea $\mathbb{N}$ con la medida cardinal, mostrar que $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$.

(c) Mostrar que $L^1(\mathbb{R}, m) \not\subseteq L^2(\mathbb{R}, m)$ y $L^2(\mathbb{R}, m) \not\subseteq L^1(\mathbb{R}, m)$.

6. Sean f_n, f de cuadrado integrable en $[0, 1]$ de manera que f_n converge puntualmente a f y que $\|f_n\|_2$ converge a $\|f\|_2$. Mostrar que $\|f_n - f\|_2$ converge a cero.

Marzo 2007

1. Sea (X, μ) un espacio de medida y μ una medida positiva.

(a) Enunciar el Lema de Fatou y usarlo para probar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

(b) Mostrar un ejemplo donde se da la desigualdad estricta en el Lema de Fatou.

(c) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{t^{-1/n}}{(1 + \frac{t}{n})^n}\, \mathrm{d}t$.

2. Sea (X, μ) un espacio de medida y μ una medida positiva.

(a) Definir los espacios $L^p(X, \mu)$ para $0 < p \leq \infty$.

(b) Enunciar y probar la desigualdad de Hölder.

(c) Sea $f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p$ fija. Mostrar que la función

$$\phi(p) = \log \|f\|_p^p$$

es convexa, es decir $\phi(\alpha p + \beta q) \leq \alpha\phi(p) + \beta\phi(q)$ para todo $\alpha, \beta \geq 0$ tal que $\alpha + \beta = 1$, y todo $p, q \geq 1$.

(d) Si $f \in L^r$ para algún $r < \infty$, probar que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$, donde el límite puede ser infinito.

(e) Sea B la bola unitaria en $\mathbb{R}^d$ centrada en el origen, y sea $f \in L^p(B)$ para todo $p \geq 1$, pero $f \notin L^\infty$. Suponga además que vale la desigualdad $\|f\|_{p+1} \leq p^{1/p+1}\|f\|_p^{p+1}$ para todo $p \geq 1$. Probar que

$$\int_B \mathrm{e}^{\alpha|f(x)|} < \infty, \quad \forall\, \alpha \in (0, 1).$$

3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medible con respecto a la medida de Lebesgue. Si para todo intervalo $J \subset [0, 1]$ se tiene que

$$0 \leq \int_J f(x)\, \mathrm{d}x \leq m(J),$$

probar que $0 \leq f(x) \leq 1$ a. e. en $[0, 1]$.

4. Sea (X,μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) < \infty$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ medible. Probar que $f \in L^1(X,\mu)$ si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu\{x \in X : |f(x)| \geq 2^n\} < \infty.$$

5. Sea M un subespacio cerrado de $L^2([0,1],m)$ que está contenido en $\mathcal{C}([0,1],\|\cdot\|)$, donde $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$.

(a) Probar que existe una constante C tal que $\|f\| \leq C\|f\|_2$ para toda $f \in M$. [*Ayuda*: El Teorema del Gráfico Cerrado puede ser de utilidad.]

(b) Probar que para cada $x \in [0,1]$ existe $\phi_x \in M$ tal que $f(x) = \langle f, \phi_x \rangle$ para toda $f \in M$ y $\|\phi_x\|_2 \leq C$.

(c) Probar que $\dim M \leq C^2$.

6. (a) Enunciar y probar el Principio de Acotación Uniforme para espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{C}$.

(b) Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$ y sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión débilmente convergente. Probar que $\{x_n\}$ es acotada.

(c) Dar un ejemplo de una sucesión que es débilmente convergente pero no es convergente en la norma de X.

Diciembre 2006

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible (Lebesgue) tal que $|E| = 1$. Probar que para cada $0 \leq t \leq 1$ existe un conjunto $E_t \subseteq E$ tal que $|E_t| = t$.

3. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^p, $1 \leq p < \infty$ que converge en casi todo punto a una función $f \in L^p$. Mostrar que $f_n \to f$ en L^p si y sólo si $\|f_n\| \to \|f\|$. ¿Vale lo mismo para $p = \infty$?

4. Sea $g \in L^1$. Probar que existe $f \in L^1$ tal que

$$\int_0^1 fg = \|g\|_1.$$

Probar que

$$\|g\|_1 = \sup_{\{f\in L^1, \|f\|=1\}} \int_0^1 fg$$

Enunciar un resultado similar para L^p, $1 < p < \infty$.

5. Enunciar y demostrar el Teorema de Convergencia Dominada y el Lema de Fatou.

Diciembre 2005

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que f es una función continuamente diferenciable, que satisface $f(0) = 0$. Mostrar que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \left(\int_0^1 (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

2. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo $D < \infty$. Suponer que en el intervalo $[0,1]$ la sucesión $\{P_n\}$ converge puntualmente al polinomio nulo. Mostrar que la convergencia es uniforme en el intervalo $[0,1]$.

3. Sea (X, μ) un espacio de medida. Sea $f_n : X \to \mathbb{C}$ una suceción de funciones medibles en X la cual converge puntualmente a una función f. Sea $1 \leq p < \infty$. Supongamos que $f_n \in L^p(X,\mu)$ $\forall n$ y que $\|f_n\|_p$ converge a $\|f\|_p$. Mostrar que $\|f_n - f\|_p \to 0$ cuando n tiende a infinito.

4. Enunciar y bosquejar una demostración del Teorema de Riesz de representación para funcionales positivas.

5. Construir una sucesión $\{f_n\}$ de funciones contínuas a valores reales en el intervalo $[0,1]$ de modo que:

(a) en $[0,1]$ converge puntualmente a la función nula;

(b) $\left| \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq K < \infty$, $\forall n$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(s) \, \mathrm{d}s$ no es igual a cero.

6. Sea B un espacio de Banach y T_n una sucesión de operadores lineales acotados en B que convergen puntualmente a una función T. Probar que T es un operador lineal acotado y que la convergencia es uniforme en compactos. Dar un ejemplo de B y una sucesión como en el párrafo anterior de modo que la convergencia no es uniforme en bolas cerradas y acotadas.

Agosto 2005

1. (a) Enunciar el Lema de Fatou y usarlo para probar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

(b) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{t^{-1/n}}{(1+\frac{t}{n})^n} \, \mathrm{d}t$.

2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si la afirmación es falsa dar un contraejemplo y si es verdadera probarla.

(a) Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y sean $f, f_k \in L^1(E)$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f - f_k| = 0,$$

entonces $f_k \to f$ a. e.

(b) Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : E \to [0,1]$ integrable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f^n = m(\{t \in E : f(t) = 1\}).$$

Aquí m es la medida de Lebesgue.

(c) Si $f \in L^1([a,b])$ entonces $f^2 \in L^1([a,b])$.

(d) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible y tal que $\int_E f = 0$ para todo subconjunto medible E de $\mathbb{R}^n$, entonces $f = 0$ a. e.

3. Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida. Si $f \in L^p(\mu)$ para algún $p > 0$, probar que $\lim\limits_{q\to\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty$, donde ∞ está permitido como posible valor del límite.

4. Sea H un espacio de Hilbert y sea M un subespacio cerrado de H, probar que $H = M \oplus M^\perp$. Además, si $x \in H$ se escribe como $x = y + z$ con $y \in M$ y $z \in M^\perp$, mostrar que z e y son los únicos elementos de $M^\perp$ y M cuya distancia a x es mínima.

5. Sea M un subespacio cerrado de $L^2([0,1], m)$ que está contenido en $\mathcal{C}([0,1])$.

(a) Probar que existe una constante $C > 0$ tal que $\|f\|_u \le C\|f\|$ para toda $f \in M$ (recordar que $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$).

(b) Probar que para cada $x \in [0,1]$ existe ϕ_x tal que $f(x) = \langle f, \phi_x\rangle$ para toda $f \in M$ y $\|\phi_x\|_2 \le C$.

(c) Probar que $\dim M \le C^2$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Mostrar que las integrales de Lebesgue

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

existen y valen cero.

(b) Si $D = \{(x,y) : -1 \le x, y \le 1\}$ y $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ es la medida producto en $\mathbb{R}^2$, mostrar que la integral $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ no existe.

(c) Enunciar el Teorema de Fubini e indicar porqué los resultados no contradicen este teorema.

Agosto 2004

1. (a) Enuncie el Teorema de la Convergencia Dominada, el Teorema de la Convergencia Monótona y el Lema de Fatou. Pruebe uno de estos resultados.

(b) Si $0 < \alpha < 1$, probar que

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\alpha} (1-x)^n \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

2. (a) Mostrar que si f es integrable Riemann en $[0,1]$, entonces f es integrable Lebesgue en $[0,1]$ y ambas integrales son iguales.

(b) Dar un ejemplo de una función f integrable Riemann en $[0,\infty]$ y no integrable Lebesgue en dicho intervalo.

3. Enunciar y probar dos de los siguientes enunciados:

(a) Desigualdades de Hölder y Minkowski.

(b) El Teorema de Hahn-Banach (caso real).

(c) El Principio de Acotación Uniforme.

4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ una funcional lineal y sea $N = \mathrm{Ker}(f)$. Probar que si f no es continua entonces $\overline{N} = \mathcal{H}$.

5. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables (en algún espacio de medida) tal que $f_n \to f$ a. e., donde f es integrable y satisface $\|f_n\|_1 \leq \|f\|_1$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

[*Ayuda*: En algún momento considerar $|f| + |f_n| - |f - f_n|$.]

6. Sea $f : X \to [0,\infty]$ integrable. Probar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo subconjunto medible $A \subset X$ con $\mu(A) < \delta$ se tiene $\int_A f < \epsilon$.

7. Sea $X = ([0,1],\mu)$ e $Y = ([0,1],\nu)$ donde μ es la medida de Lebesgue y ν es la medida que cuenta puntos. Sea f la función característica de la diagonal $D = \{(x,y) : x = y\} \subset X \times Y$.

(a) Probar que f es medible con respecto a $\mu \times \nu$ en $X \times Y$.

(b) Calcular:

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu \times \nu);$$

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\nu(y); \quad \text{y}$$

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x).$$

(c) ¿Los resultados obtenidos contradicen el Teorema de Fubini o el Teorema de Tonelli?

8. Sea S un subespacio vectorial de $L^4[0,1]$ que es cerrado como subespacio de $L^{4/3}[0,1]$.

(a) Probar que S es cerrado como subespacio de $L^4[0,1]$.

(b) Probar que existe una constante K tal que $\|f\|_4 \leq K\|f\|_{4/3}$ para toda $f \in S$. [*Ayuda*: Usar el Teorema del Gráfico Cerrado.]

9. Si $f \in L^p \cap L^{\infty}$ para algún $p < \infty$, entonces $\lim_{q\to\infty} \|f\|_q = \|f\|_{\infty}$.

Julio 2003

1. Sea $f_n : (X, \mathfrak{M}, \mu) \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a una función f. Suponer que para cada $\epsilon > 0$ existen: $A_\epsilon \in \mathfrak{M}$, $g \geq 0$ una función integrable y un número N_0 tal que

$$\begin{aligned} &\int_{X-A_\epsilon} |f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \epsilon, && \forall\, n \geq N_0, \\ &|f_n(x)| \leq g(x), && \forall\, x \in A_\epsilon. \end{aligned}$$

Mostrar que f es integrable y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

2. Mostrar que si f es integrable Riemann en $[0,1]$, entonces f es integrable Lebesgue en $[0,1]$. Dar un ejemplo de f integrable Riemann en $[0,\infty]$ y no integrable Lebesgue en dicho intervalo.

3. Para cada número natural n escribir $n = 2^h + k$ con $0 \leq k < 2^h$. Sea f_n la función característica de $[\frac{k}{2^h}, \frac{k+1}{2^h}]$. Considerar esta función en $L^p([0,1], \mathrm{d}m)$. Mostrar que:

(a) para $p \geq 1$ vale $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |fn|^p \,\mathrm{d}m = 0$;

(b) f_n no converge puntualmente en el intervalo $[0,1]$.

4. Enunciar y bosquejar la demostración del teorema de Banach-Steinhauss.

5. Sea f_n una sucesión en $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}m)$ tal que la sucesión numérica $\int f_n f \,\mathrm{d}m$ converge para cada f en L^2. Mostrar que la sucesión f_n es acotada en L^2.

6. Dar un ejemplo de una función en $\mathbb{R}^2$ de modo que sus integrales reiteradas con respecto a medida de Lebesgue coinciden, y sin embargo la función no es integrable Lebesgue.

7. Sea a_n una sucesión de números reales y sea f_n una base ortonormal de $L^2([0,2\pi], \mathrm{d}m)$ tal que la sucesión de funciones $g_n(x) := a_n f_n(x)$ converge puntualmente a la función nula en el intervalo $[0,2\pi]$ y $\|f_n\|$ es una sucesión numérica acotada. Mostrar que la sucesión a_n converge a cero cuando n tiende a infinito. [*Ayuda:* aplicar Egoroff.]

Marzo 2003

1. Definamos para $f \in L^1[-\pi,\pi]$, $\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}t$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Probar que si f es absolutamente continua,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \|f'\|_{L^2(T)}.$$

[*Ayuda*: Estimar $|\hat{f}(0)|$ por separado y calcular $\hat{f'}(n)$.]

2. Sea $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$, donde $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Probar que

$$g \in C_o(\mathbb{R}) = \left\{ f \text{ continuas} \mid \lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0 \right\}.$$

3. Decidir sin son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Sean f_n, $n \in \mathbb{N}$, y f funciones medibles en $\mathbb{R}$.

(a) Si $\{f_n(x)\}$ son funciones positivas y $f_n(x) \to f(x)$ a. e. $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Si $f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$, entonces $f_n \to f$ (en medida). Decimos que $f_n \to f$ si para cada $\lambda > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} |\{x : |(f_n - f)(x)| > \lambda\}| = 0.$$

4. Usar que $\frac{1}{x} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ y el Teorema de Fubini para probar que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

5. Dar ejemplo de un $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \notin L^1(\mathbb{R})$, pero $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Marzo 2001

1. Sea $f(x,y)$, $0 \le x, y \le 1$, que satisface:

- Para cada x, $f(x,y)$ es una función integrable de y.
- $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ es una función acotada de x e y.

Muestre que $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ es una función medible de y para cada x y que

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

2. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

3. Sea $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(a) Pruebe que $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ tiene medida σ-finita.

(b) Pruebe que para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ tal que

$$\left| \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu - \int_A f\,\mathrm{d}\mu \right| < \epsilon.$$

4. Verifique si las siguientes funciones, definidas en $\mathbb{R}^2$, son integrables.

(a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\pi(x-y)^2}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{(1+x^4)(1+y^2)}$.

5. Esboce la demostración del siguiente:

Teorema: Si $f \in C(T)$ y $\epsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico P tal que $|f(t) - P(t)| < \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Julio 2000

1. (a) Enuncie el Teorema de Fubini.

(b) De un ejemplo de una función medible $f : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que las integrales iteradas

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad \text{existan,}$$

pero que

$$\int_{X\times X} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{no exista.}$$

(c) Verifique si las siguientes funciones son integrables en $\mathbb{R}^2$:

- $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{x}{y})}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
- $g(x,y) = h(x-y)$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible.

2. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Definimos $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Demuestre que

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

[*Sugerencia*: Considere primero $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con soporte compacto.]

3. Sean F y G funciones absolutamente continuas y sean f y g sus derivadas respectivas (definidas a. e. x).

(a) Demuestre que FG es absolutamente continua y que $(FG)' = F'G + FG'$.

(b) Demuestre que vale la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f(t)G(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b F(t)g(t)\,\mathrm{d}t = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

4. Sea f periódica, de período 2π, e igual a $\operatorname{sg}(x)$ en $(-\pi, \pi)$.

(a) Calcule la serie de Fourier de f.

(b) Pruebe que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2j+1)}{2j+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Marzo 2000

1. (a) Sea $1 \leq p < \infty$. Demostrar que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones del $L_p(\mathbb{R}^n)$ que cumple $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y existe $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f_n \to f$ en $L_p(\mathbb{R}^n)$.

(b) De un contraejemplo que muestre que la condición de acotación por una g no puede ser omitida.

2. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. ¿Es f de variación acotada en $[0,1]$? ¿Es f absolutamente continua en $[0,1]$?

3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par, no negativa, $g(x) > 0$ si $x > 0$, y no decreciente en $[0, \infty)$, y sea f una función medible, finita, definida en el espacio de medida (Ω, A, μ). Demostrar que para todo $a > 0$,

$$\mu\{x \in \Omega : |f(x)| \geq a\} \leq \frac{1}{g(a)} \int_\Omega (g \circ f)\, \mathrm{d}\mu.$$

4. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta. (Demuestre los resultados que use).

(a) Si X es un espacio vectorial normado y si $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, entonces existe una funcional lineal acotado f sobre X, de norma 1, tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.

(b) Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $M \neq \mathcal{H}$, entonces existe $y \in \mathcal{H}$, $y \neq 0$, tal que $y \perp M$.

Agosto 1998

1. Sea $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración (inyectiva) de los números racionales y sea

$$f(x) \doteq \sum_{r_n < x} 2^{-n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, continua en los irracionales y discontinua por la derecha (aunque no por la izquierda) en los racionales (¿Puede una función monótona ser discontinua en cada uno de los puntos irracionales?).

2. Probar que el conjunto "partes finitas de $\mathbb{Z}$" es numerable, y deducir que hay números reales que no pueden obtenerse como raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros (tales reales se dicen "trascendentes" y entre ellos están e y π, según probaron Hermite y Lindemann en 1873 y 1882 respectivamente).

3. Sea f una función (real) continua en un intervalo abierto I, y supongamos que ella admite en cada $x \in I$ una derivada por la derecha $f'_d(x)$ (finita). Sea A el conjunto de los $x \in I$ que tienen (cada uno) un entorno en el que f'_d se mantiene acotada. Probar que A es (un abierto) denso en I (probar primero que A no puede ser vacío: discurrir sobre la cadena de conjuntos

$$\mathrm{O}_n \doteq \left\{ x \in I \mid \exists y \in (x, x + \tfrac{1}{n}) \text{ con } \tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > n \right\},$$

analizando si éstos pueden ser densos o no).

4. Mostrar que se puede hacer una numeración $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los racionales de modo que la fórmula

$$\mu(S) = \sum_{r_n \in S} (\tfrac{1}{n})^{1/2} \qquad (*)$$

defina (en la familia de las partes de $\mathbb{R}$) una medida que sea finita sobre cada conjunto S semiacotado superiormente (y por tanto sobre cada compacto). Mostrar que tal medida μ es regular y decir qué funciones son integrables respecto de ella (y evaluar su integral). Reemplazando en (*) cada sumando por $\frac{1}{n}$, sin tomar raíz cuadrada, se obtiene otra medida similar ν cuyo espacio L^1_ν contiene al L^1_μ como subconjunto denso.

5. Sea f una función real y acotada, definida en un intervalo compacto $[a,b]$. Mostrar que si f es integrable en el sentido de Riemann también lo es en el de Lebesgue, con igual integral, pero que no vale la recíproca.

Agosto 1997

1. Sean $1 \le p,q,s \le \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$. Sean $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$. Probar que $fgh \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ y que

$$N_1(fgh) \le N_p(f)\, N_q(g)\, N_s(h),$$

donde $N_a(F) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^a \,\mathrm{d}x\right)^{1/a}$, $\forall\, F \in \mathcal{L}^a(\mathbb{R}^n)$, $a \ge 1$.

2. (a) ¿Es posible quitar la condición de acotación en el Teorema de Lebesgue de la Convergencia Dominada?

(b) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito. Sea $(X_n)_{n\ge 1}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre Ω con valores en $\mathbb{R}$, X otra función medible de Ω en $\mathbb{R}$. Probar que si $X_n \to X$ μ a. e., entonces $X_n \to X$ en μ-medida.

(c) ¿Es cierta (b) si $\mu(\Omega) = +\infty$?

3. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. ¿Es posible que exista una familia numerable de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $\mathbb{Q}$?

4. Sean $P_0, P_1, P_2, \dots, Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ las funciones definidas sobre $\mathbb{R}$ por

$$P_0(x) = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$P_k(x) = (-1)^k \exp(x^2)\, \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \exp(-x^2), \quad k = 1,2,\dots, \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$Q_k(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) P_k(x), \quad k = 0,1,\dots, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Probar que

(i) $P_{k+1}(x) - 2xP_k(x) + P_k'(x) = 0, \quad k = 0,1,2,\dots,\ \forall\, x \in \mathbb{R};$

(ii) $P_k''(x) - 2xP_k'(x) + 2kP_k(x) = 0, \quad k = 0,1,2,\dots,\ \forall\, x \in \mathbb{R};$

(iii) $Q_k''(x) + (2k+1-x^2)Q_k(x) = 0, \quad k = 0,1,2,\dots,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

(b) Mostrar que $(Q_k)_{k\geq 0}$ es ortogonal en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

(c) Sea $H_k(x) = \frac{1}{c_k} Q_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Determinar $(c_k)_{k\geq 0}$ de modo tal que $(H_k)_{k\geq 0}$ sea ortonormal en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

(d) Probar que $\sqrt{2(k+1)}H_{k+1}(x) = xH_k(x) - H_k'(x)$, $\forall\, x$, $\forall\, k$.

5. Se dice que $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ es una *función de distribución* si

- $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$,
- F es continua a derecha en todo punto,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$.

Sea $\mathcal{F} = \{F : \mathbb{R} \to [0,1] \mid F$ es una función de distribución$\}$. Sea $\lambda : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ dada por:

$$\lambda(F, G) = \inf\{\epsilon > 0 \mid F(x-\epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x+\epsilon) + \epsilon,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Probar que λ es una métrica sobre $\mathcal{F}$ (métrica de Lèvy).

(b) Sean $(F_n)_{n\geq 1}$ y F en $\mathcal{F}$. Probar que $\lambda(F_n, F) \to 0$ implica $F_n(x) \to F(x)$ para todo x punto de continuidad de F.
Nota: La recíproca también es cierta pero es mucho más difícil de probar.

(c) Para cada $F \in \mathcal{F}$ sea μ_F la única probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel (que μ_F sea una probabilidad quiere decir que μ_F es una medida y que $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$), tal que

$$\mu_F((-\infty, x]) = F(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Sea $\mathcal{F}_1 = \{F \in \mathcal{F} \mid \int_{\mathbb{R}} |x|\, \mathrm{d}\mu_F(x) < \infty\}$. Sea $T : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(F) = \int x\, \mathrm{d}\mu_F(x).$$

Probar que T no es continuo en F con respecto a λ cualquiera sea $F \in \mathcal{F}_1$.

6. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(\Lambda, \mathcal{B})$ dos espacios medibles. Probar que

(a) Sea $T : \Omega \to \Lambda$ medible, $T^{-1}(\mathcal{B}) = \{T^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es $T^{-1}(\mathcal{B})$-medible, entonces

$$T(\omega_1) = T(\omega_2) \Longrightarrow f(\omega_1) = f(\omega_2).$$

(b) Sea $T : \Omega \to \mathcal{A}$ medible y suryectiva. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es $T^{-1}(\mathcal{B})$-medible, entonces existe una única función medible $g : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $f = g \circ T$.

7. Sea X un espacio normado, $\|\ \|$ su norma. Se dice que X es uniformemente convexo su para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| = \|y\| = 1,\ \left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\| > 1 - \delta \Longrightarrow \|x - y\| > \epsilon.$$

Probar que

(a) Si X es un espacio de Hilbert, entonces X es uniformemente convexo.

(b) Probar que $L^1(\mathbb{R})$ no es uniformemente convexo.

CAPÍTULO 3

Estructuras algebraicas

Agosto 2009

Se aprueba con 50 puntos.

1. (15 pts.) Considere el anillo $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdaderas o falsa y justifique:
   (a) R es DIP.
   (b) R es factorial.
   (c) R es Noetheriano.
2. (15 pts.) Sea A un anillo conmutativo con identidad, tal que para todo $x \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, con $x^n = x$.
   (a) Probar que todo ideal primo de A es maximal.
   (b) Probar que la intersección de todos los ideales primos es 0.
   (c) Mostrar que si A es finito, entonces $A = F_1 \oplus \cdots \oplus F_j$, con F_k cuerpo para todo k.
3. (15 pts.) Probar que si e es un elemento idempotente ($e^2 = e$) del anillo A entonces el A-módulo Ae es proyectivo.
4. (15 pts.) Sea A un dominio de ideales principales. Probar que todo A-módulo finitamente generado y libre de torsión es libre. Mostrar un ejemplo donde A no es DIP y la afirmación es falsa.
5. (15 pts.) Sea $\mathbb{Z}_m$ el anillo de enteros módulo m y $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_m)$ el grupo de matrices $n \times n$ inversibles con coeficientes en $\mathbb{Z}_m$. Calcule el orden de G cuando $m = p^k$ con p primo y $k \in \mathbb{N}$.
6. (15 pts.) Sean H_1 y H_2 dos subgrupos distintos del grupo G con $[G : H_1] = [G : H_2] = 3$. ¿Cuáles son los posibles valores de $[G : H_1 \cap H_2]$?
7. (10 pts.) Enunciar y demostrar el criterio de irreducibilidad de Eisenstein.

Julio 2009

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Todo grupo de order 69 es abeliano.

(b) Si A es un dominio de integridad finito, entonces A es un cuerpo.

(c) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$ módulo libre de torsión.

(d) Si $f, g : \mathbb{Q} \to R$ son homomorfismos de anillos con identidad y $f|_{\mathbb{Z}} = g|_{\mathbb{Z}}$, entonces $f = g$.

2. Sea G un grupo de orden 24 y H un subgrupo de order 8 que no es normal en G.

(a) Determinar la cantidad de subgrupos conjugados a H.

(b) Probar que G no es simple.

3. Sea E un A-módulo simple y sea $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ una descomposición en suma directa de A-módulos del A-módulo unitario M. Probar que

$$\mathrm{Hom}_A(E, M) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(E, M_i).$$

4. Sea V un anillo de valuación, es decir un anillo conmutativo con identidad tal que si $a, b \in V$ entonces $a|b$ o $b|a$.

(a) Probar que todo ideal finitamente generado de V es principal.

(b) Probar que V tiene un único ideal maximal.

(c) Si V es un anillo de valuación noetheriano, probar que existe un elemento $t \in V$ tal que todo ideal propio de V es de la forma (t^n) para algún entero $n > 1$.

5. (a) Dado $\phi : A \to S$ un morfismo de anillos con unidad tal que $\phi(1_A) = 1_S$ y $s_1, \ldots, s_n \in S$, probar que existe un único morfismo $\psi : A[x_1, \ldots, x_n] \to S$ llamado evaluación en $s_1, \ldots, s_n$ tal que $\psi(x_i) = s_i$ para $1 < i < n$.

(b) Sea A un anillo con identidad. Probar que

$$A[x_1, \ldots, x_n] \cong A[x_1, \ldots, x_k][x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

6. Explicar cómo se utiliza el Teorema de Descomposición (o de Estructura) de módulos sobre dominios de ideales principales para probar la forma racional de una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita en sí mismo.

Marzo 2009

1. (a) Sea A un grupo abeliano libre de rango finito n y sea B un subgrupo de A. Demostrar que existe una base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de A, un natural $k \leq n$ y enteros $d_1, \ldots d_k$ tales que $d_1|d_2| \ldots |d_k$ y $\{d_1\alpha_1, \ldots, d_k\alpha_k\}$ es base de B.

(b) Sea $A = \mathbb{Z}^3$ y B el subgrupo de A generado por los elementos $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,4)$. Dar una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ de A, el natural $k \leq 3$ y los enteros $d_1, \ldots, d_k$ tales que cumplen las condiciones del punto (a).

2. (a) Sea H un subgrupo de un grupo G de índice n. Demostrar que la acción por traslación a izquierda de G en el conjunto de coclases a izquierda G/H induce un homomorfismo de G en $\mathbb{S}_n$ cuyo núcleo está contenido en H.

(b) Asumir que G es simple y $|G| = 60$.

(i) Demostrar que $|H| \leq 12$ para todo $H \subsetneqq G$ y que en caso de que G tenga un subgrupo de orden 12 entonces es isomorfo A_5. (Sugerencia: esto se puede obtener utilizando la parte (a).)

(ii) Determinar cuántos p-subgrupos de Sylow tiene G para $p = 3$ y $p = 5$.

(iii) Demostrar que G es isomorfo a A_5. (Una posibilidad es determinar cuántos 2-subgrupos de Sylow tiene G.)

3. En este ejercicio los anillos tienen identidad y los módulos son unitarios. Recordar que un anillo R tiene la propiedad *de la invariancia del rango* si para todo R-módulo libre M, toda base de M tiene la misma cardinalidad.

(a) Demostrar que si $f : R \to S$ es un epimorfismo de anillos con identidad y S tiene la propiedad de la invariancia del rango, entonces R tiene la misma propiedad.

(b) Demostrar que los anillos conmutativos tienen la propiedad de la invariancia del rango (aceptando que los cuerpos tienen esta propiedad).

(c) Dar un ejemplo de un R-módulo libre que tenga bases de diferente cardinalidad.

4. Sea R un dominio de integridad (con identidad) y sea F el cuerpo de fracciones de R.

(a) Sea M un ideal maximal de R, demostrar que $R_M = \{a/b \in F : a \in R, b \in R, b \notin M\}$ es un subanillo de F.

(b) Demostrar que $I_q = \{r \in R : rq \in R\}$ es un ideal no nulo de R para todo q en F.

(c) Demostrar que $R = \bigcap_{\substack{M \text{ ideales} \\ \text{maximales}}} R_M$. (Sugerencia: usar (b).)

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$.

(a) Dar las definiciones de operador lineal *semisimple* y *nilpotente* sobre V y enunciar el teorema de descomposición (aditiva) de Jordan-Chevalley para un operador lineal sobre V.

(b) Dar la descomposición de Jordan-Chevalley del operador lineal en $\mathbb{R}^3$ que en la base canónica tiene matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diciembre 2008

1. Considerar el anillo de enteros de Gauss, $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

(a) Describir las unidades del anillo.

(b) Probar que es un dominio de factorización única.

2. Definir grupo abeliano divisible y probar las siguientes proposiciones.

(a) El grupo de los racionales $\mathbb{Q}$ y los grupos $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ para todo p primo, son divisibles. $[\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\overline{a/b} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b = p^i, \ i \geq 0\}]$

(b) Si G es divisible y libre de torsión, entonces G es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Sean A, B matrices cuadradas con coeficientes racionales o reales. Si A y B tienen los mismos polinomios característicos y minimales, entonces son semejantes sobre los racionales o reales respectivamente.

(b) Si A es una matriz cuadrada racional o real, nilpotente, entonces el único autovalor de A es el 0.

(c) Las siguientes dos matrices complejas tienen la misma parte nilpotente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 2 & 3 & & \\ & & 3 & 4 & \\ & & & \ddots & n \\ & & & & n \end{pmatrix}.$$

(d) Si A es un subespacio de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que toda matriz de A no nula es invertible, entonces $\dim A = 1$.

4. Sea el grupo abeliano $\mathbb{Z}^4/\langle(1,1,0,0),(-1,1,2,0),(0,-2,1,3),(0,0,-3,1)\rangle$. Dar el rango, sus factores invariantes y divisores elementales.

5. Sea R un anillo cualquiera. Definir R-módulo proyectivo y probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) M es proyectivo.

(b) Toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$ se parte.

(c) M es sumando directo de un módulo libre.

(d) El funtor $\mathrm{Hom}_R(M, \_\ )$ es exacto.

Agosto 2008

1. Enunciar y demostrar el teorema sobre submódulos de un módulo libre sobre un 'DIP'.

2. Demostrar que A_n es simple si y sólo si $n \neq 4$.

3. Sea H un subgrupo propio del grupo finito G. Probar que

$$\bigcup_{x\in G} xHx^{-1} \neq G.$$

4.* (a) Si un grupo infinito G contiene un subgrupo normal propio N tal que $N \not\subseteq Z(G)$, entonces G contiene un subgrupo normal propio infinito.

(b) Si un grupo infinito no-conmutativo G contiene un subgrupo normal propio N tal que G/N es conmutativo, entonces G contiene un subgrupo normal propio infinito.

(c) Mostrar que la condición de no-conmutatividad es necesaria en (b).

(d) Mostrar que también la condición de existencia de un tal N es necesaria en (b).

5. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea $A = \mathbb{F}[t^2, t^3] \subset \mathbb{F}[t]$, el subanillo de $\mathbb{F}[t]$ generado por t^2 y t^3.

(a) Demostrar que el ideal de A generado por t^2 y t^3, no es principal.

(b) ¿Son los elementos t^2 y t^3 irreducibles en A?

(c) ¿Son primos en A?

6. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar sus respuestas.

(a) Si G es un grupo finito generado por dos elementos de orden dos, entonces $G \cong D_{2n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

(b) En un dominio R, todo par de elementos tiene m.c.d.

(c) Si b y b' son elementos no nulos de un cuerpo F, entonces las matrices $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix} a & b' \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right]$ son similares.

(d) Si M es un módulo libre, entonces todo conjunto de generadores contiene una base.

Julio 2008

1. Hacer uno de los siguientes dos ejercicios.

(a) Sea $\mathbb{Z}_n$ el grupo de enteros módulo n.

(i) Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ es isomorfo al grupo de unidades del anillo $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_n^*$

(ii) La función aritmética $\phi(n) = \#\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ es multiplicativa, es decir si $(n, m) = 1$ entonces $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$.

(iii) Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ es cíclico si p es primo.

(iv) ¿Es $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ cíclico para todo n?

(b) Sea $G = D_n$ el grupo dihedral de orden $2n$.

(i) Determinar los p-grupos de Sylow de G para todo primo $p \neq 2$.

(ii) Determinar los 2-grupos de Sylow de G.

2. Sea G un grupo finitamente generado. Probar que para todo n natural, la cantidad de subgrupos de G de índice n es finita. [Ayuda: para cada subgrupo H de índice n considerar la acción de G en el conjunto de coclases determinadas por H.]

3. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A = \mathbb{K}[[x]]$ el anillo de series de potencias.
Si $a \in A$, $a = \sum\limits_{i \geq 0} k_i x^i$, el orden de a, $\mathrm{ord}(a)$, es el primer j tal que $k_j \neq 0$. Así si $\mathrm{ord}(a) = r$, $a = \sum\limits_{i \geq r} k_i x^i$ con $k_r \neq 0$.

(a) La función $\operatorname{ord} : A - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ define una estructura de dominio euclídeo en A.

(b) A es domino de ideales principales. Más aún todo ideal propio de A es de la forma $\langle x^n \rangle$ para algún n.

(c) A es dominio de factorización única. Más precisamente x es el único irreducible salvo asociados. Todo $a \in A$ se factoriza unívocamente como $a = ux^n$ con $u \in A^*$.

(d) ¿Es $\mathbb{K}[[x, y]]$ euclídeo, principal o de factorización única?

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas justificando.

(a) Sean A, B matrices cuadradas con coeficientes racionales o reales. Si A y B tienen los mismos polinomios característicos y minimales, entonces son similares sobre los racionales o reales respectivamente.

(b) Si A es una matriz cuadrada racional o real, nilpotente, entonces el único autovalor de A es el 0.

(c) Las siguientes dos matrices complejas tienen la misma parte nilpotente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 2 & 3 & & \\ & & 3 & 4 & \\ & & & \ddots & n \\ & & & & n \end{pmatrix}.$$

5. Sea R un anillo. La sucesión de R-módulos

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

es exacta si y sólo si para todo R-módulo D, la sucesión de grupos abelianos inducida

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(D, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(D, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(D, C)$$

es exacta.

6. Sea R un dominio de ideales principales.

(a) Enunciar el teorema de estructura para R-módulos, aclarando explícitamente qué son el orden de un módulo cíclico, los factores invariantes y los divisores elementales.

(b) Sean M y N R-módulos cíclicos de órdenes m y n respectivamente con m y n no coprimos. Determinar los factores invariantes de $M \oplus N$.

Marzo 2008

1. Sea G el grupo presentado por generadores $\langle a, b \rangle$ y relaciones $\langle aba^{-1}b = 1 \rangle$.

(a) Probar que G tiene un subgrupo normal $H \simeq \mathbb{Z}$ tal que $G/H \simeq \mathbb{Z}$.

(b) Mostrar que G satisface una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

(c) Probar que G es isomorfo a uno y sólo uno de los siguientes grupos:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2; \qquad \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}; \qquad \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}_2.$$

2. Sea G un grupo y $f : G \longrightarrow G$ un homomorfismo tal que $f^n(G) = 1$ para algún $n \geq 1$.

(a) Probar que si $\operatorname{Ker} f$ es finito, entonces G es finito.

(b) Probar que si $[G : f(G)]$ es finito, entonces G es finito.

3. Sea R un anillo conmutativo con unidad 1 y $R[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en R. Sean $a \in R$ y $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in R[x]$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Si a es nilpotente, entonces $1 + a$ es una unidad. Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad, es una unidad.

(b) f es una unidad en $R[x]$ si y sólo si a_0 es unidad en R y $a_1, \ldots, a_n$ son nilpotentes. [Ayuda: Si $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ es el inverso de f, probar por inducción en r que $a_n^{r+l}b_{m-r} = 0$. Deducir que a_n es nilpotentes y luego usar (a).]

(c) f es nilpotente si y sólo si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son nilpotentes.

(d) f es divisor de cero si y sólo si existe $a \neq 0$ en R tal que $af = 0$. [Ayuda: Si $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ es grado mínimo tal que $fg = 0$, entonces $a_nb_m = 0$ y $a_ng = 0$ (pues anula a f y tiene grado menor). Luego probar por inducción que $a_{n-r}g = 0$ para $0 \leq r \leq n$.]

(e) Si R es DFU, f y g son primitivos si y sólo si fg es primitivo. [f es primitivo si $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$.]

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando.

(a) Si M es un R-módulo tal que todo elemento no nulo es linealmente independiente, entonces M es libre.

(b) Si A es un subespacio de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que toda matriz de A no nula es invertible, entonces $\dim A = 1$.

(c) Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo y $f : M \longrightarrow M$ un epimorfismo de R-módulos. Si M es noetheriano, entonces f es un isomorfismo.

5. Sea R un anillo con identidad y M ($M \neq 0$) un R-módulo a izquierda unitario.

(a) Definir base de M.

(b) Probar que son equivalentes:

(i) M tiene una base.

(ii) M es isomorfo a un suma directa de copias del R-módulo a izquierda R.

(iii) Existe un conjunto X no vacío y una función $i : X \longrightarrow M$ con la siguiente propiedad: dado cualquier R-módulo unitario N y una función $f : X \longrightarrow N$, existe un único morfismo de R-módulos g tal que $g \circ i = f$. Es decir, M es libre en la categoría de R-módulos unitarios.

(c) Mostrar que R tiene una base como R-módulo a izquierda, pero no es libre en la categoría de todos los R-módulos.

Diciembre 2007

1. Sea G grupo y H y N subgrupos de G.

(a) Si N es un subgrupo normal de G y si N, G/N son finitamente generados, entonces lo es G.

(b) Si N es normal en G y $[G : N]$ y $|H|$ son coprimos, entonces H es un subgrupo de N.

2. (a) Si H es un subgrupo normal de un grupo finito G y H tiene p^k elementos, entonces H está contenido en todo p-grupo de Sylow.

(b) Sea G un p-grupo, entonces su centro es no trivial.

3. Sea G el grupo abeliano finitamente generado por $\{a, b, c, d, e\}$ y dado por las relaciones

$$2a - b + c = 0, \quad a + c + 3d - 2e, \quad 5b - 3c + e = 0.$$

Determinar la estructura de G, dando el rango de la parte libre y los divisores elementales.

4. (a) El polinomio $x + 1$ es unidad en el anillo de series de potencias $\mathbb{Z}[[x]]$, pero no lo es en $Z[x]$.

(b) $x^2 + 3x + 2$ es irreducible en $\mathbb{Z}[[x]]$, pero no en $\mathbb{Z}[x]$.

5. Sea A un DIP y M un A-módulo de torsión. Si p es primo en A, se define $M(p) = \{m \in M : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^n m = 0\}$. Probar que:

(a) $M(p)$ es un A-módulo, submódulo de M para cada primo p.

(b) $M = \bigoplus M(p)$, donde la suma es sobre todos los primos p de A.

6. Sean A, B anillos conmutativos con unidad. Sea M una A-módulo, P un B-módulo y N un (A, B)-bimódulo, es decir N es un A-módulo a izquierda, un B-módulo a derecha y las dos estructuras son compatibles, es decir $a(xb) = (ax)b$ para $a \in A$, $x \in N$, $b \in B$. Entonces

(a) $M \otimes_A N$ es naturalmente un A-módulo y $N \otimes_B P$ es naturalmente un B-módulo.

(b) $(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$.

(c) Recordemos que un A-módulo M es *playo* o *plano* si el funtor $- \otimes_A M$ es exacto. Probar que si $f : A \to B$ es un morfismo de anillos y M es un A-módulo plano, entonces $B \otimes_A M$ es un B-módulo plano.

Julio 2007

1. Sea A el grupo abeliano dado por generadores a, b, c con relaciones

$$2a + b + 4c = 0, \quad -a + 2b + 4c = 0, \quad 3a + 5b + 6c = 0.$$

Hallar el rango y los factores invariantes de A.

2. Enunciar los Teoremas de Sylow.

3. Sea A un grupo abeliano divisible. Probar que A es una suma de copias del grupo aditivo $\mathbb{Q}$ de los números racionales y de $Z(p^\infty)$'s.

4. Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G, y sea P un p-subgrupo de Sylow de H. Probar que $G = HN_G(P)$.

5. Sean $p < q < r$ números primos. Demostrar que no existen grupos simples de orden pqr.

6. Sea G un grupo finito. Sean además V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ un morfismo de grupos.

(a) Demostrar que V admite un producto interno con respecto al cual todas las matrices $\rho(g)$, $g \in G$, son ortogonales.

(b) Supongamos que $\dim V = 2$ y $\rho \neq 1$. Demostrar que $[G, G] \neq G$. [Sugerencia: considerar la función determinante.]

Marzo 2007

1. Sea A el grupo abeliano dado por generadores a, b, c, d con relaciones

$$-4a - 2b + 12d = 0, \quad 6a + 2b - 18d = 0, \quad 12b + 12c = 0.$$

(a) Hallar el rango y los factores invariantes de A.

(b) Calcular el exponente del subgrupo de torsión $t(A)$.

(c) Justificar por qué A no es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$.

2. Sea R un dominio de integridad. Demostrar que si R es dominio de factorización única, entonces $R[X]$ es dominio de factorización única.

3. Sea R un anillo conmutativo. Demostrar que si R es noetheriano, entonces $R[X]$ es noetheriano.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Sean G un grupo finito y $H \trianglelefteq G$, tal que H es cíclico. Entonces todo subgrupo de H es normal en G.

(b) Sea p un número primo. Si G es un p-grupo finito tal que todo elemento no trivial de G es de orden p, entonces G es abeliano.

(c) Sean $\sigma, \tau \in \mathbb{A}_n$. Si σ y τ son conjugadas en $\mathbb{S}_n$, entonces lo son también en $\mathbb{A}_n$.

5. Sean p un número primo, $n \geq 0$. Demostrar que un grupo de orden $4p^n$ no es simple.

6. Sea R un anillo y sea M un R-módulo a izquierda. Probar que M es proyectivo de tipo finito si y sólo si existen subconjuntos finitos —llamados R-bases proyectivas— $\{x_i\}_{i=1}^n$ de R, y $\{f_i\}_{i=1}^n$ de $R^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$, tales que para cada $x \in M$, $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i$.

7. Sean p un número primo, $r, n \in \mathbb{N}$. Sean además $\mathbb{F}_q$ el cuerpo con $q = p^r$ elementos y $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$.

(a) Demostrar que el subgrupo $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ de las matrices triangulares superiores con unos en la diagonal es un p-subgrupo de Sylow de G.

(b) Probar que el orden de $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ es una potencia de p si y sólo si A es semejante sobre $\mathbb{F}_q$ a una matriz triangular superior con unos en la diagonal.

(c) Demostrar que si $n \geq 2$, entonces G no posee p-subgrupos de Sylow normales.

Diciembre 2006

1. Sea R el subanillo de los números reales dado por $R := \{a+b\sqrt{10} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) La aplicación $N : R \to \mathbb{Z}$ dada por $a + b\sqrt{10} \mapsto a^2 - 10b^2$ satisface $N(uv) = N(u)N(v)\ \forall\, u, v \in R$; $N(u) = 0 \iff u = 0$; u es unidad $\iff N(u) = \pm 1$.

(b) ¿Son los elementos 2 y $4+\sqrt{10}$ irreducibles? ¿Son primos? ¿Es R un dominio de factorización única? ¿Se factoriza en R todo elemento como producto de irreducibles?

(c) ¿Cuáles son las unidades de R?

2. Sea $R := \mathbb{F}[x, y]$ el anillo de polinomios sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ en dos indeterminadas x e y; y sea $I := xR$ el ideal principal de R generado por x. Definimos $S := F + I$, de modo que S es un subanillo de R, y observamos que I es un ideal de S.

(a) Mostrar que I no es finitamente generado como ideal de S.

(b) Probar que hay infinitos ideales de S tales que no son ideales de R.

3. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar sus respuestas.

(a) Con la operación binaria $*$ en los números racionales $\mathbb{Q}$ dada por $a*b := a+b+ab$, $(\mathbb{Q}, *)$ es un grupo.

(b) Sea X una matriz 3×3 sobre $\mathbb{C}$ y sea $\mathbb{C}(X)$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de matrices 3×3 que conmutan con X. Entonces la dimensión de $\mathbb{C}(X)$ sobre $\mathbb{C}$ es al menos 3.

(c) Si A es un álgebra asociativa de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$, y A no tiene divisores de cero entonces todo elemento no nulo de A tiene inverso multiplicativo.

4. Hallar el orden del grupo definido por generadores a, b y relaciones $a^8 = b^2a^4 = ab^{-1}ab = 1$.

5. Hacer sólo uno de los siguientes dos:

(a) Demostrar que todo grupo abeliano divisible es suma directa de copias de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$'s.

(b) Sea R un anillo con identidad y F un R-módulo libre con una base infinita X. Probar que toda base de F tiene la misma cardinalidad que X.

Diciembre 2005

1. Elegir uno de los siguientes dos ejercicios.

A. Sea R un anillo conmutativo con identidad.

(a) Definir unidad, elemento irreducible, elemento primo y dominio de factorización única.

(b) Dar ejemplos de elementos irreducibles que no son primos y viceversa.

(c) Demostrar que si R es un DIP entonces los conceptos de irreducible y primo coinciden.

(d) Demostrar que todo DIP es DFU.

(e) Dar un ejemplo de un DFU que no es DIP.

B. Sea R un anillo conmutativo con identidad y M un R-módulo unitario.

(a) Sea $\mathcal{B} \subset M$ un subconjunto, decir cuándo se dice que $\mathcal{B}$ es una base de M.

(b) Demostrar que M tiene una base de n elementos si y sólo si

$$M \simeq \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{n \text{ veces}}.$$

En lo que sigue, diremos que un R-módulo M es *libre finitamente generado* si tiene una base finita.

(c) Dar un ejemplo de un R-módulo libre finitamente generado que contenga un submódulo que no es libre finitamente generado.

(d) Demostrar que si R es un DIP y M es un R-módulo libre finitamente generado entonces para todo submódulo N de M existe una base $\mathcal{B}_M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ de M, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ y elementos $r_1, \ldots, r_k \in R$ tales que $\mathcal{B}_N = \{r_1 m_1, \ldots, r_k m_k\}$ es base de N y $r_1 | r_2 | \ldots | r_k$.

(e) Sea $R = \mathbb{Z}$, el anillo de los números enteros, $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y N el submódulo generado por $\{(1,2),(4,1)\}$. Encontrar una base $\mathcal{B}$ de M como la descrita por el teorema anterior.

2. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea $A = \mathbb{F}[t^2, t^3] \subset \mathbb{F}[t]$ el subanillo $\mathbb{F}[t]$ generado por t^2 y t^3.

(a) Demostrar que $(t^2, t^3)_A$, el ideal de A generado por t^2 y t^3, no es principal.

(b) Demostrar que t^2 y t^3 son irreducibles en A.

(c) ¿Es alguno de los dos elementos t^2 o t^3 primo en A?

3. Sea R un DIP y $p \in R$ un elemento irreducible. Sea M un R-módulo y $pM = \{pm : m \in M\}$.

(a) Demostrar que $R/(p)$ es un cuerpo.

(b) Demostrar que pM es un submódulo de M y que M/pM es un $R/(p)$-espacio vectorial con estructura dada por $\overline{r}.\overline{m} = \overline{rm}$.

4. Sea $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(a) Calcular el orden de G.

(b) Enunciar el Teorema de la forma racional para matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$.

(c) Para cada clase de conjugación de G, dar un representante y calcular la cantidad de elementos que tiene. *Sugerencia*: calcular el centralizador en G de cada representante.

(d) ¿Cuántos 3-subgrupos de Sylow tiene G y qué estructura tienen?

(e) ¿Cuántos 2-subgrupos de Sylow tiene G y qué estructura tienen?

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar.

(a) Si R es un anillo y $p \in R[x]$ tiene grado n, entonces p tiene a lo sumo n raíces.

(b) Si R es un anillo con unidad de 4 elementos entonces es conmutativo.

(c) Si R es un anillo de 4 elementos entonces es conmutativo.

(d) Sea $\mathbb{S}_n$ el grupo de permutaciones de n elementos y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(m) = \min\{n : \mathbb{S}_n \text{ tiene un elemento de orden } m\}.$$

Entonces $f(m) = p_1^{r_1} + \cdots + p_k^{r_k}$ donde $m = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ es la descomposición en primos de m.

Agosto 2005

1. Sea $\mathbb{S}_n$ el grupo de permutaciones de n elementos.

(a) Mostrar que todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones.

(b) Caracterizar, para todo n, las clases de conjugación de $\mathbb{S}_n$.

2. Sea A un dominio de integridad finito.

(a) Probar que A es un cuerpo.

(b) Probar que $A[x]$ es un dominio de ideales principales.

3. Sea G un grupo finito y sea X un conjunto finito en el que G actúa. Para cada $x \in X$ sean O_x la órbita de x y G_x el subgrupo de isotropía de x. Para cada $g \in G$ sea X^g el conjunto de puntos fijos en X por g.

(a) Dados $x, y \in X$, decimos que $x \sim y$ si existe un $g \in G$ tal que $gx = y$. Mostrar que ésta es una relación de equivalencia y que $x \sim y$ si y sólo si $O_x = O_y$.

(b) Mostrar que para todo x, $|O_x| = |G|/|G_x|$ y en particular que los subgrupos de isotropía de elementos de una misma órbita tienen el mismo orden.

(c) Sea X/G el conjunto de órbitas de X. Probar que

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X^g.$$

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

(a) Enunciar el teorema de clasificación de módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales.

(b) Enunciar el teorema de la forma racional de un endomorfismo de V.

(c) Probar el teorema de la forma racional usando el teorema enunciado en el primer punto.

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando.

(a) Hay exactamente $2^{n-1}(2^n - 1)$ subespacios vectoriales de dimensión 2 de $\mathbb{F}_2^n$.

(b) El grupo de unidades de $\mathbb{Z}_n$ es cíclico, para todo natural n.

(c) Toda matriz compleja es semejante a su traspuesta.

Agosto 2004

1. Sea A un anillo conmutativo con unidad y M un A-módulo de generación finita. Sea $\phi : M \to A^n$ un homomorfismo suprayectivo. Probar que el núcleo de ϕ es finitamente generado.

2. Sea G un grupo finito y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ es un homomorfismo de grupos, probar que para todo $g \in G$ la traza de $\rho(g)$ es suma de raíces de la unidad.

3. Encontrar todos los grupos de orden 135.

4. Dado $\mathbb{F}$ cuerpo, probar que el anillo de polinomios $\mathbb{F}[x]$ es un dominio de ideales principales.

5. Sea A una matriz $n \times n$. Si $v_1, \dots, v_n$ son autovectores de A con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente y tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, entonces $v_1, \dots, v_n$ son linealmente independientes.

6. Sean A un anillo conmutativo con unidad, M un A-módulo finitamente generado, $\mathfrak{a}$ un ideal de A y ϕ un endomorfismo de M tal que $\phi(M) \subset \mathfrak{a}M$. Entonces ϕ satisface una ecuación de la forma

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

donde los a_i pertenecen a $\mathfrak{a}$.

Julio 2003

1. Diga si es verdadero o falso y justifique su respuesta.

(a) El centro de un p-grupo no trivial es no trivial (p primo).

(b) $\mathbb{Q}$ no es subgrupo de ningún grupo abeliano finitamente generado.

(c) Un anillo se dice artiniano si toda cadena descendente de ideales se estabiliza. Si A es un dominio de integridad artiniano, entonces A es un cuerpo.

2. Si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}(p^\infty) = \{\overline{a/p^n} : a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_0\}$ tal que tiene un elemento de orden p^k y todos los demás elementos tienen orden menor o igual, entonces $H \cong \mathbb{Z}_{p^k}$.

3. (a) Encuentre todos los grupos de orden 153.

(b) Describe todas las clases de isomorfismos de anillos de 25 elementos.

4. (a) Explique cómo se utiliza el teorema de descomposición (o de estructura) de módulos sobre dominios de ideales principales para probar la forma racional de una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita en sí mismo.

(b) Pruebe que todo módulo finitamente generado sobre un dominio de ideales principales es isomorfo a la suma directa de su grupo de torsión y un módulo libre.

Marzo 2001

1. (a) Decir cuáles de los grupos de orden 12 contienen un subgrupo de orden 6. Justificar la respuesta.

(b) Sea G un grupo de orden p^4 (con p primo) con centro de orden p^2. Determinar cuántas clases de conjugación tiene G.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K. Si $T \in \mathrm{End}_K(V)$ definimos en V una estructura de $K[x]$-módulo por $p(x).v = p(T)v$.

(a) Decir si V es finitamente generado y de torsión.

(b) Decir bajo qué condiciones sobre T es V un $K[x]$-módulo cíclico.

(c) Dar una condición necesaria y suficiente sobre T para que V, como $K[x]$-módulo, tenga exactamente n generadores.

3. (a) Si la descomposición en primos de m es $p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ probar que

$$\mathbb{Z}_m^\times \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}^\times \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}^\times.$$

(b) Sea p un primo impar. Probar que $\mathbb{Z}_{p^n}^\times$ es cíclico. [*Ayuda*: considerar el subgrupo generado por $1 + p$.]

4. Sea R un anillo en el cual toda cadena ascendente de ideales es estacionaria.

(a) Probar que toda familia no vacía de ideales tiene un elemento maximal.

(b) Si además R es un dominio íntegro probar que todo elemento (no nulo y no unidad) se descompone como producto de elementos irreducibles.
[*Ayuda*: probar que existe un elemento irreducible que lo divide.]

5. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Toda matriz nilpotente tiene traza cero.

(b) Sobre un cuerpo de característica p, toda raíz de $f(x) = x^p - c$ es múltiple.

(c) Todo endomorfismo no nulo de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es sobre.

(d) Todo subgrupo finito de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cíclico.

Agosto 1998

1. Diga si es verdadero o falso y justifique su respuesta.

(a) Si M es un módulo libre, todo conjunto de generadores contiene una base.

(b) $\mathbb{Q}$ no es un grupo finitamente generado.

(c) Si S es submódulo simple de $M = S_1 \oplus S_2$, con S_i simples, entonces S es isomorfo a alguno de los S_i $(i = 1, 2)$.

2. Sea G un grupo finito y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ es un homomorfismo de grupos, probar que la traza de $\rho(g)$, para cualquier $g \in G$, es suma de raíces de la unidad.

3. Demostrar que toda matriz compleja es semejante (o similar) a su transpuesta.

4. Dado $\mathbb{F}$ un cuerpo, probar que el anillo de polinomios $\mathbb{F}[x]$ es un dominio de ideales principales.

5. Sean $(\mathbb{Z}_{p^k}, +, \star_1)$ y $(\mathbb{Z}_{p^k}, +, \star_2)$ dos estructuras de anillo de $\mathbb{Z}_{p^k}$ (p primo).

(a) Dar una condición necesaria y suficiente para que $f : (\mathbb{Z}_{p^k}, +, \star_1) \to (\mathbb{Z}_{p^k}, +, \star_2)$ sea un isomorfismo de anillos [*Ayuda*: tener en cuenta $[1] \star_i [1] = n_i[1]$, con $n_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2)$].

(b) Describir todas las clases de isomorfismos de anillos semisimples de 27 elementos.

CAPÍTULO 4

Álgebra lineal numérica

Agosto 2009

1. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene rango completo, probar que

(a)

$$\sigma_{\max} = \max_{y\in\mathbb{R}^m, x\in\mathbb{R}^n} \frac{y^T Ax}{\|y\|_2\|x\|_2},$$

donde $\sigma_{\max}$ es el mayor valor singular de A.

(b) $\|A(A^TA)^{-1}A^T\|_2 = 1$.

2. (a) Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ y $x \in \mathbb{R}^n$ la solución de norma mínima de $\|b - Ax\|_2 = \min_{w\in\mathbb{R}^n} \|b - Aw\|_2$. Probar que $x = A^\dagger b$, donde $A^\dagger$ es la pseudo-inversa de A.

(b) Sea $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m \geq n$ una matriz de rango completo. Sea $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz identidad de orden n. Si $A = \binom{I_n}{B}$, determinar $\|A\|_2$ en términos de $\|B\|_2$.

(c) Si $\kappa_2 = \|A\|_2\|A^\dagger\|_2$ es el número de condición para el problema de cuadrados mínimos, determinar κ_2 en términos de $\|B\|_2$ y $\|B^\dagger\|_2$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y tridiagonal.

(a) Escribir un algoritmo (pseudocódigo) eficiente para obtener la descomposición QR de A.

(b) Realizar el conteo operacional del algoritmo propuesto.

(c) ¿Cuál es la estructura de la matriz R obtenida en la descomposición?

(d) Mostrar que la matriz RQ recupera la estructura tridiagonal de A.

4. Resolver el sistema lineal $Ax = b$ usando el método iterativo $x^{n+1} = x^n - \omega(Ax^n - b)$, donde ω es un parámetro y A es simétrica y definida positiva cuyos autovalores λ_i satisfacen $0 < a \leq \lambda_i \leq b$. Hallar el parámetro ω óptimo.

5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz con autovalores λ y μ tal que $\lambda \neq \mu$ y sea $\rho \in \mathbb{C}$ diferente de cualquier autovalor de A.

(a) Si $\|\cdot\|$ es una norma matricial inducida probar que $\|A - \rho I\| \geq |\lambda - \rho|$.

(b) Probar que $\kappa(A-\rho I) \geq |\lambda-\rho|/|\mu-\rho|$ donde κ es el número de condición asociado a una norma matricial inducida.

6. (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva. Probar que el método de relajación SOR es convergente si $0 < \omega < 2$.

(b) Supongamos que $A = I + \sigma vv^T$, donde $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz identidad, $v \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma > 0$. Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, donde $b = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$. Dar $v, x_0 \in \mathbb{R}^n$, y σ tal que el método de Jacobi no converge aunque genera una sucesión acotada de aproximaciones sucesivas.

Marzo 2008

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificarlo.

(a) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad A \text{ es no singular.}$$

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, de rango completo y $b \in \mathbb{R}^m$, entonces el conjunto $\{x : \text{minimiza}\|Ax - b\|_2\}$ es de dimensión $n - m$.

(c) Existe L matriz triangular inferior con unos sobre la diagonal y U triangular superior tal que $A = LU$ donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

(d) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, invertible y que tiene una descomposición LU entonces todos los menores principales de A son no singulares.

2. Probar que cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m > n$, es el límite de una sucesión de matrices de rango completo.

3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

donde $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, es no singular. Sea $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, mostrar que después de k iteraciones del algoritmo LU, el bloque A_{22} ha sido reemplazado por S.

4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no singular.

(a) Enunciar el algoritmo QR para calcular los autovalores de A y dar un bosquejo de la demostración de convergencia.

(b) Demostrar que el algoritmo QR preserva la forma de una matriz de Hessenberg, donde la matriz de Hessenberg H queda definida de manera tal que $h_{i,j} = 0$, si $i - j > 1$.

5. (a) Enunciar el método del gradiente conjugado para resolver el sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$.

(b) Mostrar que el método del gradiente conjugado converge en un número finito de pasos.

6. Probar que existe una matriz de permutación P tal que si A es una matriz simétrica y semidefinida positiva ($x^tAx \geq 0 \ \ \forall x \neq 0$) entonces $P^tAP = RR^t$ donde

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Febrero 2005

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Mostrar que A tiene una factorización LU si y sólo si para cada k, $1 \leq k \leq n$, el menor principal de orden k es no singular.

(b) Supongamos que A es diagonalizable y los autovalores de $I - A$ satisfacen $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Sea x^* la solución de $Ax = b$, y dado x_0 se define $x_{k+1} = (I - A)x_k + b$ para $k = 0, 1, \ldots$. Probar que

(a) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{||x_{k+1} - x^*||}{||x_k - x^*||} = |\lambda_1|$.

(b) Si $|\lambda_1| < 1$ entonces $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

2. Para resolver el sistema $A^kx = b$, $k \in \mathbb{N}$ y A con estructura de banda, se proponen los siguientes algoritmos:

- se calcula A_k, se realiza la descomposición LU de A^k y por último se resuelven los dos sistema triangulares $Ly = b$ y $Ux = y$;
- se realiza la descomposición LU de A y se resuelven los sistemas $Ly_i = x_{i-1}$, $Ux_i = y_i$, $i = 1, \ldots, k$ donde $x_0 = b$.

Evaluando el costo computacional en función de n y k, determine cual de los dos métodos es el más barato si:

(a) no se aprovecha la estructura de la matriz;

(b) se aprovecha la estructura de la matriz.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Si $A(x + \delta x) = b + \delta b$, entonces $\dfrac{||\delta b||}{||b||} \leq \dfrac{||\delta x||}{||x||}$.

(b) $\rho(A) = \inf\limits_{||\cdot||} \{||A|| : ||\cdot|| \text{ norma matricial inducida}\}$.

4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no singular.

(a) Escribir un algoritmo QR para calcular los autovalores de A y demostrar que preserva la forma de una matriz de Hessenberg ($h_{i,j} = 0$, si $i - j > 1$) y que si la sucesión generada por el método converge, lo hace a una matriz que tiene los mismos autovalores de A.

(b) Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^t$, A definida positiva , considere el siguiente algoritmo:

- $A_0 = A$;

para $k = 1, \ldots, n$:

- $A_{k-1} = G_k G_k^t$ (Descomposición de Cholesky de A_{k-1});
- $A_k = G_k^t G_k$.

(i) Mostrar que el algoritmo está bien definido.

(ii) Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, con $a > c$ y autovalores de A, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$.

5. (a) Mostrar que un método de descenso converge en n pasos si las direcciones de descenso son A-conjugadas.

(b) Definir del método de gradiente conjugado y mostrar que las direcciones de descenso son A-conjugadas.

(c) La dirección de descenso (del ítem anterior) en la etapa $k+1$ se puede expresar en términos del residuo y la dirección de descenso de la etapa k.

Diciembre 2004

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible, b un vector no nulo y x la solución del sistema $Ax = b$. Dar una condición suficiente que permita mostrar que si $\bar{A}$ y $\bar{b}$ son suficientemente próximos (en términos del error relativo) a A y a b respectivamente, entonces:

(a) la matriz $\bar{A}$ es invertible;

(b) la única solución y del sistema $\bar{A}y = \bar{b}$ satisface una cota de la forma:

$$\frac{||x-y||}{||x||} \leq C\kappa(A),$$

donde C es una constante positiva (finita) y $\kappa(A)$ es el número de condición de A en la norma matricial inducida por $||\cdot||$. Encontrar un valor para C.

2. Decidir si la siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sea T una matriz triangular (inferior o superior) invertible entonces se cumple que:
el método de Gauss-Seidel acelerado converge en un número finito de pasos para cualquier elección de x_0 si y sólo si $\omega = 1$.

(b) $-4 + \mathrm{i}$ es autovalor de la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 1,0 & 0,2 & 0,8 & 0,6 \\ 0,4 & 1,0 & 1,2 & 1,0 & 0,4 & 1,4 \\ 0,6 & 0,6 & -0,6 & 0,6 & 0,6 & 1,2 \\ 0,8 & 0,8 & 0,2 & -0,4 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 & 1,0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 1,2 & 0,6 & 0,2 & 0,6 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

3. Sea A una matriz simétrica definida positiva.

(a) Mostrar que el método del gradiente conjugado converge en un número finito de pasos.

(b) Dar un algoritmo (en pseudo código) que implemente una versión del algoritmo de gradiente conjugado con la propiedad mencionada en el ítem anterior.

4. Sea A una matriz real simétrica,

(a) Mostrar que el método de Jacobi para calcular los autovalores de la matriz A converge.

(b) Dar un algoritmo (en pseudo código) que implemente el método de Jacobi.

5. Mostrar las siguientes afirmaciones sobre el método de eliminación gaussiana:

(a) Si se usa pivoteo parcial se cumple que

$$||U||_\infty \leq 2^{n-1}||A||_\infty.$$

(b) Si se usa pivote completo se cumple que

$$||U||_\infty \leq \sqrt{n\prod_{i=2}^{n} i^{\frac{1}{i-1}}}\,||A||_\infty,$$

donde n es la dimensión de la matriz.

(c) Si A es simétrica y definida positiva el pivoteo parcial no es necesario.

CAPÍTULO 5

Análisis funcional

Agosto 2004

1. (a) Pruebe que el valor principal definido para $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ por

$$\mathrm{pv}(\tfrac{1}{x})\phi(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

es una distribución.

(b) Pruebe que la funcional

$$\nu(\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{(k)}(\tfrac{1}{k})$$

define una distribución en $(0,\infty)$ que no se extiende a una distribución en $\mathbb{R}$.

2. Pruebe **UNO** de los resultados siguientes:

(a) Sea para $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot x}\,\mathrm{d}x.$$

Entonces, si $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ se tiene

$$\hat{f}(t) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f(t).$$

(b) La transformada de Fourier (ver (a)) define un isomorfismo continuo $\Lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3. Pruebe **UNO** de los resultados siguientes:

(a) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f}$ es continua y $\lim_{\|t\|\to\infty} \hat{f}(t) = 0$.

(b) Teorema de Plancherel: $\Lambda : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ es una isometría.

4. Responda **DOS** de los tres siguientes:

(a) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, con T_n compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces T es compacto.

(b) Dé condición necesaria y suficiente sobre $\{\lambda_n \in \mathbb{R}\}$ para que si $\{e_n\}$ es BON de $\mathcal{H}$ Hilbert y $T(\sum_n c_n e_n) := \sum_n c_n \lambda_n e_n$, con $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, entonces T sea compacto.

(c) Determine el espectro del operador

$$T : \mathcal{L}^2[0,1] \to \mathcal{L}^2[0,1], \qquad Tf(x) = xf(x).$$

Marzo 2001

1. Sea $0 < p < 1$. Sea $X = L^p[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 |f|^p < \infty\}$ con la topología generada por $d(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p$. Probar que X no tiene abiertos convexos distintos de X y de $\emptyset$. Describir X' (dual de X). [*Ayuda*: probar que si $B_r = \{f : d(f,0) < r\}$ la cápsula convexa de B_r es $L^p[0,1]$.]

2. (a) Sean X, Y espacios de Fréchet. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y, y sea $A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x)$, $\forall\, x \in X$. Probar que A es un operador continuo.

(b) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineal y simétrico: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, $\forall\, x, y \in \mathcal{H}$. Probar que A es continuo.

3. Si $g \in L^1_{\text{loc}}$, denotamos por $\mu_g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ la distribución dada por

$$\mu_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) g(x)\, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(a) Si $f_n \to 0$, a. e. $x \in \mathbb{R}$, ¿se cumple que $\mu_{f_n} \to 0$ en $\mathcal{D}^1(\mathbb{R})$?

(b) Sea $\Lambda\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \ln|x|\, \mathrm{d}x$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Probar que $\Lambda \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ y que

$$\Lambda'\phi = \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x})\phi = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x.$$

4. (a) Sea

$$Tf(x) = \int_0^1 \kappa(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y \qquad \forall\, f \in L^2[0,1],$$

donde $\kappa(x,y) \in L^2([0,1]\times[0,1])$. Probar que T es un operador compacto. [*Ayuda*: Calcular Tf para el caso $\kappa(x,y) = \chi_{[a,b]}(x)\chi_{[c,d]}(y)$.]

(b) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Probar que si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacto entonces $\sigma(T) = \{\lambda \mid (T - \lambda I) \text{ no es invertible}\} \neq \emptyset$.

CAPÍTULO 6

Variedades diferenciables

Agosto 2009

Todas las variedades consideradas son N_2.

1. Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^∞, sea $M = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0 = g(x)\}$. Supongamos que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 para todo $x \in M$.

(a) Exhibir una estructura diferenciable en M tal que M resulte subvariedad embebida de $\mathbb{R}^n$.

(b) Probar que T_pM se identifica con $\{\nabla f(p), \nabla g(p)\}^\perp$, donde ∇ denota el gradiente.

(c) Demostrar que M es orientable.

2. (a) Dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ con grupos monoparamétricos locales $\{\theta_t^1\}$, $\{\theta_t^2\}$, respectivamente, demostrar que $[X_1, X_2] = 0$ si y sólo si $\theta_t^1\,\theta_s^2 = \theta_s^2\,\theta_t^1$ para todo t, s donde estén definidos ambos miembros.

(b) Dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ linealmente independientes en cada punto de M tales que $[X_1, X_2] = 0$, demostrar que para cada $p \in M$ existe un sistema de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ en p tal que $\frac{\partial}{\partial x_1} = X_1|_U$, $\frac{\partial}{\partial x_2} = X_2|_U$.

3. Sea $\pi : M^m \to N^n$ una submersión.

(a) Demostrar que π es abierta.

(b) Demostrar que para todo p en M existe U entorno de $q = \pi(p)$ en N y $\sigma : U \to M$ C^∞ tal que $\sigma(q) = p$ y $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$.

(c) Si P es una variedad arbitraria y π es suryectiva, demostrar que $f : N \to P$ es C^∞ si y sólo si $f \circ \pi$ es C^∞.

(d) Demostrar que la distribución $\mathcal{D}$ en M definida por $\mathcal{D}_p = \mathrm{Ker}(d\pi)_p$, $p \in M$, es C^∞. ¿Es $\mathcal{D}$ involutiva? Justificar.

4. Sean $\mathrm{U}(2) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I\}$, $S^3 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S^3$.

(a) Demostrar que $\mathrm{U}(2)$ tiene una estructura diferenciable tal que resulta subvariedad embebida de $\mathbb{C}^4$ y que con dicha estructura es un grupo de Lie. ¿Cuál es su dimensión?

(b) Demostrar, sin usar sistemas de coordenadas en $\mathrm{U}(2)$ ni S^3, que $\phi : \mathrm{U}(2) \to S^3$, $\phi(A) = A\,e_2$, es C^∞.

(c) Demostrar que ϕ induce un difeomorfismo $\tilde{\phi} : \mathrm{U}(2)/S^1 \to S^3$, donde $\mathrm{U}(2)/S^1$ tiene la estructura diferenciable de variedad homogénea.

5. Indicar en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Existe una 2-forma diferencial θ en $\mathrm{SO}(3)$ tal que $d\theta$ es nunca nula.

(b) Sean $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ tales que V_p, W_p son linealmente independientes para cada $p \in \mathbb{R}^3$. Entonces existe una subvariedad M de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ tal que $(0,0,0) \in M$ y V_p, W_p genera T_pM para todo $p \in M$.

(c) El campo $X = x\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial w}$ en $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$ es tangente a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

Marzo 2009

1. Sea $\mathbb{R}^4$ con el sistema de coordenadas usual, $\mathrm{Id} = (x, y, z, t)$.

(a) Si $\iota : S^3(r) \to \mathbb{R}^4$ es la inclusión de la esfera de centro 0 y radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^4$, expresar el espacio tangente a la esfera $T_{(x,y,z,t)}S^3(r)$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

(b) Dados los campos de vectores en $\mathbf{R}^4$ definidos por

$$\begin{aligned} X &= t\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial t} \\ Y &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t} \\ Z &= -z\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Probar que X, Y, Z son campos de vectores diferenciables en $S^3(r)$ y definen una base de $T_{(x,y,z,t)}S^3(r)$ en cada punto (x, y, z, t). Justificar.

(c) Sea $\mathfrak{D}$ la distribución definida en $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ por

$$\mathfrak{D}(x, y, z, t) = \mathrm{span}\{X, Y, Z\}(x, y, z, t).$$

¿Es $\mathfrak{D}$ una distribución diferenciable e involutiva en $\mathbb{R}^4 - \{0\}$? ¿Cuál es la variedad integral maximal conexa asociada a $\mathfrak{D}$ por cada punto?

(d) Encontrar una 1-forma diferencial ω en $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ con la propiedad que en cada (x, y, z, t) se cumple

$$\omega(\zeta) = 0 \iff \zeta \in T_{(x,y,z,t)}S^3(r).$$

2. Sea $M(3, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices 3×3 con coeficientes reales y definimos

$$N = \{A \in M(3, \mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

(a) Exhibir una estructura diferenciable sobre N tal que es una subvariedad embebida de $\mathbb{R}^9$ y dar la dimensión.

(b) Identificar el conjunto de matrices del espacio tangente $T_{\mathrm{Id}}N$ de N en Id, la matriz identidad.

3. Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión n.

(a) Dar al estructura de variedad diferenciable de TM, el fibrado tangente de M.

(b) Probar que TM es una variedad orientable.

4. Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to M$ un difeomorfismo.

(a) Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene grupo local monoparamétrico asociado $\{\varphi_t : t \sim 0\}$, entonces el campo vectorial $\mathrm{d}f \circ X \circ f^{-1}$ tiene grupo local asociado $f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$.

(b) $\mathrm{d}f \circ X \circ f^{-1} = X$ si y sólo si $\varphi_t \circ f = f \circ \varphi_t$.

(c) Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tienen grupos locales monoparamétricos asociados $\{\varphi_t\}$ y $\{\psi_t\}$ respectivamente, se cumple:

$$[X, Y] = 0 \iff \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \text{ para todo } t, s \sim 0.$$

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en el origen y satisface $f(tx) = tf(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces f es una transformación lineal.

(b) Existe $f : P^2 \to T^2$ función diferenciable, inyectiva con derivada inyectiva en todo punto.

(c) Todo grupo de Lie conexo es orientable.

Agosto 2008

Todas las variedades consideradas son N_2.

1. Sean $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ y $\mathcal{P}$ el subconjunto de $S_n(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas definidas positivas. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $(S_n(\mathbb{R}), \iota)$ es un embedding en $M_n(\mathbb{R})$ con imagen cerrada. Exhibir una función $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ C^∞ tal que $\varphi \circ \iota = \mathrm{id}_{S_n(\mathbb{R})}$.

(b) $\mathcal{P}$ es abierto en $S_n(\mathbb{R})$ y $f_k : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definida por $f_k(A) = A^k$ es un difeomorfismo para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. **Sugerencia**: Dada $A \in \mathcal{P}$ con autovalores $a_1, \ldots, a_n$, demostrar por inducción en k que si $X_{ij} = E_{ij} + E_{ji} \in S_n(\mathbb{R})$, $i < j$, entonces $(df_k)_A X_{ij} = p_{k-1}(a_i, a_j) X_{ij}$, donde p_{k-1} es un polinomio homogéneo de grado $k-1$ en dos variables con coeficientes positivos.

2. (a) Si $f : M \to N$ es una inmersión y X es un campo C^∞ en M, demostrar que para todo p en M existe un entorno U de p y un campo $\tilde{X}$ C^∞ en N tal que $(df)_q X_q = \tilde{X}_{f(q)}$ para todo q en U.

(b) Si $f : M \to N$ es un embedding tal que $f(M)$ es cerrado en N y X es un campo C^∞ en M, demostrar que existe un campo $\tilde{X}$ C^∞ en N tal que X y $\tilde{X}$ están f-relacionados.

3. Considerar en $M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ la distribución $\mathcal{D}$ generada por los campos X y Z definidos por

$$X(x,y,z) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},$$
$$Z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Demostrar que el cilindro $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$, con la estructura diferenciable usual, es una subvariedad integral conexa *maximal* de $\mathcal{D}$.

4. Sean M conexa y orientable, ω una forma de volumen en M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo. Si $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ denota el grupo monoparamétrico asociado a X, demostrar que

$$\theta_t \text{ preserva } \omega \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_X \omega = 0.$$

5. Dados dos grupos de Lie G y H, demostrar que si $f : G \to H$ es un homomorfismo *continuo*, entonces f es C^∞.

6. Indicar en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Existe una inmersión $f : \mathrm{SO}(n) \to \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

(b) Todo grupo de Lie es orientable.

(c) Si V es un campo diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que $V \equiv 0$ en el complemento de un subconjunto acotado, entonces $\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}(V) = 0$.

(d) Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisface $X_p = 0$ y $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ es una aplicación $C^\infty(M)$-bilineal, entonces $\omega(X,Y)(p) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Marzo 2008

1. Sean M^m y N^n variedades diferenciables y sea $f : M^m \to N^n$ una inmersión.

(a) Dar la forma local de la inmersión f: esto es, probar que para cada $p \in M$ existen sistemas de coordenadas (U, φ) y (V, ψ) de p y $f(p)$, respectivamente, tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ es la inmersión usual

$$(u_1, u_2, ..., u_m) \to (u_1, u_2, ..., u_m, 0, ..., 0).$$

(b) Si $X \in C^\infty(U, TN)$ es un campo a lo largo de f entonces puede extenderse a un campo $\overline{X} \in \mathfrak{X}(V)$ tal que $\overline{X} \circ f = X$ sobre U.

2. Sea M una variedad diferenciable compacta N_2 y sea $f : M^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que 0 es un valor regular de f. Sea $L = f^{-1}(0)$. Probar que;

(a) L puede ser cubierto por sistemas de coordenadas en M de la forma $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ con $x_1 = f$;

(b) existe un entorno abierto V de L en M y un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$ tal que $\mathrm{d}f(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$;

(c) mostrar que existe $\varepsilon > 0$ y un difeomorfismo sobre un entorno abierto de L en M; esto es $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times L \to f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$, con la propiedad $f(\phi(t,p)) = t$ para todo $p \in L$ y $|t| < \varepsilon$ (tener en cuenta el flujo local asociado a X).

3. Sea M^n una variedad compacta orientable y orientada y sea θ una $(n-1)$-forma diferencial sobre M.

(a) Probar usando la definición de integral (no deducir de Stokes) que $\int_M \mathrm{d}\theta = 0$.

(b) Mostrar que para cualquier $(n-1)$-forma diferencial sobre M se cumple que $\mathrm{d}\theta$ se anula en algún punto de M.

(c) Probar que existen n-formas en M que no son exactas.

4. Justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de números complejos munido de la relación de equivalencia $z \sim \mathrm{e}^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{3}} z$, $k = 0, 1, 2$. El espacio cociente $M = \mathbb{C}/\sim$ posee una estructura diferenciable de dim 2 pero no posee ninguna estructura diferenciable con la propiedad que la proyección canónica $\pi : \mathbb{C} \to M$ sea un difeomorfismo local.

(b) Todo grupo de Lie G conexo es orientable.

(c) Existe $f : S^n \to S^1$ con $n > 1$ diferenciable e inyectiva.

Marzo 2006

1. Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una inmersión.

(a) Demostrar que si $\dim M = \dim N$ y f es biyectiva, entonces f es un difeomorfismo.

(b) Demostrar que si M es N_2 y f es biyectiva, entonces f es un difeomorfismo. *Sugerencia*: usar el Teorema de Baire y la forma local de una inmersión.

TEOREMA DE BAIRE: Si X es un espacio topológico localmente compacto, entonces X no es unión numerable de conjuntos nunca densos.

2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar todas las respuestas.

(a) Si M^n es compacta y orientable, toda n-forma sobre M es exacta.

(b) Si γ es un subgrupo monoparamétrico de un grupo de Lie G y γ se autointerseca, entonces existe $P > 0$ tal que $\gamma(t+P) = \gamma(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3. Sea $f : M^m \to N^n$ una submersión. Demostrar que existe una distribución C^∞ e involutiva de dimensión $m-n$ sobre M cuyas variedades integrales conexas maximales son las componentes conexas de $f^{-1}(q),\ q \in f(M)$.

4. Dada una inmersión $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, demostrar que M es orientable si y sólo si existe un campo normal continuo nunca nulo a lo largo de (M, f).

5. (a) Sean TM el fibrado tangente a la variedad diferenciable M y T_pM el espacio tangente a M en $p \in M$. Demostrar que la inclusión $\iota : T_pM \hookrightarrow TM$ es un embedding.

(b) Dado un grupo de Lie G y $H \subset G$ un subgrupo cerrado, demostrar que si ω es una k-forma G-invariante en G/H, entonces ω es C^∞.
Recordar que ω se dice G-invariante si $\tau(g)^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$, donde

$$\begin{aligned} \tau(g) : G/H &\to G/H, \\ \tilde{g}\,H &\mapsto g\,\tilde{g}\,H. \end{aligned}$$

Julio 2003

1. Sea C el cilindro $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ con la estructura diferenciable obtenida por el Teorema de la Función Implícita, y sea $f : S = (-\pi, 2\pi) \to C$ definida por $f(t) = \left(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2\right)$.

(a) Probar que (S, f) es una subvariedad de C, sin recurrir a sistemas coordenados de C.

(b) Dibujar la imagen de S y probar que no es incrustada (sugerencia: usar sucesiones).

2. Sea $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 = \operatorname{sen} x\right\}$.

(a) Probar que existe una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ en M tal que la inclusión es una incrustación (sugerencia: Teorema de la Función Implícita).

(b) Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección $p(x, y) = x$. Mostrar que existe una (única) estructura diferenciable $\mathcal{F}'$ en M de la cual $(M, p|_M)$ es un sistema coordenado.

(c) ¿Es $h : \mathbb{R} \to (M, \mathcal{F})$, $h(t) = (t, \sqrt[3]{\operatorname{sen} t})$ diferenciable? Ídem con $\mathcal{F}'$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$. Se define en $\mathbb{R}^3$ la distribución $\mathcal{D}$ por

$$\mathcal{D}(x, y, z) = \operatorname{span}\left\{e_1 + f'(x)(\operatorname{sen} y)\, e_3, e_2 + f(x)(\cos y)\, e_3\right\}$$

(identificamos $T_p\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^3$ para cada p, de la manera usual). Mostrar que $\mathcal{D}$ es involutiva y hallar una subvariedad integral $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ para $\mathcal{D}$ tal que $\phi(0, 0) = (0, 0, 0)$.

4. Considerar la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ dada por

$$(x, y) \sim \left(x + k, (-1)^k y\right) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

El cociente M admite una única estructura diferenciable tal que la proyección canónica π es un difeomorfismo local. M es la cinta de Möbius.

(a) Mostrar que $X_{\pi(p)} = \mathrm{d}\pi_p \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$ define un campo diferenciable en M.

(b) Hallar las curvas integrales γ_y de X con $\gamma_y(0) = \pi(0, y)$ $(-1 < y < 1)$.

(c) Mostrar que las γ_y son periódicas ¿Tienen todas el mismo período?

5. Sean M una variedad diferenciable y $F : M \to M$ un difeomorfismo. Sea X un campo completo en M con grupo monoparamétrico τ_t. Probar que $\mathrm{d}F_p(X_p) = X_{F(p)}$ para todo $p \in M$ si y sólo si F conmuta con cada τ_t, es decir, $\tau_t = F \circ \tau_t \circ F^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (sugerencia: unicidad de las curvas integrales).

6. Un elemento α de $\Lambda^p(V^*)$ se dice descomponible si existen $\theta_1, \ldots, \theta_p \in V^*$ tales que $\alpha = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_p$ $(\dim V = n)$.

(a) Mostrar que si α es descomponible, entonces $\alpha \wedge \alpha = 0$.

(b) Mostrar que $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ no es descomponible $(V = \mathbb{R}^4)$.

(c) Suponer que V tiene dimensión n y sea ω una función n-lineal alternante no nula en V. Probar que la aplicación $F : V \to \Lambda^{n-1}(V^*)$ definida por $F(v) = \iota_v \omega = \omega(\cdot, \ldots, v)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(d) Si $\dim V = n$, entonces toda $\alpha \in \Lambda^{n-1}(V^*)$ es descomponible.

7. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $\widetilde{\mathfrak{h}}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Probar que existe un subgrupo de Lie conexo (H, ϕ) de G, con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, tal que $\mathrm{d}\phi(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$.

Marzo 2003

1. Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una función diferenciable. Mostrar que $F : M \to M \times N$ definida por $F(p) = (p, f(p))$ es una subvariedad incrustada.

2. En $\mathbb{R}^2$ definimos los campos U y V por

$$U(x,y) = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$V(x,y) = \mathrm{e}^x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Mostrar que no existe un sistema coordenado $\phi = (u, v)$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial u} = U \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial v} = V.$$

3. Mostrar que si $X_1, \ldots, X_n$ son campos diferenciables en M tales que para todo $p \in M$ $\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$ es una base de T_pM, entonces M es orientable.

4. Sea $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(t, (x, y)) = \left(\mathrm{e}^{2t}x, \mathrm{e}^{3t}y\right)$. Encontrar un campo V en $\mathbb{R}^2$ tal que ϕ es el grupo monoparamétrico de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ asociado a V.

5. Sea θ una 1-forma diferenciable nunca nula en una variedad M y sea $\mathcal{D}$ la distribución en M definida por $\mathcal{D}(p) = \mathrm{Ker}\,(\theta(p))$.

(a) Mostrar que $\mathcal{D}$ es diferenciable.

(b) Mostrar que si $\mathrm{d}\theta = 0$, entonces $\mathcal{D}$ es involutiva.

6. Mostrar que para el grupo de Lie $\mathrm{SO}(3)$ la exponencial no es inyectiva.

7. Sean M una variedad compacta de dimensión n y sea ω una n-forma nunca nula en M. Definir con precisión el volumen de M respecto de ω, es decir $\int_M \omega$. Probar que la definición es buena, si es necesario.

8. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $\widetilde{\mathfrak{h}}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Probar que existe un subgrupo de Lie conexo (H, ϕ) de G, con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, tal que $\mathrm{d}\phi(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$.

9. Sea (M, ϕ) una subvariedad de una variedad M y sean X, Y campos en M y N respectivamente tales que $d\phi \circ X = Y \circ \phi$. Si Y es completo, ¿lo es también X?

Marzo 1996

M y N denotan variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente.

1. Sea (M, ι) una subvariedad de N, donde ι es la inclusión, y sea $f \in C^\infty(M)$. Mostrar que para todo $p \in M$ existen entornos abiertos U y V de p e $\iota(p)$ respectivamente, con $U \subset V$, y una función $g \in C^\infty(V)$ tales que $g \circ \iota = f$ en V.

2. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una curva regular tal que $\gamma(s) = \gamma(t)$ si y sólo si $s - t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Sea I el intervalo $(0, 2\pi)$, y sea $f : N \to M$ una función de clase C^∞ cuya imagen está contenida en $\gamma(I)$. Probar que $(\gamma|_I)^{-1} \circ f : N \to I$ es de clase C^∞.

3. Sea G un grupo de Lie y sean X, X' campos invariantes a izquierda, Y, Y' campos invariantes a derecha, tales que $X_e = Y_e$ y $X'_e = Y'_e$. Mostrar que si $[X, X'] = 0$, entonces $[Y, Y'] = 0$ (sugerencia: considerar la función $g \longmapsto g^{-1}$).

4. Decir en cada caso si es verdadero o falso. Justificar.

(a) En todo abierto simplemente conexo U de $\mathbb{R}^2$ existe una 1-forma en U que no es cerrada.

(b) En un grupo de Lie de dimensión n existe un sistema de coordenadas $(U, \phi = (x_1, \dots, x_n))$ alrededor de la identidad, tal que los campos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ son invariantes a izquierda.

(c) Sea $\mathfrak{g}$ el ágebra de Lie de $\mathrm{SO}(3)$. Entonces $\exp : g \to \mathrm{SO}(3)$ es inyectiva.

5. Sea X un campo completo en M y sea $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ el flujo asociado. Sea N una subvariedad incluida en M tal que $F := \phi|_{\mathbb{R} \times N} : \mathbb{R} \times N \to M$ es un difeomorfismo. Sea ω una m-forma nunca nula en M invariante por el flujo (es decir $\phi_t^* \omega = \omega$ para todo t). Sea θ la $(m-1)$-forma $\theta = \iota_X \omega$ en N (o sea $\theta(Y_1, \dots, Y_{m-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{m-1})$).

(a) Mostrar que N es orientable.

(b) Probar que existe una constante c tal que

$$F^* \omega = c\,(\pi_1^*\, \mathrm{d}t \wedge \pi_2^* \theta),$$

donde π_1, π_2 denotan las proyecciones canónicas de $\mathbb{R} \times N$ sobre sus factores.

6. Considerar en $M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ la distribución $\mathcal{D}$ generada por los campos X y Z definidos por

$$X(x,y,z) = -y\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial y},$$
$$Z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Probar que el cilindro $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$, con la estructura diferenciable usual, es una subvariedad integral conexa *maximal* para $\mathcal{D}$.

CAPÍTULO 7

Topología algebraica

Diciembre 2008

1. Sea X la unión de la esfera unidad de dimensión 3 y un segmento que une el polo norte y el polo sur. Determinar $\pi_1(X)$.

2. Dar un espacio topológico X cuya homología entera es:

$$H_q(X) = \begin{cases} Z & \text{si } q = 0, 2, \\ Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_5 & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{si } q > 2. \end{cases}$$

3. Probar que :

(a) $\mathrm{SO}(n)$ es conexo por curvas, $n \geq 1$.

(b) Si $r : S^n \to S^n$ es la restricción de una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$ con determinante 1 entonces r es homotópica a la identidad.

4. Sea X espacio topológico. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\gamma_{x_0} : \Delta_1 \to X$ donde $\gamma_{x_0}(t) = x_0$, es una frontera.

(b) Si $\gamma : \Delta_1 \to X$ es una función continua entonces $\gamma + \gamma^{-1}$, es una frontera.

(c) Si $\gamma, \tau : \Delta_1 \to X$ son funciones continuas tal que $\gamma(1) = \tau(0)$ entonces $\gamma.\tau - \gamma - \tau$ es una frontera. La concatenación $\gamma.\tau$ está dada por :

$$\gamma.\tau(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tau(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(d) Si $\gamma, \tau : \Delta_1 \to X$ son funciones continuas tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ y $\tau(0) = \tau(1) = x_0$, entonces γ homotópica a τ ($[\gamma] = [\tau]$) $\Rightarrow \gamma$ homóloga a $\tau([\gamma]_H = [\tau]_H)$.

(e) Si X es conexo por arcos la correspondencia $[\gamma] \to [\gamma]_H$ induce un isomorfismo entre

$$\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \quad \text{y} \quad H_1(X, Z).$$

Marzo 2001

1. Sea $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \sharp K$ donde K es la Botella de Klein. Calcular $H_q(X,\mathbb{Z})$, $H^q(X,\mathbb{Z})$ $\forall\, q \geq 0$ y $\pi_1(X)$.

2. Probar que toda variedad topológica compacta puede ser embebida en un espacio euclídeo.

3. (a) Probar que toda variedad conexa no orientable tiene un cubrimiento conexo duplo orientable.

(b) ¿Es toda variedad orientable el cubrimiento duplo orientable de una variedad no orientable?

(c) Dar el cubrimiento duplo orientable del espacio X del Ejercicio 1.

4. Decidir si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta.

(a) La identidad $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$ se extiende a una función continua $f : S^2 \to S^1$ ($S^1 \subset S^2$ como el ecuador).

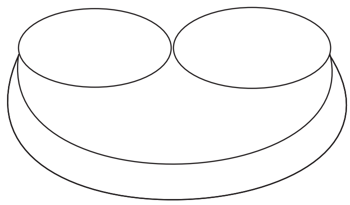
(b) Existe estructura de CW-complejo en $S^2 \times S^4$ con una celda en cada dimensión ≤ 6.

(c) $\pi_n(G_r) = 0, \ \ \forall\, n \geq 2 \ \text{ y } \ \forall\, r \geq 1$. ($G_r$ es el grafo $\bigvee_{i=1}^{r} S^1$).

(d) $\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^4) = \pi_n(\mathbb{C}\mathrm{P}^3)$, $\forall\, n \geq 2$.

Agosto 2000

1. Sea

$Y =$  $\subset S^2.$

Calcule $\widetilde{H}_i(S^2 - Y) \quad i \geq 0$.

2. Sea (X, A) espacio topológico. Pruebe que si $n \geq 0$,

$$H^n(X, A; \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(H_n(X, A), \mathbb{R}).$$

3. Decir si es verdadero o falso y justificar.

(a) Toda función continua $f : S^2 \to T^2$ es homotópica a una constante.

(b) Si M^3 es una variedad compacta orientada y simplemente conexa entonces M tiene la homología entera de S^3.

(c) Si $p : Y \to X$ es un cubrimiento con Y arco conexo y tal que $p^{-1}(x)$ no es un único punto entonces existe $f : X \to Y$ continua satisfaciendo $p \circ f = \mathrm{id}_X$.

4. Considere en $\mathbb{R}^2$ la 1-forma $\omega = x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$. Sea $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ la inclusión canónica y sea $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $\pi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

(a) Muestre que $\pi^*\iota^*\omega = \mathrm{d}t$ y que $\iota^*\omega$ es 1-forma cerrada en S^1.

(b) Muestre que existe una función f definida en un entorno de $(1,0)$ en S^1, tal que $\mathrm{d}f = \iota^*\omega$. Mostrar que una tal f no puede estar definida en todo S^1.

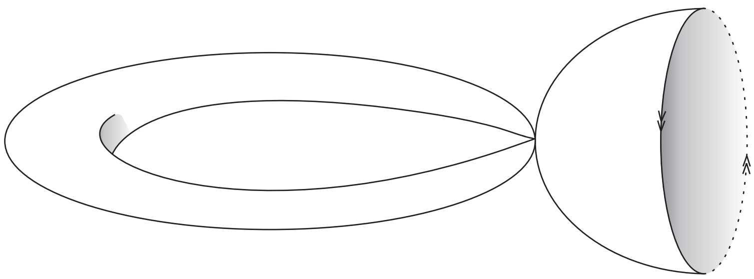
5. Si X es un CW finito y $X_n \subset X$ es el n-esqueleto pruebe que

$$H_i(X_n, X_{n-1}) = 0 \qquad i \neq n;$$

$$H_n(X_n, X_{n-1}) \quad \text{es el grupo abeliano libre de } n \text{ generadores.}$$

Junio 1996

1. Calcular las homologías y cohomologías singulares con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y el grupo fundamental del espacio topológico $(T^2/\sim) \vee \mathbb{R}\mathrm{P}^2$; donde la relación de equivalencia en el toro es la que identifica los puntos de una S^1 (es el toro "estrangulado").



2. Calcular $H^q(T^n;\mathbb{R})$ y $\pi_m(T^n)$, para todo $q \geq 0$ y $m \geq 1$.

3. Probar que dados k y n enteros positivos, existe $f : S^n \longrightarrow S^n$ tal que $\operatorname{gr} f = k$.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar las respuestas. *(De las últimas cuatro, elegir tres.)*

(a) De los siguientes espacios topológicos, dos y sólo dos, admiten estructura de grupo topológico:

$$D^n; \quad (D^n)^0; \quad S^1 \vee S^1; \quad \mathbb{R}\mathrm{P}^2.$$

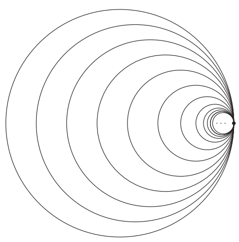
(b) $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ continua e inyectiva $\Longrightarrow f \sim$ constante.

(c) S^1 es retracto de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

(d) Dados U y V subconjuntos homeomorfos en S^n, si U es abierto en S^n entonces V es abierto en S^n.

(e) $\pi_1(X, x_0)$ es numerable, donde

$$X = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} S^1_n =$$



x_0.

5. Enunciar y demostrar el “Criterio de Relevamiento de funciones”.

CAPÍTULO 8

Estadística

Agosto 2009

1. (18 puntos) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tal que, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, $X_i \sim U(-\theta, \theta)$, con $\theta > 0$.

(a) Encuentre un estadístico suficiente y minimal para θ.

(b) Pruebe que el estadístico hallado en (a) es completo.

(c) Encuentre el estimador máximo verosímil de θ^2.

2. (16 puntos) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución de Poisson con parámetro λ desconocido ($\lambda > 0$). Para estimar $q(\lambda) = e^{-\lambda}$, considere inicialmente el estimador insesgado $T = r(X_1, X_2, ..., X_n) = I_{(X_1=0)}$.

(a) Calcule la cota de Rao-Cramer para estimar $q(\lambda)$.

(b) Demuestre que $U = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ es suficiente y completo para estimar λ.

(c) Calcule $W = E_\lambda(T/U = u)$ ("Rao-Blackwelización de T basada en U").

(d) ¿Es W insesgado? ¿Es W IMVU? ¿Alcanza la Cota de Rao-Cramer? Justifique sus respuestas.

3. (15 puntos) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tal que, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, con μ y σ^2 desconocidos. Se desea hacer inferencia sobre θ, donde:

$$\theta = \ln[E(e^{X_1})].$$

(a) Exprese θ en términos de μ y σ^2.

(b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(c) Determine un estimador insesgado para θ.

4. (20 puntos) ¿Verdadero o Falso?. Justifique sus respuestas

(a) Sea X una Variable aleatoria, tal que $X \sim U(-1, 1)$. Para todo $n \in N$ se define

$$X_n = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq (1 - \frac{1}{n}), \\ n & \text{si } |X| > (1 - \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Entonces X_n converge en distribución a X.

(b) Si $\{r_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)\}_{n\in N}$ es una sucesión de estimadores de $q(\theta)$, tal que:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Var}_\theta(r_n(X_1, X_2, .., X_n) = 0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} E_\theta(r_n(X_1, X_2, .., X_n) = q(\theta)$.

Entonces $\{r_n(X_1, X_2, ..., X_n)\}_{n\in N}$ es débilmente consistente para estimar $q(\theta)$.

5. (17 puntos) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución exponencial con parámetro $\theta = \frac{1}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$.

(a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(b) Construya un intervalo de confianza del $(1 - \alpha)100\%$ para λ, basándose en el hecho que:

$$\sqrt{n}(\lambda_{MV} - \lambda) \longrightarrow N(0, \lambda^2)$$

donde λ_{MV} es el estimador de máxima verosimilitud de λ. **Ayuda:** Aplique el método Delta.

(c) El intervalo hallado en (b) es exacto o asintótico? Justifique su respuesta.

6. (15 puntos) Enuncie y demuestre el teorema de Lehmann-Scheffé.

CAPÍTULO 9

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Agosto 2009

1. Sea $U \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y estrictamente creciente, y sean $u, v \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta u + f(u) \geq -\Delta v + f(v) & \text{en } U, \\ u \geq v & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Probar que entonces $u \geq v$ en U. Mostrar que si además U es conexo y se da la última igualdad en un punto de U, entonces $u \equiv v$.

2. Sea $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Resolver, reduciendo el problema a una ecuación de ondas unidimensional, el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z), \quad u_t(x,y,z,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

3. Sean $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y de soporte compacto, sea u solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x) & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

y sean $k(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x$ y $p(t) = \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x$. Probar que $k(t) + p(t)$ es constante para todo t.

4. Sea k un número positivo. Resolver con el método de separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0 & \text{en } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \qquad (k > 0), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x) & \text{en } x \in (0,\pi). \end{cases}$$

5. Sea, para $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Decidir para cuales $p \geq 1$ vale que $u \in W^{1,p}(B)$.

6. ¿Verdadero o falso? Justificar.

(a) (0.5 puntos) El siguiente problema de Neumann no tiene solución:

$$\begin{cases} \Delta u = 1 - u^2 & \text{en } B(0,2) \subset \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 & \text{en } \partial B(0,2). \end{cases}$$

(b) (0.5 puntos) Existe una función u armónica y no negativa en $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $u(1/n, 0) = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) (0.5 puntos) Sean $a \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$. Sea u continua en $\overline{B(a,r)} - \{a\}$, armónica en $B(a,r) - \{a\}$ y tal que

$$\max_{\overline{B(a,r)}} u = \max_{\partial B(a,r)} u.$$

Entonces u es constante.

CAPÍTULO 10

Álgebra universal y teoría de reticulados

Agosto 2009

1. Caracterice de la forma más sencilla posible las congruencias de:

(a) $(\mathbb{R}, \min, \max)$.

(b) $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ (un grupo).

(c) $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$.

2. Demuestre el Teorema de Birkhoff: Toda álgebra A es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles (todas ellas imágenes homomórficas de A).

3. Probar que $(Con(A), \subseteq)$ es un subreticulado completo del reticulado de relaciones de equivalencias de A.

4. Sea L un reticulado distributivo acotado pseudcomplementado. Probar:

(a) $z \wedge x = 0 \Longrightarrow z \wedge x^{**} = 0$.

(b) $(z \vee x)^* = z^* \wedge x^*$.

(c) $(z \wedge x)^{**} = z^{**} \wedge x^{**}$.

5. Pruebe que si C es un operador clausura algebraico entonces el poset de conjuntos cerrados de C es un reticulado algebraico, cuyos compactos son los conjuntos finitamente generados.

6. (a) Probar que toda álgebra de Boole finita es atómica.

(b) Probar que si B, B' son álgebras de Boole finitas y f es un homomorfismo de B en B' entonces para todo a' átomo de B' se tiene que $f^{-1}([a'))$ es de la forma $[a)$, para algún átomo a de B.

(c) Probar que toda álgebra de Boole atómica y completa es de la forma $\mathcal{P}(X)$, para algún X.

Diciembre 2007

1. Sea B un álgebra de Boole, y sea B' una subálgebra de B. Probar que todo $h' \in \mathrm{Hom}(B', \mathbf{2})$ se extiende a un $h \in \mathrm{Hom}(B, \mathbf{2})$.

2. Caracterice de la forma más simple posible las siguientes congruencias:

(a) $\theta \in \mathrm{Con}(R, +, \cdot, -, 0)$, donde $(R, +, \cdot, -, 0)$ es un anillo,

(b) $\theta \in \mathrm{Con}(B, \wedge, \vee)$, donde B es un álgebra de Boole.

(c) $\theta(a, b)$ en un anillo con unidad (pensar en qué forma tiene el ideal más chico generado por un elemento dado e)

(d) $\theta(a, b)$ en un reticulado distributivo.

3. Sea L una p-álgebra. Pruebe:

(a) Para todo a tal que $a \vee a^* = 1$ se tiene $\theta_{\mathrm{lat}}(0, a^*) \in \mathrm{Con}(L)$.

(b) $\gamma^L = \Delta^L$ sii L es álgebra de Boole sii $D(L) = 1$.

(c) Si L es finitamente subdirectamente irreducible entonces L tiene a lo sumo dos elementos densos.

(d) Si $D(L)$ es la cadena de 2 elementos $d \leq 1$, entonces para todo cerrado a se tiene $a \leq d$ o $a^* \leq d$.

(e) Si L es finitamente subdirectamente irreducible con más de 2 elementos, entonces $L = B \oplus 1$, para algún álgebra de Boole B.

4. (a) Sea K una clase de álgebras de un tipo fijo. Defina qué significa que $\mathbf{U}(X)$, un álgebra del mismo tipo generada por X, tenga la *universal mapping property* (UMP) sobre K con conjunto de generadores libres X.

(b) Pruebe que si $\mathbf{U_1}(X_1), \mathbf{U_2}(X_2)$ son dos álgebras de K con la UMP sobre K con sus respectivos conjuntos de generadores libres, entonces $\mathbf{U_1}(X_1) \cong \mathbf{U}(X_2)$.

(c) Supongamos que $X \neq \emptyset$. Pruebe que si $K \neq \emptyset$ entonces existe un álgebra que posee la UMP sobre K con conjunto de generadores libres $\overline{X}$ (con $|\overline{X}| = |X|$) que vive en $\mathrm{ISP}(K)$.

5. Sea B un álgebra de Boole, y suponga que el filtro $[x)$ se escribe de manera única como intersección de ultrafiltros. Pruebe que x es supremo de átomos.

Marzo 2006

1. (a) Sea U un ultrafiltro de un álgebra de Boole B. Pruebe que $\wedge U$ existe, y es 0 o es un átomo.

(b) Sea I un conjunto infinito. Pruebe que en el álgebra de Boole de los subconjuntos finitos y cofinitos de I existe un sólo ultrafiltro no principal.

2. (a) θ, θ^* forman un par de congruencias factor en el álgebra A si $\theta \cap \theta^* = \Delta$, $\theta \vee \theta^* = \nabla$ y θ, θ^* permutan. Pruebe que θ, θ^* forman un par de congruencias factor sii $\theta \cap \theta^* = \Delta$ y $\theta \circ \theta^* = \nabla$.

(b) Pruebe que si A tiene un par de congruencias factor entonces A se escribe como producto directo de factores no triviales.

(c) Suponga que A es de congruencias distributivas. Pruebe que las congruencias factor forman un subreticulado complementado de $\mathrm{Con}(A)$.

3. Sea B un álgebras de Boole. Defina B^* como el espacio topológico de los ultrafiltros de B dotados de la topología que tiene como subbase los conjuntos de la forma $\sigma(a) = \{U \in B^* : a \in U\}$.

(a) Pruebe que B^* es un espacio Booleano, o sea Hausdorff, compacto con una base de clopens.

(b) Sea $f : B_1 \to B_2$ un morfismo de álgebras de Boole. Pruebe que $f^* : B_2^* \to B_1^*$ definida $f^*(U) = f^{-1}(U)$ es una función continua inyectiva (suryectiva), si f es suryectiva (inyectiva).

4. Sea B un álgebras de Boole. Sea $B \restriction a$ el álgebra de Boole que tiene como universo al intervalo $[0, a]$. Pruebe:

(a) $B \;\cong\; B \restriction a \;\times\; B \restriction a'$.

(b) Si $a \wedge b = 0$ y $B \restriction a$ es isomorfo a $B \restriction b$ entonces hay un automorfismo en B que "intercambia" a con b.

5. $\langle H, \vee, \wedge, 0, 1, \to\rangle$ es un álgebra de Heyting si $\langle H, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo acotado y se satisface

$$x \to y \geq z \Longleftrightarrow z \wedge x \leq y$$

para todo x, y, z.

(a) Pruebe que todo intervalo $[a, b]$ de un álgebra de Heyting es pseudocomplementado. Dé explícitamente el pseudocomplemento de un $x \in [a, b]$.

(b) Pruebe que todo intervalo $[a, b]$ de un álgebra de Heyting es un álgebra de Heyting. Dé explícitamente el complemento relativo $x \to_{[a,b]} y$ de cada par $x, y \in [a, b]$.

(c) Pruebe que el reticulado de filtros de un álgebra de Heyting es isomorfo al reticulado de congruencias.

Diciembre 2005

1. $\langle H, \vee, \wedge, 0, 1, \to\rangle$ es un álgebra de Heyting si $\langle H, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo acotado y se satisface

$$x \to y \geq z \quad \Longleftrightarrow \quad z \wedge x \leq y$$

para todo x, y, z.

(a) Pruebe:

(i) Si $x \leq y$ entonces $z \to x \leq z \to y$ y $x \to z \geq y \to z$;

(ii) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$;

(iii) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$;
(iv) $(x \vee y) \to z = (x \to y) \wedge (x \to z)$.

(b) Pruebe que $\theta = \{(x, y) : (x \to y) \wedge (y \to x) \geq a\}$ es una congruencia, para todo $a \in H$.

(c) Pruebe que H es subdirectamente irreducible sii existe un mayor elemento $b < 1$.

2. Sea A un álgebra. Pruebe que para todo $\theta \in \mathrm{Con}(A)$, son equivalentes:

(a) A/θ subdirectamente irreducible.

(b) θ completamente meet irreducible.

(c) Existe $\delta \in \mathrm{Con}(A)$ tal que $\delta \neq \theta$ y $[\theta, \nabla] = \theta \cup [\delta, \nabla]$.

(d) Existe $(a, b) \in A^2$ tal que θ es maximal en el conjunto de las congruencias que no contienen a (a, b).

3. (a) Sea $\mathcal{M}$ una clase de álgebras del mismo tipo, sea $F \in \mathcal{M}$ y sea G un conjunto de generadores para F. Pruebe que son equivalentes:

- F es libremente generada por G.
- Para todo par de términos n-arios $t_1(x_1, ...x_n)$ y $t_2(x_1, ...x_n)$, y para todo $g_1, ..., g_n \in G$, si
$$t_1^F(g_1, ..., g_n) = t_2^F(g_1, ..., g_n),$$
entonces la ecuación $t_1 \approx t_2$ se satisface en toda álgebra de $\mathcal{M}$.

(b) Sea A un álgebra. Considere el álgebra
$$F_n(A) \subseteq A^{A^n},$$
definida como el álgebra de todas las funciones "término" n-arias de A^n en A. Pruebe que $F_n(A)$ es libremente generada por $G = \{\pi_i : i = 1, ..., n\}$ en la variedad $\mathcal{V}(A)$

4. Suponga que C es un operador clausura sobre X. Pruebe:

(a) C es algebraico si y sólo si el reticulado de cerrados de C es algebraico y los elementos compactos son exactamente los finitamente generados.

(b) Si el reticulado de cerrados de C es algebraico, no necesariamente C es algebraico.

5. Caracterice las clases ecuacionales de la variedad de Álgebras de De-Morgan.

CAPÍTULO 11

Teoría elemental de Lie

Noviembre 2008

1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

(a) Probar que existe una descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde Δ es el conjunto de raíces del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(b) Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ hallar el peso máximo de la representación adjunta. Justificar.

2. Sea $\mathfrak{g}$ semisimple sobre $\mathbb{C}$ y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Sea Δ el conjunto de raíces del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y Δ^+ el conjunto de raíces positivas. Probar que las raíces simples son una base de $\mathfrak{h}^*$.

3. ¿Verdadero o falso? Justifique.

(a) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja. Si la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es no degenerada entonces $\mathfrak{g}$ es semisimple.

(b) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja. Entonces $\mathfrak{g}$ es semisimple si y sólo si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

4. Sea G un grupo de Lie compacto conexo y T un toro maximal de G. Pruebe que si $\chi \in \widehat{T}$ es un carácter de T tal que para todo $t \in T$ y $n \in N(T)$, el normalizador de T, se tiene que $\chi(ntn^{-1}) = \chi(t)$, entonces χ se extiende a un carácter de G.

Agosto 2008

1. Pruebe que un álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ es semisimple si y sólo si la forma de Killing es no degenerada.

2. Pruebe que si G es un grupo de Lie compacto conexo, entonces dos toros maximales T_1 y T_2 en G son conjugados, es decir $T_2 = gT_1g^{-1}$, $g \in G$. ¿Es esto cierto para dos toros T_1 y T_2 en G de la misma dimensión, no necesariamente maximales?

3. Pruebe que si G es finito, entonces la cantidad de representaciones irreducible de G es igual a $\#\{$clases de conjugación en $G\}$. Determine todas las representaciones irreducibles complejas de S_3 y A_4.

4. Pruebe que toda representación irreducible de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semisimple sobre $\mathbb{C}$, posee un peso máximo que la determina a menos de equivalencia. Determine los pesos máximos de las representaciones fundamentales de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ y exhiba modelos para ellas.

Marzo 2007

1. Enunciar el teorema de Peter y Weyl.

2. Sea G un subgrupo de Lie compacto de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Mostrar que el subespacio $\sum_{\gamma \in \hat{G}} V_\gamma \otimes V_\gamma^\star$ es denso en el espacio vectorial de las funciones continuas en G a valores complejos munido con la topología de convergencia uniforme en G.

3. Para el grupo $G = \mathrm{SO}(2n)$ encontrar un toro maximal, calcular las raíces y el grupo de Weyl de G. Calcular generadores para el reticulado de pesos de G.

4. Sea G un grupo de Lie compacto conexo tal que su subgrupo conmutador está contenido en un toro de G. Mostrar que G es un toro.

5. (a) Enunciar y demostrar las relaciones de ortogonalidad de Schur.

(b) Sea χ_V el carácter de una representación irreducible de un grupo compacto G. Calcular $\|\chi_V\|_2$.

6. Sea $H \times K$ el producto de dos grupos de Lie compactos y (π, V) una representación irreducible de $H \times K$. Mostrar que existen $(\sigma, V_1), (\tau, W_1)$ representaciones irreducibles de H, K de modo que (σ, V) es equivalente a $V_1 \otimes W_1$.

7. Sea T el toro de matrices diagonales en $\mathrm{U}(n)$. Sea S un toro en $\mathrm{U}(n)$. Usando álgebra lineal mostrar que S es conjugado a un subtoro de T. Mostrar que dos toros maximales de $\mathrm{U}(n)$ son conjugados.

CAPÍTULO 12

Reglamentos y programas

Extracto de la resolución HCD Nº 102/04 del *HONORABLE CONSEJO DIRECTIVO DE LA FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA.*

<u>ARTÍCULO 1º:</u> El plan de trabajo de cada estudiante del Doctorado en Matemática deberá incluir:

i) La aprobación de un Examen de Doctorado de acuerdo a los programas y modalidades que se establecen en el Anexo I de esta Resolución.

ii) La aprobación de al menos tres Cursos de Formación Superior o su equivalente en cursos de posgrado de menor puntaje, de acuerdo a lo establecido en la Resolución HCD N° 235/94, cuyos contenidos no se superpongan significativamente con los contenidos de las materias rendidas en el examen de Doctorado.

<u>ARTÍCULO 2º:</u> El examen establecido en el Artículo 1°, inciso i), será tomado en las fechas que se determinen de acuerdo al Artículo 24 de la Ordenanza FaMAF N° 1/84 y al mecanismo explicitado en el Anexo I, y deberá rendirse dentro de los 2 primeros años de la carrera, salvo debida justificación.

<u>ARTÍCULO 3º:</u> El tribunal encargado de tomar el examen al que se refiere el Artículo 2°, estará integrado por Profesores de Matemática de esta Facultad, con máximo grado académico. En cada ocasión, el Tribunal será designado por el Decano con suficiente antelación.

<u>ARTÍCULO 4º:</u> Serán funciones del tribunal del examen establecido en el Artículo 1° inciso i):

i) Confeccionar las pruebas que constituyan el examen.

ii) Receptar las pruebas correspondientes.

iii) Calificar las pruebas y el examen, labrando el acta correspondiente.

iv) Elevar el acta a la Secretaría de Posgrado de la Facultad para su registro y archivo.

<u>ARTÍCULO 5º:</u> Los Cursos de Formación Superior a los que se refiere el inciso ii) del Artículo 1°, deberán ser propuestos al HCD por la Comisión Asesora del Doctorando.

<u>ARTÍCULO 6º:</u> Comuníquese y archívese.

<u>ANEXO I</u>

1º) El Examen de Doctorado establecido en Artículo 1°, inciso (i) de la presente Resolución consistirá de tres pruebas escritas, cada una de ellas correspondiente a una de las materias cuyos programas se especifican en el punto 7°).

2º) El Examen se tomará en no más de tres (3) sesiones diferentes dentro de un lapso no mayor que treinta (30) días corridos. La prueba correspondiente a cada una de las materias deberá completarse en una única sesión.

3º) Las materias que conforman el Examen de Doctorado provienen de un grupo de materias denominadas básicas y de otro grupo de materias denominadas específicas. El grupo de materias básicas consta de dos áreas:

   a) Área análisis, conformada por las materias Funciones reales y Funciones complejas.
   b) Área álgebra, integrada por las materias Álgebra lineal numérica y Estructuras algebraicas.

   El grupo de materias específicas está constituido por: Análisis funcional, Variedades diferenciables, Topología algebraica, Estadística, Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, Álgebra universal y teoría de reticulados y Teoría elemental de Lie.

4º) Las materias del examen serán:

   1) Una de las materias básicas del área de álgebra.
   2) Una de las materias básicas del área de análisis.
   3) Una tercera elegida entre las materias específicas y las materias básicas restantes.

5º) Cada examen será calificado como "Aprobado", "No Aprobado" o "Aprobado Condicionalmente". La calificación de "Aprobado" se asignará cuando las tres pruebas fueren consideradas satisfactorias y la de "No Aprobado" cuando dos ó más pruebas fueren consideradas no satisfactorias. La calificación de "Aprobado Condicionalmente" se asignará cuando exactamente una prueba fuere considerada no satisfactoria. En tal caso el estudiante deberá rendir satisfactoriamente una nueva prueba de la correspondiente materia en alguna de las dos épocas de exámenes subsiguientes, a efectos de obtener la calificación de "Aprobado". En caso contrario la calificación final será "No Aprobado". En todos los casos, la calificación de "No Aprobado" implicará que el estudiante deberá rendir nuevamente las tres pruebas para aprobar el examen.

6º) Para rendir el examen el estudiante deberá inscribirse en la Secretaría de Posgrado. En la solicitud de inscripción deberán constar las materias que se eligen de acuerdo a los puntos 3°) y 4°). Asimismo el estudiante deberá proponer la manera en que desearía que las sesiones y las pruebas fuesen distribuidas. Esta distribución será decidida finalmente por el Decano de la Facultad y la decisión será comunicada dentro de los diez días de efectuada la inscripción. Se recomienda al estudiante que se inscriba al menos 30 días antes de la fecha propuesta para comenzar el examen. En todo esto debería actuar de común acuerdo con su Director.

El estudiante podrá inscribirse para el examen en cualquier fecha autorizada desde el momento en que sea considerado un doctorando (Art. 6°) Ordenanza FaMAF 1/84.

7º) PROGRAMAS: Funciones reales, Funciones complejas, Estructuras algebraicas, Álgebra lineal numérica, Análisis funcional, Variedades diferenciables, Topología algebraica, Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, Estadística, Álgebra universal y teoría de reticulados y Teoría elemental de Lie.

Funciones reales

1. Medida de Lebesgue. Medida exterior. Conjuntos medibles. Funciones medibles. Convergencia casi uniforme. Teorema de Egorov. Teorema de Lusin.
2. Integral de Lebesgue de funciones acotadas en conjuntos medibles de medida finita. Funciones integrables Riemann. Lema de Fatou. Convergencia monótona. Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Convergencia en medida.
3. Diferenciación e integración. Funciones de variación acotada. Diferenciación de integrales. Continuidad absoluta. Funciones convexas. Desigualdad de Jensen.
4. Espacios L^p. Desigualdades de Hölder y de Mincowsky. Completitud. Funcionales lineales continuas. Teorema de representación de Riesz.
5. Teorema de Baire en espacios métricos. Teorema de Stone-Weierstrass. Teorema de Arzelà-Ascoli. Teorema de Hahn-Banach. Teorema del gráfico cerrado y de la aplicación abierta. Espacios de Hilbert. Sistemas ortonormales completos. Identidad de Parseval. Funcionales lineales en espacios de Hilbert. Series de Fourier.
6. Espacios de medida abstractos, funciones medibles e integrables. Diversos teoremas de convergencia. Medidas con signo. Descomposición de Hahn. Descomposición de Jordan. Variación total. Teorema de Radon-Nycodim. Descomposición de Lebesgue. Espacios L^p, $1 \leq p \leq \infty$.
7. Medida exterior. Integral de Lebesgue-Stieljes. Medida producto. Teoremas de Tonelli y Fubini.
8. Conjuntos borelianos en espacios localmente compactos. Medidas de Baire. Funcionales positivas en $C_o(X)$. Medidas regulares. Funcionales continuas en $C(X)$ (X compacto). Teorema de representación de Riesz.

Referencias.

I) H. Royden. *Real Analysis.* Mcmillan.
II) W. Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw Hill.

Funciones complejas

1. Diferenciación compleja. Funciones analíticas y series de potencias. Transformaciones homográficas. Aplicaciones conformes.

2. Integración compleja. Teorema de Cauchy. Índice de una curva cerrada. Fórmula de la integral de Cauchy. Teoremas de Liouville, Morera, de la aplicación abierta y del módulo máximo. Lema de Schwarz.
3. Singularidades. Desarrollo de Laurent. Residuos. Cálculo de integrales por residuos. Teorema de Weierstrass-Casorati y enunciados de su generalización: Teoremas de Picard. El principio del argumento. Teorema de Rouché. Principio de reflexión de Schwarz.
4. Familias normales. Teoremas de Montel y de la aplicación de Riemann. Teorema de factorización de Weierstrass. La función Gamma.
5. Teorema de Runge. Diversas caracterizaciones de regiones simplemente conexas del plano complejo. Teorema de Mittag-Leffler.

REFERENCIAS.

I) L. AHLFORS. *Complex Analysis.* Mc Graw Hill.
II) J. CONWAY. *Functions of one complex variable.* Springer.
III) W. RUDIN. *Real and complex analysis.* Mc Graw Hill.

Álgebra lineal numérica

1. Autovalores y autovectores. Similaridad. Polinomio característico. Método de las potencias y de las potencias inversas. Método del cociente de Rayleigh.
2. Matrices unitarias. Equivalencias por unitarias. Teorema de triangularización de Schur. Matrices normales. Rotaciones de Givens. Reflexiones de Householder. Factorización QR. Algoritmo QR. Problema de cuadrados mínimos.
3. Forma canónica de Jordan. Polinomio minimal. Factorizaciones triangulares. Descomposición LU.
4. Matrices hermitianas y simétricas. Caracterización y propiedades. Descomposición espectral. Autovalores de matrices hermitianas.
5. Normas vectoriales y matriciales. Sistemas lineales. Teoría de perturbaciones. Número de condición.
6. Localización y teoría de perturbación de autovalores. Teoremas de Gershgorin. Métodos iterativos para sistemas lineales. Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR. Métodos de descenso. Método de gradientes conjugados.
7. Matrices definidas positivas y semidefinidas positivas. Caracterización y propiedades. Descomposición de Cholesky. Descomposición polar y descomposición en valores singulares.

REFERENCIAS.

I) R. HORN & C. JOHNSON. *Matrix Analysis.* Cambridge University. Press.
II) G. GOLUB & VAN LOAN. *Matrix Computations.* The Johns Hopkins. University Press.
III) D. WARKINS. *Fundamentals of Matrix Computations.* John Wiley & Sons.
IV) P. LASCAUX & R. THEODOR. *Analyse numerique matricielle appliqueé a l'art de l'ingenieur.* Masson.

V) K. Hoffman & R. Kunze. *Linear Algebra.* Prentice Hall.

Estructuras algebraicas

1. Grupos. Subgrupos. Homomorfismos. Grupos cíclicos. Grupos cocientes. Grupos finitos. Grupos simples (grupo de permutaciones). Grupos libres. Acciones de un grupo sobre un conjunto. Teoremas de Sylow. Grupos abelianos libres. Subgrupos. Estructura de grupos abelianos finitamente generados. Grupos divisibles.
2. Anillos. Homomorfismos. Anillo cociente. Ideales. Ideales primos y maximales. Dominio a ideales principales y de factorización única. Anillos de polinomios, nociones básicas. Anillos noetherianos.
3. Módulos. Submódulos. Homomorfismos. Módulo cociente. Módulo finitamente generado sobre dominio a ideales principales, submódulos, estructura. Espacios vectoriales. Forma racional y de Jordan de una transformación lineal.

Referencias.

I) S. Lang. *Algebra.* Addison-Wesley.
II) K. Hoffman & R. Kunze. *Linear algebra.* Prentice-Hall.
III) E. Gentile. *Notas de Álgebra, Fascículo 22.* Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Análisis funcional

1. Espacios vectoriales topológicos. Conjuntos balanceados, absorbentes y convexos. Axiomas de separación. Conjuntos acotados. Funcional de Minkowski. Espacios localmente convexos. Generación de topologías mediante familias de seminormas. Completitud. Condiciones de metrizabilidad. Espacio dual de un E.V.T.L.C.. Topologías en el espacio dual. Espacios de funciones diferenciales en $\mathbb{R}^n$.
2. El espacio de funciones de prueba y su topología. Distribuciones, funciones localmente integrables y medidas. Derivación de distribuciones. Soporte. Orden. Convolución. Regularización de funciones y distribuciones. El espacio de Schwartz ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Distribuciones temperadas. Transformada de Fourier de distribuciones. Transformada de Fourier en $S(\mathbb{R}^n)$, $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$. Teorema de Plancherel.
3. Operadores acotados en un espacio de Banach. Espectro (continuo, discreto y residual). Resolvente. Operadores compactos. Propiedades y ejemplos. Espectro de un operador compacto.
4. Operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert. Operadores positivos. Convergencia débil y fuerte. Raíz cuadrada de un operador positivo. Descomposición polar. Cálculo funcional. Proyecciones ortogonales. Resolución de la identidad. Teorema espectral para operadores normales. Operadores compactos autoadjuntos. Operadores unitarios.

Referencias.

I) W. Rudin. *Functional Analysis.* Mc. Graw Hill.
II) S. Lang. *Real Analysis.* Addison Wesley.
III) Riesz & Nagy. *Leçons d'Analyse Fonctionnelle.* Gauthier-Villars.

Variedades diferenciables

1. Variedades diferenciables. Fibrados tangente y cotangente. Particiones de la unidad. Funciones diferenciables que separan cerrados de compactos.
2. Subvariedades, inmersiones, inmersiones inyectivas. Teorema de la función inversa. Forma local de una inmersión. Diferenciabilidad de funciones con imagen en una subvariedad. Teorema de la función implícita. Forma local de una submersión. Teorema del rango.
3. Campos vectoriales. Extensiones locales y restricción de campos a través de una inmersión. Corchete de Lie de campos. Curvas integrales. Flujo local de campos. Distribuciones diferenciables e involutivas. Teorema de Frobenius: forma local y global.
4. Formas diferenciales. Derivada exterior de formas. Propiedades de funtorialidad. Derivada de Lie de formas. Orientabilidad de variedades, distintos criterios. Integración de n-formas. Teoremas de Stokes y de la Divergencia. Sus versiones clásicas en el espacio Euclídeo.
5. Grupos de Lie. Álgebra de Lie de un grupo de Lie. Correspondencia subgrupo-subálgebra. Grupo monoparamétrico. Exponencial: ejemplos y propiedades. Subgrupos cerrados. Estructura de variedades homogéneas y ejemplos.

Referencias.

I) F. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Scott, Foreman and Co.
II) Y. Matsushima. *Differentiable manifolds.* M. Dekker.
III) W. Boothby. *Differentiable manifolds and Riemannian manifolds.* Academic Press.

Topología algebraica

1. Retractos por deformación. Grupo fundamental. Espacios simplemente conexos. Teorema del punto fijo de Brouwer. Teorema de Van Kampen. Aplicaciones.
2. Espacios de revestimiento. Revestimiento Universal. Relevamiento de Funciones. Transformaciones de cubrimiento y su relación en el grupo fundamental. Correspondencia entre cubrimientos de X y subgrupos de $\pi_1(X)$. Revestimientos de grupos topológicos. Grupos de homotopía de orden superior. Propiedades básicas.
3. Homología singular (R un D.I.P.). Invariancia Homotópica. Homología relativa. Sucesión exacta de homología. Escisión. Aplicaciones a esferas. Sucesión de Mayer-Vietoris. Relación entre $\pi_1(X)$ y $H_1(X, \mathbb{Z})$. Teorema de Jordan-Brouwer. Invariancia del dominio y de la dimensión.aqui
4. Complejos CW. Su homología. Características de Euler. Grupo fundamental de un complejo CW.
5. Cohomología singular. Cohomología relativa. Relación entre $H^q(X, R)$ y $H_q(X, R)$ (R un DIP).

Referencias.

I) M. Greenberg. *Lectures on Algebraic Topology.* Benjamin.

II) W. Massey. *Introducción a la Topología Algebraica.* Reverté.
III) A. García & C. Sánchez. *Introducción a la Topología Algebraica.* Dirección General de Publicaciones de la Universidad Nacional de Córdoba.

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

1. Fórmulas de representación para EDP. Fórmulas explícitas para las soluciones de EDP lineales. Ecuación de transporte. Problema de valores iniciales. Problema no homogéneo.

   Ecuación de Laplace para espacios de dimensión n. El problema de Dirichlet en una bola de $\mathbb{R}^n$. Solución fundamental en $\mathbb{R}^n$. Fórmula del valor medio. Principio del máximo fuerte. Función de Green en dominios con simetría.

   Ecuación del calor. Derivación de la ecuación del calor en una dimensión. Solución fundamental para dimensión n. Principio del máximo fuerte.

   Ecuación de ondas. Fórmula de D'Alambert. Ecuación de ondas no homogénea. Principio de Duhamel. Dominios de dependencias. Ecuación de ondas forzada. Resonancia. Método de características para las ecuaciones casi-lineales.

2. Otras formas de representación de soluciones. Separación de variables (Series de Fourier). Soluciones autosemejantes. (exponencial, onda viajera , solitones). Transformación de ecuaciones no lineales en lineales: Transformación de Hopf-Cole.

3. Soluciones débiles. Definición de derivada en forma débil, ejemplos. Definición de Espacios de Sobolev.

   Opción 1: Ecuaciones elípticas. Soluciones débiles. Existencia: Teorema de Lax-Milgran.

   Opción 2: Leyes de conservación. Ecuación de Burgers. Choques. Condición de entropía. Solución débil, Problemas de Riemann.

Referencias.

I) L. Evans. *PDE.* AMS.
II) I. Peral Alonso. *Primer Curso de Ecuaciones en derivadas parciales.* Addison Wesley.
III) R. Haberman. *Elementary Applied Partial Differential Equations.* Prentice Hall.

Estadística

1. Fundamentos Probabilísticos: Espacios probabilísticos. Teorema de extensión de Caratheodory. Variables aleatorias. Probabilidad y esperanza condicional: teorema de Radon-Nikodyn. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias: teorema de Kolmogorov, leyes débil y fuerte de los grandes números. Transformada de Laplace: función generadora de momentos. Transformada de Fourier: funciones características. Teoremas centrales de límite.

2. Fundamentos de inferencia puntual paramétrica (muestras finitas). Modelos estadísticos paramétricos. Estimadores: suficiencia, completitud, ancilaridad, insesgamiento. Teoremas de Rao-Blackwell y Lehmann-Scheffe. Estimadores IMVU. Familias expo-

nenciales. Estimadores de momentos y máxima verosimilitud. Desigualdad de la información. Cota de Rao-Cramer

3. Fundamentos de tests de hipótesis y regiones de confianza en modelos paramétricos. Tests uniformemente más potentes: hipótesis uni y bilaterales, potencia, nivel y p-valor. Tests óptimos. Lema de Neyman-Pearson. Tests para media y varianza en el caso normal. Tests insesgados: tests uniformemente más potentes insesgados. El problema de dos muestras. Cotas, intervalos y regiones de confianza.
4. Teoría de grandes muestras: resultados asintóticos. Consistencia y normalidad asintóticas. Distribución asintótica de estimadores de máxima verosimilitud y de momentos. Eficiencia relativa asintótica. Cota de Rao-Cramer asintótica. Optimalidad de máxima verosimilitud. Tests e intervalos de confianza asintóticos.
5. Estimación Bayesiana. Modelos bayesianos. Admisibilidad. Estimadores de Bayes. Estimación minimax. Caso de familias exponenciales. Estimador de James-Stein.
6. Estadística no-paramétrica. Modelo de posición para una muestra bajo una distribución continua arbitraria. Test del signo: nivel y potencia. Estadísticas de orden, rangos. Estimador puntual de Hodges-Lehmann. Modelo de posición para una muestra bajo una distribución simétrica continua arbitraria. Tests de rangos signados de Wilcoxon: nivel y potencia. Teoría asintótica.

REFERENCIAS.

I) L. BREIMAN. *Probability.* Addison-Wesley.
II) K. L. CHUNG. *A course in probability theory.* Academic Press.
III) R. DURRETT *Probability theory with examples.* Duxbury.
IV) T. P. HETTSMANSPERGER. *Statistical inference based on ranks.* Wiley.
V) E. L. LEHMANN. *Theory of point estimation.* Wiley.
VI) E. L. LEHMANN. *Testing statistical hypothesis.* Wiley.

Álgebra universal y teoría de reticulados

1. Reticulados. Homomorfismos, congruencias, ideales y subreticulados. Reticulados distributivos. Teorema del filtro primo. Dualidad de Priestley. Reticulados completos y reticulados algebraicos. Operadores de clausura. Álgebras de Boole.
2. Álgebras. Homomorfismos, congruencias, subálgebras. Teoremas de isomorfismos. Productos directos, congruencias factor, y álgebras directamente indescomponibles. Teorema de representación subdirecta de Birkhoff. Álgebras libres. Teorema HSP de Birkhoff. Condiciones de Mal'cev para permutabilidad y aritmeticidad. Teorema de completitud de la lógica ecuacional (Birkhoff).

REFERENCIAS.

I) R. BALBES & P. DWINGER. *Distributive Lattices.* University of Missouri. Press, Columbia, Missouri.
II) S. BURRIS & H. SANKAPPANAVAR. *A Course in Universal Algebra.* Springer-Verlag, New York.
III) G. GRÁTZER. *Universal Algebra.* Van Nostrand, Princeton.

IV) G. Grätzer. *Lattice Theory. First Concepts and Distributive Lattices.* W. H. Freeman and Co.
V) R. McKenzie, G. Mckenzie & W. Taylor *Algebras, Lattices, Varieties, Vol. 1.* The Wadsworth & Brooks/Cole Math. Series, Monterrey, California.

Teoría elemental de Lie

1. Grupos de Lie compactos, toros maximales, teorema de conjugación de toros maximales, álgebras de Lie complejas reductivas, subálgebras de Cartan, sistemas de raíces, grupo de Weyl, pesos dominantes.
2. Topología de grupos de Lie compactos, reticulado unidad, centro de un grupo de Lie compacto, Teorema de Weyl.
3. Representaciones de dimensión de finita de grupos de Lie compactos. Álgebra universal envolvente. Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Teorema del peso máximo de E. Cartan.
4. Medida de Haar en un grupo de Lie y en espacios homogéneos. Fórmula de integración de Weyl. Carácter de una representación, fórmula del carácter de Weyl, fórmula de la dimensión de Weyl. El anillo de representaciones virtuales de un grupo de Lie compacto. Representaciones inducidas.
5. Teorema de Peter y Weyl, relaciones de ortogonalidad. Teorema de reciprocidad de Frobenius.

Referencias.

I) N. R. Wallach. *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces.* Marcel Dekker, Inc., New York. (Capítulos: 2, 3 y 4).
II) A. W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction.* Progress in Mathematics, v. 140, Birkhauser. (Capítulos: 2, 3, 4, y 5).
III) T. Bröcker & T. Dieck. *Representations of Compact Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics, v. 98, Springer-Verlag, New York.
IV) J. F. Adams. *Lectures on Lie Groups.* Benjamin, New York.