ISSN 0325-7533

ACTAS de la ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

TOMO XV

CORDOBA - REPUBLICA ARGENTINA
2012

Impresión:
Editorial Copiar

Impreso en agosto de 2012

ISSN 0325-7533

Queda hecho el depósito que marca la ley

Impreso en la República Argentina
Printed in the Argentina Republic

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS
Córdoba (República Argentina)
Sede: Avda. Vélez Sársfield 229-249 - Dir. Postal: Casilla de Correo 36
CEP X5000WAA Córdoba - República Argentina
Tel.: 54 351 433-2089 - Fax: 54 351 421-6350
Correo electrónico: secretaria@anc-argentina.org.ar
Sitio web: http://www.anc-argentina.org.ar

ACTAS
de la
ACADEMIA
NACIONAL
DE CIENCIAS

TOMO
XV

Segunda Escuela de Historia conceptual de las Matemáticas

EDITOR
Nicolás Andruskiewitsch
ACADÉMICO

AUTORES
Mohamad Al-Houjairi
Pierre Cartier
Walter Ferrer Santos
Caroline Jullien
Philippe Nabonnand
Alberto G. Ranea
Víctor Rodríguez
Sandra Visokolskis

CORDOBA - REPUBLICA ARGENTINA
2012

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)

CONTENIDO DE LA PRESENTE ACTA XV

PRÓLOGO

La serie de *Escuelas de Historia Conceptual de las Matemáticas* comenzó en Brasilia, en febrero y marzo de 2008, organizada por Dominique Flament y Wilton Barroso. La Segunda Escuela de Historia Conceptual de las Matemáticas se inició en la Academia Nacional de Ciencias el martes 23 de noviembre de 2010, y continuó en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba, entre el miércoles 24 y el sábado 27. El Programa de la Segunda Escuela comprendió:

- Cursos dictados por Philippe Abgrall, Mohamad Al-Houjairi, Marie Anglade, Pierre Cartier, Gérard Grimberg, Caroline Jullien, Philippe Nabonnand y J.-J. Szczeciniarz.

- Conferencias dictadas por Walter Ferrer Santos, Walter Lamberti, César Polcino, Guillermo Ranea, Víctor Rodríguez, Pablo Souza y Sandra Visokolskis.

Además, en el marco del ciclo de actividades *La Universidad piensa el Bicentenario,* el Profesor Pierre Cartier pronunció la conferencia *El álgebra de la libertad: el compromiso del científico con el desarrollo de las naciones,* con asistencia de numeroso público. El texto integral de la conferencia de Cartier se incluye en este volumen, así como los textos de algunas de los cursos y conferencias dictadas en la Segunda Escuela. Las contribuciones de Walter Ferrer Santos y Víctor Rodríguez tratan facetas de la vida y obra de dos matemáticos recientemente fallecidos, Gerhard Hochschild y Vladimir Arnold respectivamente. El artículo de Mohamad Al-Houjairi versa sobre la consideración en la obra del matemático árabe Ibn Hūd de dos teoremas de Menelao; también contiene algunos textos traducidos de Ibn Hūd e Ibn ʿIrāq. Caroline Jullien aborda los presupuestos filosóficos del tratamiento de la estética por Poincaré. Philippe Nabonnand considera un texto de Gauss sobre el abordaje matemático del problema de las cartas geográficas y sus ecos en trabajos de Jacobi, Liouville y Bonnet. El trabajo de Guillermo Ranea cubre algunos aspectos de la correspondencia entre Leibniz y Papin, precisamente la relacionada con la controversia acerca de cómo medir la acción motriz. Finalmente, Sandra Visokolskis reflexiona sobre la transición protagonizada por René Descartes de la proporción a la ecuación.

Agradecemos a quienes dictaron cursos y conferencias, a quienes presentaron las contribuciones de este volumen, a los árbitros anónimos y a las instituciones que apoyaron financieramente el evento: la Academia Nacional de Ciencias, la Facultad de Matemática, Astronomía y Física y la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, a través del Foncyt.

Nicolás Andruskiewitsch
Académico

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)
TOMO XV, AGOSTO DE 2012

SUR LES COMMENTAIRES DES THÉORÈMES III-1 ET III-22 DE MÉNÉLAÜS DANS L'*ISTIKMĀL* D'IBN HŪD

Mohamad Al-Houjairi

Université Libanaise, Faculté de Génie, CNRS-Liban (ERTSA), rue al-Arz, al-Koubbé, Tripoli, Liban.
Email: houjairi@hotmail.com

Key words: History of Mathematics, History of non-Euclidean Geometry, Spherical Geometry, Spherical Trigonometry, *Spherics*, *Al-Istikmāl*, Menelaus, al-Mu'taman Ibn Hūd, Abū Naṣr Ibn ʿIrāq, Thābit Ibn Qurra..

SYNOPSIS

In his encyclopedic book *Al-Istikmāl* (The *Completion*), the mathematician of Saragossa, Ibn Hūd (d. 1085/478 H.) develops a "classical theory" – rather pedagogical aspect – of spherical geometries of Theodosius (107-43 BC) and Menelaus (mid first century AD). In this paper, we study the demonstrations developed by Ibn Hūd of two propositions III-1 and III-22 of Menelaus's *Spherics*. We prove that the demonstration of the first proposition is borrowed from Ibn Qurra. The reader will find also some established and translated texts of Ibn Hūd and Ibn ʿIrāq.

SOBRE LOS COMENTARIOS A LOS TEOREMAS III-1 Y III-22 DE MENELAO EN AL-*ISTIKMĀL* DE IBN HŪD

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Historia de la geometría non euclidiana, la geometría esférica, la geometría elíptica, trigonometría esférica, *Esféricos* de Menelao, *Al Istikmāl*, Menelao, al-Mu'taman Ibn Hūd, Abū Naṣr Ibn ʿIrāq, Thābit Ibn Qurra.

SINOPSIS

En su obra enciclopédica *Al-Istikmāl*, el matemático de Zaragoza, Ibn Hūd (d. 1085/478 H.) desarrolla una "teoría clásica" – con énfasis en sus aspectos pedagógicos – de las geometrías esféricas de Teodosio (107-43 BC) y Menelao (mediados del primer siglo AD). En este artículo, estudiamos las demostraciones desarrolladas por Ibn Hūd de las proposiciones III-1 y III-22 del texto Spherics de Menelao. Mostramos que la demonstración de la primera proposición es tomada de Ibn Qurra. El lector también encontrará algunos textos traducidos de Ibn Hūd e Ibn ʿIrāq.

.

I- INTRODUCTION

La recherche astronomique pendant le IX^{e} et le X^{e} siècle était à l'origine d'un développement important en géométrie sphérique. Les méthodes inventées pour résoudre les problèmes métriques sur l'étendue de la sphère ont abouti, à la fin du X^{e} siècle, à l'émergence d'une discipline indépendante de l'astronomie et de la géométrie : la trigonométrie, et à une authentique réforme de la géométrie sphérique. Une fois affranchis du théorème de Ménélaüs, les mathématiciens comme al-Khujandī, al-Buzjānī et Ibn ʿIrāq ont en effet accumulé des résultats : les formules usuelles de la trigonométrie, le triangle polaire, etc. À leur suite, al-Bīrūnī, Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī menèrent de plus en plus loin cette recherche trigonométrique. En géométrie sphérique, Ibn al-Haytham introduit des méthodes infinitésimales en assimilant les petits triangles sphériques à des triangles rectilignes[1]. À côté de ces grands noms à l'avant-garde de la recherche, d'autres savants ont continué à s'interroger sur l'héritage des Anciens : ils ont développé le contenu mathématique et amélioré les méthodes. Le mathématicien de Saragosse, Ibn Hūd (mort en 1085 [478 H.]) est précisément de ceux-ci. S'appuyant sur ses prédécesseurs, il développe, dans son livre intitulé *al-Istikmāl* (*La Complétion*), une 'théorie classique' – plutôt d'aspect pédagogique – des géométries sphériques de Théodose et de Ménélaüs.

Le volumineux livre mathématique d'*al-Istikmāl* est attribué, donc, au mathématicien andalou Abū ʿĀmir Yūsuf ibn Hūd Aḥmad ibn Hūd, dit al-Mu'taman[2], mais il ne nous est pas parvenu dans son intégralité[3]. En 1081, Ibn Hūd a succédé à son père, roi de Saragosse, après la mort de ce dernier. Lui-même a péri quatre ans plus tard.

Notre travail porte précisément sur la géométrie sphérique d'Ibn Hūd ; cette partie de l'*Istikmāl* d'Ibn Hūd contient deux chapitres. Ces chapitres occupent le texte[4] des folios 76^{v}-90^{v} du manuscrit "Copenhague, Or. 82".[5]

On a identifié la perte d'une grande partie des *Sphériques* de l'*Istikmāl* d'Ibn Hūd[6]. Au début de la

1 Voir R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. V : *Géométrie sphérique et astronomie* (Londres, 2006).

2 Sur la vie et les écrits d'Ibn Hūd, voir : R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. I (Londres, 1996), p. 976-978 ; M. Al-Houjairi, *L'Encyclopédie d'Ibn Hūd*, thèse doctorale (Univ. Paris 7, 2005), vol. I, p. 1-4, 354-356 ; J. P. Hogendijk, "The Geometrical Parts of the *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century). An Analytical Table of Contents", *Archives internationales d'histoire des sciences*, 41, (1991), p. 207-281.

3 "Pour l'heure, il existe en fait les fragments suivants de l' *Istikmāl* : 1) Les parties géométriques de loin les plus substantielles, dans le manuscrit Or. 82 de la Bibliothèque Royale de Copenhague et le manuscrit Or. 123-a de Leyde. 2) Le fragment arithmétique dans le manuscrit du Caire, Dār al-Kutub, Riyāḍa 40. Une copie de ce manuscrit et de lui seul [...] se trouve à Damas, Ẓāhiriyya 5648. 3) Enfin le court fragment cité par un commentateur dans un manuscrit de la Bibliothèque Osmaniyye d'Hyderabad [...]. À l'exception de ce dernier fragment où l'*Istikmāl* est cité, aucun ne mentionne ni le titre, ni l'auteur". (Voir R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 976, note 5).

4 Le texte sur la géométrie sphérique de l'*Istikmāl* est transmis par un seul manuscrit, coté Or. 82 à la Bibliothèque Royale de Copenhague. Par la suite, cette référence sera désignée par "*Les Sphériques* d'Ibn Hūd". On note que, dans les propositions mathématiques, le copiste a écrit les lettres qui désignent les points des figures, comme on les prononce – a : alif, b : bā', etc. –. Nous nous sommes permis d'écrire les lettres comme telles et non pas comme on les prononce, par raison d'économie et parce qu'il n'y a aucune confusion à craindre.

5 Voir la description de ce manuscrit par R. Rashed, dans *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 980-981.

6 Nous avons constaté la perte d'une grande partie du premier chapitre ; et sa restauration pose un problème sérieux et difficile à résoudre de façon univoque, car toute restauration possible suppose l'adoption d'une conjecture probable. Les commentaires marginaux du manuscrit, qui auraient pu aider au processus de restauration, sont contradictoires, il semble qu'ils soient tardifs (voir Al-Houjairi, *L'Encyclopédie d'Ibn Hūd*, vol. I, p. 48-51). Quant au deuxième chapitre, il semble qu'il y ait deux paragraphes perdus ainsi qu'une partie du troisième paragraphe. Nous notons que la perte a déjà été signalée par J. P. Hogendijk ("The geometrical parts of the Istikmāl", p. 207-281).

partie de son texte qui concerne la géométrie sphérique, Ibn Hūd expose son plan de travail ultérieur ; il y décrit une classification des objets sphérico-géométriques abordés[7].

Dans le commentaire historico-mathématique qui suit, en apportant la rectification minimale nécessaire, nous reproduisons, pour les échantillons manuscrits choisis, la démarche de l'auteur en utilisant parfois des notations et des conceptions mathématiques modernes et en ajoutant des figures géométriques, afin de rendre la manipulation démonstrative accessible. À noter que, tout au long de notre étude, *Les Éléments* d'Euclide[8] (IIIe siècle avant J.-C.) et *Les Sphériques* de Ménélaüs[9] (actif à la fin du premier siècle après J.-C.), vont nous servir de références de comparaison.

Nous sommes enclins à penser que l'*Istikmāl* a été écrit par un groupe d'auteurs sous la direction d'un dirigeant politique qui est probablement Ibn Hūd ; et il semble que l'écriture d'une "encyclopédie" en mathématiques ait été une partie d'une plus grande tâche consistant à rédiger des livres portant sur d'autres disciplines scientifiques[10].

Notre étude ultérieure porte sur un échantillon des *Sphériques* de l'*Istikmāl* : les propositions III-1 et III-22 du texte des *Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq. Cet échantillon occupe les folios 82v- 83v et 88v- 89r du manuscrit "Copenhague, Or.82".

Enfin, il faut noter qu'en comparant le texte de géométrie sphérique d'Ibn Hūd, celui de Ménélaüs tel qu'on le trouve dans le livre d'Ibn ʿIrāq et les commentaires propres de ce dernier, on remarque que le texte de l'*Istikmāl* reflète une tendance – bien que très faible en l'absence du théorème des sinus – à une reprise par des démonstrations intrinsèques de quelques théorèmes sphériques[11].

7 Il écrit, par exemple : "la seconde espèce de la quatrième espèce sur les propriétés des sphères et des sections qui y sont engendrées sans que les unes soient rapportées aux autres. Elle se partage en deux chapitres : le premier porte sur les propriétés des cercles situés dans la sphère sans que les uns soient rapportés aux autres, le second sur les propriétés des cercles des sphères, de leurs arcs et de leurs cordes rapportés les uns aux autres". (Voir le manuscrit Or 82, folio 76v).
"النَوْعُ الثاني مِنَ النَوْعِ الرابعِ في خَواصِّ الأُكَرِ والقُطوعِ الحادِثَةِ فيها مِنْ غَيْرِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض، وَهُوَ يَنْقَسِمُ إلى فَصْلَيْنِ: الفَصْلِ الأوّلِ في خَواصِّ الدَوائِرِ الواقِعَةِ في الكُرَة، مِنْ غَيْرِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض، والفَصْلِ الثاني في خَواصِّ دَوائِرِ الأُكَرِ وقِسِيِّها وَأَوْتارِها بِحَسَبِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض".

8 Traduction française dans le livre "*Les Œuvres d'Euclide*", F. Peyrard, Paris 1819, nouveau tirage Librairie Blanchard, Paris 1993. (Par la suite, cette référence sera désignée par "*Les Éléments* d'Euclide").

9 Ce traité, perdu en grec, nous est parvenu dans une version en arabe due à Ibn ʿIrāq. On va utiliser le livre de Max Krause : *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr B. ʿAlī B. ʿIrāq*, coll. *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, *Philologish-Historische Klasse*, 3e série, n° 17, Berlin, 1936 ; réimpr. F. Sezgin, coll. *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 37, Frankfurt, 1998. (Par la suite, cette référence sera désignée par "*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq").

10 R. Rashed écrit : "Tout indique donc que, par ces emprunts souvent *in verbis* et massifs, aux uns et aux autres, l'*Istikmāl* devait être une sorte d'encyclopédie géométrique, ou plus précisément encore une encyclopédie mathématique, au sens de l'ancien *quadrivium,* et il était ainsi conçu pour inclure aussi bien l'astronomie, l'optique que l'harmonique". Voir *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I, p. 978.

11 Voir Roshdi Rashed et Mohamad Al-Houjairi, "Sur un théorème de géométrie sphérique : Théodose, Ménélaüs, Ibn 'Irāq et Ibn Hūd", *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 20, n° 2, 2010, p. 207-253.

II- COMMENTAIRES MATHÉMATIQUES[12]

Proposition n° 9 : [13]

Soient *(C_1)* et *(C_2)* deux grands cercles de la sphère tels que *$arc(C_1)$* et *$arc(C_2)$* se coupent aux points *A* et *C*. Si *E* et *G* sont deux points arbitraires situés sur la circonférence *$arc(C_1)$*, différents de *A* et *C* et admettant respectivement les points *K* et *L* comme projections orthogonales sur le plan du cercle *(C_2),* alors

$$\frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)} \quad (1)$$

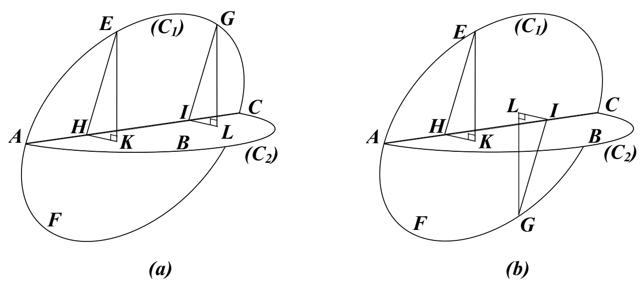


Fig. 1

Analyse :

Les grands cercles *(C_1)* et *(C_2)* se coupent suivant leur diamètre commun *AC* (voir la figure 1). Désignons par *H* et *I* respectivement les pieds des perpendiculaires abaissées des points *E* et *G* à la droite *AC*. Si les plans des cercles *(C_1)* et *(C_2)* sont perpendiculaires, les points *H* et *I* coïncident alors, respectivement, avec *K* et *L*[14] et la relation (1) est évidemment satisfaite puisque *crd(2 arc(AE))* est égal à *2 sgm(EH)* et *crd(2 arc(AG))* est égal à *2 sgm(GI)*.

Supposons, à présent, que les plans des cercles *(C_1)* et *(C_2)* ne soient pas perpendiculaires. Par suite, le point *H* est différent de *K* et le point *I* est différent de *L* ; les deux triangles *EHK* et *GIL* sont semblables puisqu'ils ont leurs angles égaux deux à deux[15] : *angl(EKH)* et *angl(GLI)* sont des angles droits[16], *angl(HEK)* est égal à *angl(IGL)* [17] et par suite, les angles restants *angl(KHE)* et *angl(LIG)* sont égaux aussi ; donc

$$\frac{sgm(EH)}{sgm(GI)} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)} \quad ;$$

mais

$$\frac{sgm(EH)}{sgm(GI)} = \frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))} \quad ,$$

car *sgm(EH)* est égal à *Sin(AE)* [18] et *sgm(GI)* est égal à *Sin(AG)* [19]. En conséquence, on obtient

---

12 Par la suite, pour abréger l'écriture, on adoptera les notations suivantes : *arc*(*AB*) (l'arc *AB*) ; *arc*(*C*) (la circonférence du cercle (*C*)) ; *sgm*(*AB*) (le segment de droite *AB*) ; *crd*(*AB*) (la corde de *arc*(*AB*)) ; *hem*(*A*) (l'hémisphère de sommet le point *A*) ; *cercle*(*AB*) (un cercle qui passe par les points *A* et *B*) ; *hom*(*AB*) (homologue de *arc*(*AB*) ; par définition, *hom*(*AB*) = *crd(2arc(AG))*) ; *Sin(AB)* (sinus de *arc(AB)* ; par définition, *Sin(AB) = ½ crd(2 arc(AB))= ½ hom(AB)= R sin(AB),* où *R* est le rayon du cercle et *sin(AB)* est le sinus au sens actuel) ; *angl(ABC)* (l'angle *ABC*) ; par *drt* on désigne un angle droit ou bien un quadrant d'un cercle.

13 On garde la numérotation adoptée par Ibn Hūd, telle qu'on la trouve dans le texte manuscrit.

14 *Les Éléments* d'Euclide, proposition 38*,* livre XI, p. 441 : "Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, et si d'un point pris dans un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l'autre plan, cette perpendiculaire tombera sur la section commune des plans".

15 *Les Éléments* d'Euclide, proposition 4*,* livre VI, p. 143 : " Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels ; et les côtés qui sous-tendent les angles égaux, sont homologues ".

16 *Les Éléments* d'Euclide, définition 3, livre XI, p. 396 : " Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan ".

17 Chacun des deux angles est aigu et leurs côtés sont, deux à deux, parallèles.

18 Voir *supra* note 12, p. 4.

19 On note que c'est l'unique passage dans *Les Sphériques* d'Ibn Hūd où l'on rencontre le terme " *Sinus* ". Il utilise au début le terme " *corde de l'arc double* " puis il adopte le terme " *homologue de l'arc* " qui est égal, par la définition introduite par Ibn Hūd, à la " *corde de l'arc double* ".

$$\frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)} \ .$$

C.Q.F.D.

Marie-Thérèse Debarnot a indiqué qu'un résultat, presque identique à celui de cette proposition n° 9, est dû à Thābit Ibn Qurra[20]. Ce résultat conduit, selon M.-T. Debarnot, à une élégante démonstration du théorème III-1 des *Sphériques* de Ménélaüs[21]. Cette question est également abordée par Hélène Bellosta[22].

Proposition n° 10 :

Soient sur la sphère, *arc(AB), arc(BC), arc(AD)* et *arc(EC)* quatre arcs non coplanaires [23] de grandes circonférences, plus petits, chacun, qu'une demi-circonférence d'un grand cercle et tels que le point *E* appartienne à *arc(AB)* et le point *D* appartienne à *arc(BC)*.

Si *arc(EC)* et *arc(AD)* se coupent au point *F*, alors les deux relations suivantes sont satisfaites :

1) $\frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))} \ \frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))}$,

2) $\frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))} \ \frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))}$.

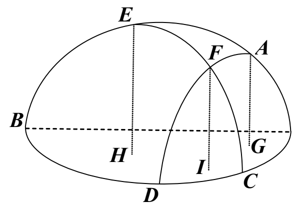


Fig. 2

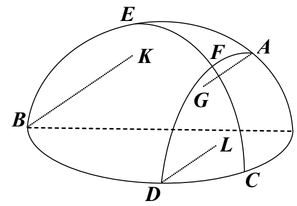


Fig. 3

Analyse :

1) Abaissons des points *A*, *E* et *F* les perpendiculaires *sgm(AG), sgm(EH) et sgm(FI)* au plan du *cercle(BC)* (voir figure 2). D'après la proposition n° 9, on a :

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(BA))}{crd(2arc(BE))} \ ,$$

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} = \frac{crd(2arc(DA))}{crd(2arc(DF))} \ ,$$

et

$$\frac{sgm(FI)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(CF))}{crd(2arc(CE))} \ .$$

En utilisant l'identité [24]

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} \frac{sgm(FI)}{sgm(EH)} \ ,$$

on obtient

$$\frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))} \ \frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))} \ .$$

20 Voir « Extrait du livre de Thabit-Ben-Korrah : *De la figure du quadrilatère et des rapports composés* », dans le *Traité du Quadrilatère (Kitāb al-Shakl al-qaṭṭā')* attribué à Nassiruddin-El-Toussy, traduit (en français) par Alexandre Pacha Caratheodory, Constantinople, 1891 ; réimpr. F. Sezgin, coll. *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 47, Frankfurt, 1998, livre 5, page 200-201. Al-Ṭūsī, expose, dans cet extrait attribué à Thābit Ibn Qurra, une démonstration identique à celle d'Ibn Hūd.

21 Marie-Thérèse Debarnot, *Al-Bīrunī, Kitāb Maqālīd 'Ilm Al-Hay'a.* Institut Français de Damas, Damas, 1985, p. 6.

22 Hélène Bellosta, "Le Traité de Thābit ibn Qurra sur *la figure secteur*", *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14, n° 1, 2004, p. 145-168, en particulier p. 158. Cet article a été repris et augmenté dans : *Thābit ibn Qurra – Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, R. Rashed (éd.), Berlin, 2009, p. 335-390.

23 C'est-à-dire les arcs considérés sont non coplanaires deux à deux.

24 Cette identité repose sur la composition des rapports utilisée par Euclide au livre VI des *Éléments*, mais qui ne fait pas l'objet d'une définition explicite. Thābit Ibn Qurra consacre un assez long traité à cette « opération » très particulière (voir Pascal Crozet, "Thābit ibn Qurra et la composition des rapports", *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14, n° 2, 2004, p. 175-211. Cet article a été repris et augmenté par l'édition et la traduction du texte, dans : *Thābit ibn Qurra – Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, R. Rashed (éd.), Berlin, 2009, p. 391-535.

2) De la même manière, abaissons, des points *A, B* et *D,* les perpendiculaires *sgm(AG), sgm(BK)* et *sgm(DL)* au plan du *cercle(EC)* (voir la figure 3). D'après la proposition n° 9, on a :

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(BK)} = \frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(EB))} \ ,$$

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(DL)} = \frac{crd(2arc(AF))}{crd(2arc(FD))} \ ,$$

et

$$\frac{sgm(DL)}{sgm(BK)} = \frac{crd(2arc(DC))}{crd(2arc(CB))} \ .$$

En utilisant l'identité

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(BK)} = \frac{sgm(AG)}{sgm(DL)} \ \frac{sgm(DL)}{sgm(BK)} \ ,$$

on obtient

$$\frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AF))}{crd(2arc(FD))} \frac{crd(2arc(DC))}{crd(2arc(CB))} \ .$$

On trouve le même résultat chez Ménélaüs[25] mais de démonstration différente.

Proposition n° 20 :

Soit dans une sphère *(S)* de diamètre d_S et de centre *O*, un grand cercle (C_1) de pôles *G* et *G'* ; et soit (C_2) un autre grand cercle oblique sur (C_1) et de pôle *F*. Considérons sur la circonférence de (C_2), deux points *D* et *E* qui ne sont pas diamétralement opposés. Traçons les demi-circonférences *arc(GDG')* et *arc(GEG')* qui coupent $arc(C_1)$, respectivement, aux points *C* et *H*. Désignons, par *B*, *B'* les points d'intersection de $arc(C_1)$ et $arc(C_2)$, par *A* le point d'intersection du *cercle(FG)* avec $arc(C_2)$, qui est situé dans *hem(G)* et par d_A, d_D et d_E les diamètres des cercles qui passent, respectivement, par les points *A, D, E* et qui sont parallèles à (C_1).

Avec ces considérations, on aura :

$$\frac{hom(HC)}{hom(DE)} = \frac{d_S \cdot d_A}{d_D \cdot d_E}$$

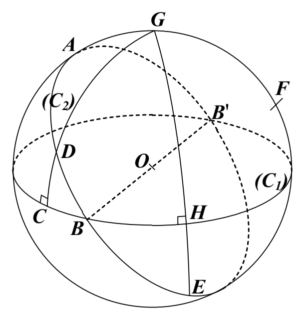


Fig. 4

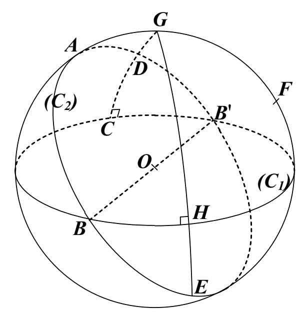


Fig. 4bis

Analyse :

On peut supposer, sans restreindre la généralité de la démonstration, que *arc(DE)* est inférieur à une demi-circonférence de grand cercle, car les homologues des arcs supplémentaires sont égaux. D'autre part, sans restreindre non plus la généralité de la démonstration, on adopte la convention suivante :

25 *Les Sphériques de* Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, proposition 1, livre III, p. 62-64 (du texte arabe, dont M. Krause donne la traduction en allemand p. 194-197) :
" Proposition 1 : Les deux arcs CE, BD se coupent au point A. Des deux points C et B on décrit les deux arcs CD et BE qui se coupent au point G. On suppose que chacun de ces quatre arcs soit d'une grande circonférence de la sphère et que chacun soit plus petit qu'une demi-circonférence. Je dis que le rapport du sinus de l'arc CE au sinus de l'arc EA est composé du rapport du sinus de l'arc CG au sinus de l'arc GD et du rapport du sinus de l'arc BD au sinus de l'arc BA".

"**الشَكْلُ الأوَّلُ:** قَوْسا جـ هـ ب د تَلْتَقِيانِ عَلَى نُقْطَةِ ا وأُخْرِجَ مِنْ نُقْطَتَيْ جـ ب قَوْسا جـ د ب هـ مُتَقاطِعَتَيْنِ عَلَى نُقْطَةِ ز وَكُلُّ واحِدَةٍ مِنَ هذه القِسِيِّ الأرْبَعِ مِنْ مُحيطِ دائِرَةٍ عَظيمَةٍ في الكُرَةِ وَكُلُّ واحِدَةٍ مِنْها أصْغَرُ مِنْ نِصْفِ المحيطِ.

فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ جـ هـ إلى جَيْبِ هـ ا مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ جـ ز إلى جَيْبِ قَوْسِ ز د <ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب د إلى جَيْبِ قَوْسِ ب ا>".

1- Si les deux points *D* et *E* sont de part et d'autre de (C_1), on désigne par *B* le point d'intersection de $arc(DE)$ avec $arc(C_1)$, on suppose que $arc(BD) \geq arc(BE)$[26] et on désigne par *G*, le pôle de (C_1) qui est du même côté que *D*[27].

2- Si les deux points *D* et *E* sont d'un même côté de (C_1), on désigne également par *G* le pôle de (C_1) situé du même côté que ces points[28].

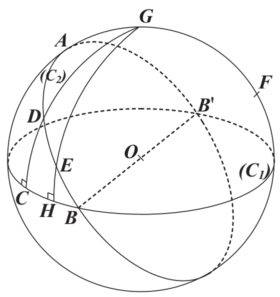


Fig. 5

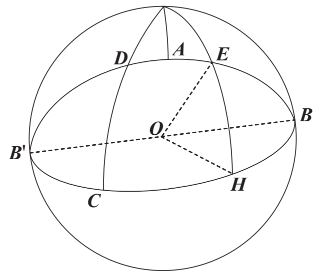


Fig. 6

Après cette convention, on aura, à une équivalence près, quatre configurations possibles représentées par les figures : 4, 4 bis, 5 et 6[29].

En considérant les deux triangles sphériques *GAE* et *BHE*, on vérifie facilement, pour toutes les configurations, que :

$$angl\left(GAE\right) = angl\left(BHE\right) = drt\ ,$$

et que $angl\left(GEA\right) = angl\left(BEH\right)$.

Donc d'après la proposition n° 11 d'Ibn Hūd[30],

$$\frac{hom(AG)}{hom(GE)} = \frac{hom(BH)}{hom(BE)}\ ;$$

d'autre part, d'après la proposition n° 10,

$$\frac{hom(HC)}{hom(DE)} = \frac{hom(HB)}{hom(BE)} \cdot \frac{hom(CG)}{hom(GD)}.$$ [31]

En conséquence,

$$\frac{hom(HC)}{hom(DE)} = \frac{hom(AG)}{hom(GE)} \cdot \frac{hom(CG)}{hom(GD)}$$

$$= \frac{hom(AG) \cdot hom(CG)}{hom(GE) \cdot hom(GD)}\ ;$$

mais

$$hom(AG) = d_A\ ,\ hom(CG) = d_S\ ,$$

$$hom(GD) = d_D \text{ et } hom(GE) = d_E\ ;$$

donc,

26 Cette supposition ne restreint pas la généralité de la démonstration (on peut toujours changer la notation des points D et E).

27 Dans ce cas, le point *A* sera également du même côté que le point *D* par rapport à (C_1) (voir fig. 4 et 4bis).

28 Dans ce cas, le point *A* sera également du même côté que *D* et *E*, car, par construction, le point *A* appartient à *hem(G)* (voir fig. 5 et 6).

29 Pour la figure 4, *arc(BE)* est plus petit qu'un quadrant, car *arc(DE)* est plus petit qu'une demi-circonférence de grand cercle et $arc(BE) \leq arc(BD)$; d'autre part, le point *B* est le pôle du grand *cercle(GF)*, donc, *arc(BE)* est situé dans *hem(B)*.

30 *Les Sphériques* d'Ibn Hūd, § 11 (chapitre 2), folio 83^v : “Si, sur la surface de la sphère, deux figures trilatères ont un angle égal à un angle, et si deux autres de leurs angles <pris chacun dans une des figures> sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, alors les rapports des homologues des deux côtés qui sous-tendent les deux angles égaux, aux homologues des deux côtés qui sous-tendent les deux autres angles qui sont égaux ou <d'une somme> égale à deux droits, sont deux rapports égaux ; et réciproquement. J'entends par l'expression *homologue de l'arc*, la ligne droite qui sous-tend <l'arc> double”.

"إذا كانَتْ زاوِيَتانِ مِنْ زَوايا شَكْلَيْنِ مِنَ الأشْكالِ ذَواتِ الأضْلاعِ الثَلاثَةِ عَلَى بَسيطِ كُرَةٍ مُتَساوِيَتَيْنِ، وكانَتْ زاوِيَتان أُخْرَيان مِنْ زَواياهما إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا، فإنّ نِسْبَةَ نَظيرَي الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ المتَساوِيَتَيْنِ إلى نَظيرَي الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ الأُخْرَيَيْنِ المتَساوِيَتَيْنِ أو المساوِيَتَيْنِ لِقائِمَتَيْنِ، هُما نِسْبَتان مُتَساوِيَتانِ، وَعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً. وأعْني بِقَوْلي نَظيرَ القَوْسِ الخَطَّ المسْتَقيمَ الّذي يُوَتِّرُ ضِعْفَها".

31 L'application directe de la proposition 10 donnerait : $\frac{hom(BE)}{hom(DE)} = \frac{hom(HB)}{hom(HC)} \cdot \frac{hom(CG)}{hom(GD)}$.

$$\frac{hom(HC)}{hom(DE)} = \frac{d_S \cdot d_A}{d_D \cdot d_E} \cdot$$

C.Q.F.D.

On trouve, dans *Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibnʿ Irāq, une proposition, littéralement similaire à celle-ci, à l'exception d'une seule différence : Ibn ʿIrāq utilise le terme *Sinus*, tandis qu'Ibn Hūd utilise le terme *homologue*, c'est-à-dire le double du *Sinus* :

$$hom\ x = 2\ Sin\, x = crd\left(2x\right).$$

Exposons, à présent, cette proposition mentionnée de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq.

Proposition (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, proposition 22, livre III)[32] (voir la figure 7).

"Si, sur la surface d'une sphère, deux grands cercles sont inclinés l'un sur l'autre, et si l'on marque sur l'un d'eux, deux points qui ne sont pas diamétralement opposés et desquels on mène deux perpendiculaires à l'autre cercle, alors le rapport du sinus de l'arc situé entre les pieds des deux perpendiculaires, au sinus de l'arc situé entre les deux points marqués, est comme le rapport du rectangle contenu par le diamètre de la sphère et le diamètre du cercle qui est tangent à l'un des deux cercles et parallèle à l'autre, au rectangle contenu par les diamètres des deux cercles qui passent par les deux points marqués sur l'un des deux grands cercles, et qui sont parallèles à l'autre de ces deux cercles.

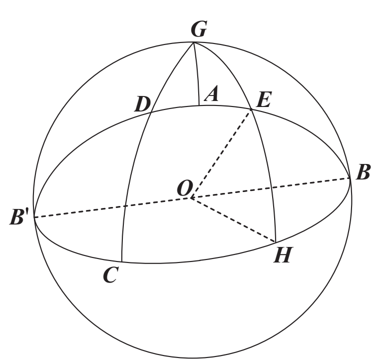


Fig. 7

Que AB et BC soient deux grands cercles sur une sphère et que chacun d'eux soit incliné sur l'autre ; marquons sur AB deux points, D, E, et menons des points D et E, au <cercle> BC, les deux perpendiculaires DC, EH.

Je dis que le rapport du sinus de <l'arc> CH, au sinus de <l'arc> DE, est comme le rapport du rectangle contenu par les diamètres d'un grand cercle et du cercle qui est tangent à AB et parallèle à BC, au rectangle contenu par les diamètres des deux cercles qui passent par les points D et E et qui sont parallèles au cercle BC.

En effet, prolongeons les deux arcs CD, HE, jusqu'au pôle du cercle BC, qui est le point G ; menons du point G au cercle AB, la perpendiculaire GA. Puisque chacun des deux angles, GAE, GHB, est droit et que l'angle AEG est égal à l'angle BEH, le rapport du sinus de l'arc AG au sinus de l'arc GE est comme le rapport du sinus de l'arc BH au sinus de l'arc BE ; et d'après le tracé de cette figure, le rapport du sinus de l'arc CH au sinus de l'arc DE est composé du rapport du sinus de l'arc CG au sinus de l'arc GD et du rapport du sinus de l'arc BH au sinus de l'arc BE. Mais nous avons montré que ce <dernier> rapport est comme le rapport du sinus de l'arc AG au sinus de l'arc GE, donc, le rapport du sinus de l'arc CH au sinus de l'arc DE est comme le rapport du rectangle contenu par le sinus de l'arc CG et le sinus de l'arc GA, au rectangle contenu par le sinus de l'arc DG et le sinus de l'arc GE. Mais le sinus de l'arc CG est le demi diamètre de la sphère, le sinus de l'arc AG est le demi diamètre du cercle qui passe par le point A et qui est parallèle au cercle BC et ce cercle est tangent au cercle AB ; d'autre part, les sinus des arcs DG, GE sont les demi diamètres de deux cercles qui passent par les deux points D, E et qui sont parallèles au cercle BC. C'est ce que nous voulions démontrer."

32 *Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, p. 97-98 (du texte arabe, trad. all. p. 238-239).

ج ز هُوَ نصْفُ قُطْرِ الكُرَةِ وجَيْبَ قَوْسِ ا ز هُوَ نصْفُ قُطْرِ الدائِرَةِ الّتِي تَمُرُّ بنُقْطَةِ ا وتُوازي دائِرَةَ ب ج وهَذِهِ الدائِرَةُ هِيَ مُماسّةٌ لدائِرَةِ ا ب. وأمّا جَيْبا قَوْسَي د ز ز ه فهُما نصْفا قُطْرَي الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تَمُرّانِ بنُقْطَتَيْ د ه وتُوازِيانِ دائِرَةَ ب ج، وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّن".

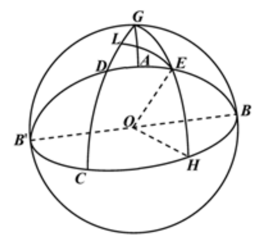


Fig. 8

Ibn ʿIrāq commente la démonstration de Ménélaüs, il écrit[33] (voir la figure 8) :

"Quant à son propos que le rapport du sinus de CH au sinus de DE est comme le rapport du rectangle contenu par le diamètre de la sphère et le diamètre du cercle qui est tangent au <cercle> AB et qui est parallèle au <cercle> BC, au rectangle contenu par les diamètres des deux cercles parallèles au <cercle> BC et qui passent par les deux points D et E, il devient clair, selon nos principes, que l'on peut faire comme suit : Menons du point E une perpendiculaire EL au <cercle> CD ; alors le rapport du sinus de l'arc CH au sinus de l'arc EL est comme le rapport du sinus de l'arc HG au sinus de l'arc EG et le rapport du sinus de l'arc EL au sinus de l'arc ED est comme le rapport du sinus de l'arc AG au sinus de l'arc GD[34] et le rapport du sinus de l'angle G au sinus de l'arc DE est comme le rapport du sinus de l'angle D au sinus de l'arc GE et comme le rapport du sinus de l'angle E au sinus de l'arc GD…".

(تَعْليق ابن عراق:) "أما قَوْلُهُ إنّ نسْبَةَ جَيْب ج ح إلَى جَيْب د ه كَنسْبَةِ السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ بِهِ <قُطْرُ الكُرَةِ وقُطْرُ الدائِرَةِ الّتِي تُماسُّ ا ب وتُوازي ب ج إلَى السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ بِهِ> قُطْرا الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تُوازِيانِ دائِرَة ب ج وتَمُرّانِ عَلَى نُقْطَتَي د ه، فإنّهُ تَبَيَّنَ بحَسَبِ أصولِنا هَكَذا: نُخْرِجُ من نُقْطَةِ ه عَمودَ ه ل عَلَى ج د، فنسْبَةُ جَيْب قَوْسِ ج ح إلَى جَيْب قَوْسِ ه ل كَنسْبَةِ جَيْب قَوْسِ ح ز إلَى جَيْب قَوْسِ ه ز ونسْبَة جَيْب قَوْسِ ه ل إلَى جَيْب قَوْسِ ه د كَنسْبَةِ جَيْب قَوْسِ ا ز إلَى جَيْب قَوْسِ <ز د ونسْبَةُ جَيْبِ زاوِيَةِ ز إلَى جَيْب قَوْسِ> د ه كَنسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ د إلَى جَيْبِ قَوْسِ ز ه وكَنسْبَةِ جَيْبِ زاوية ه إلَى <جَيْبِ> قَوْسِ ز د..."

الشَكْلُ الثاني والعشرون (كُرَوِيّات مانالاوس–ابن عِراق، المَقالَةُ الثالِثَة): "إذا كانَت في بَسيطِ كُرَةٍ دائِرَتانِ مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ وكانَتْ كُلُّ واحِدَةٍ مِنْهُما مائِلَةً عَلَى الأُخْرَى وَتُعُلِّمَ عَلَى إحْداهُما نُقْطَتانِ غَيْرُ مُتَقابِلَتَيْنِ عَلَى القُطْرِ وأُخْرِجَ مِنْهُما إلَى الدائِرَةِ الأُخْرَى عَمودان، فإنّ نسْبَةَ جَيْبِ القَوْسِ الواقِعَةِ فيما بَيْنَ مَسْقَطَي العَمودَيْنِ إلَى جَيْبِ القَوْسِ الّتِي فيما بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ اللّتَيْنِ تُعُلِّمَتا كَنسْبَةِ السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ بِهِ قُطْرُ الكُرَةِ وقُطْرُ الدائِرَةِ الّتِي تُماسُّ إحْدَى الدائِرَتَيْنِ وتُوازي الدائِرَةَ الأُخْرَى، إلَى السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ بِهِ قُطْرا الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تَمُرّانِ بالنُقْطَتين اللّتَيْنِ تُعُلِّمَتا عَلَى إحْدَى الدائِرَتَيْنِ العَظيمَتَيْنِ وتُوازِيانِ الدائِرَةَ الأُخْرَى مِنْهُما. فَلَيَكُنْ عَلَى كُرَةٍ دائِرَتان مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ عَلَيْهُما ا ب ب ج، ولَيَكُنْ كُلُّ واحِدَةٍ مِنْهُما مائِلَةً عَلَى الأُخْرَى ونَتَعَلَّمُ عَلَى ا ب نُقْطَتَي د ه ونُخْرِجُ من نُقْطَتَي د ه إلَى ب ج عَمودَي د ج ه ح. فأقولُ إنّ نسْبَةَ جَيْب ج ح إلَى جَيْب د ه كَنسْبَةِ السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ به قُطْرُ الدائِرَةِ العَظيمَةِ وقُطْرُ الدائِرَةِ الّتِي تُماسُّ ا ب وتُوازي ب ج إلَى السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ به قُطْرا الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تَمُرّانِ بنُقْطَتَي د ه وتُوازيان دائِرَةَ ب ج. لأنّا نُخْرِجُ قَوْسَيْ ج د ح ه إلَى قُطْب دائِرَةِ ب ج الّذي هُوَ نُقْطَةُ ز ونُخْرِجُ من نُقْطَةِ ز إلَى دائِرَةِ ا ب عَمودَ ز ا، فَلأنّ كُلَّ واحِدَةٍ مِنْ زاوِيَتَيْ ز ا ه ز ح ب قائِمَةٌ وَأنّ زاوِيَةَ ا ه ز مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ ب ه ح، يَكونُ نسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا ز إلَى جَيْب قَوْسِ ز ه كَنسْبَةِ جَيْب قَوْسِ ب ح إلَى جَيْب قَوْسِ ب ه، وَمِنْ أجْلِ ما عَلَيْهِ رَسْمُ هَذِهِ الصورَةِ يَكونُ نسْبَةُ جَيْب قَوْسِ ج ح إلَى جَيْب قَوْسِ د ه مُؤَلَّفَةً من نسْبَةِ جَيْب قَوْسِ ج ز إلَى جَيْب قَوْسِ ز د وَمِنْ نسْبَةِ جَيْب قَوْسِ ب ح إلَى جَيْب قَوْسِ ب ه ؛ وهَذِهِ النسْبَةُ قد بَيّنّا أنّها كَنسْبَةِ جَيْب قَوْسِ ا ز إلَى جَيْب قَوْسِ ز ه فنسْبَةُ جَيْب قَوْسِ ج ح إلَى جَيْب قَوْسِ د ه كَنسْبَةِ السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ به جَيْبُ قَوْسِ ج ز وجَيْبُ قَوْسِ ز ا إلَى السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ به جَيْبُ قَوْسِ د ز وجَيْبُ قَوْسِ ز ه. ولَكِنَّ جَيْبَ قَوْسِ

33 Les Sphériques de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, p. 99 (du texte arabe, trad. all. p. 240).

34 Dans *Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, on trouve AD, au lieu de GD (p. 99 du texte arabe et p. 240 de la traduction allemande).

Analyse (voir la figure 8):

Considérons les couples de triangles sphériques (*GCH, GLE*) et (*DLE, DAG*) ; les deux couples choisis vérifient l'hypothèse de la proposition n° 11 d'Ibn Hūd[35] ; donc[36],

$$\frac{Sin(CH)}{Sin(EL)}=\frac{Sin(HG)}{Sin(EG)}{}^{37} \quad \text{et} \quad \frac{Sin(EL)}{Sin(ED)}=\frac{Sin(AG)}{Sin(GD)} .$$

En composant les membres des proportions deux à deux, on obtient :

$$\frac{Sin(CH)}{Sin(DE)}=\frac{Sin(HG)\cdot Sin(AG)}{Sin(EG)\cdot Sin(GD)} ,$$

mais $Sin(AG) = ½\, d_A$, $Sin(HG) = ½\, d_S$, $Sin(GD)) = ½\, d_D$ et $Sin(GE) = ½\, d_E$,

donc

$$\frac{Sin(CH)}{Sin(DE)}=\frac{d_S\cdot d_A}{d_D\cdot d_E} .$$

III- TEXTES MANUSCRITS ET TRADUCTIONS

Proposition n° 9 (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd (voir la figure 9))[38]

"Soient deux grands cercles sur la surface de la sphère, sur l'un desquels on sépare, à partir de l'un de leurs deux points d'intersection, deux arcs, chacun plus petit qu'un demi-cercle. On mène de l'extrémité de <chacun de ces> deux arcs, deux perpendiculaires au plan de l'autre cercle. Alors le rapport de la corde du double de l'un des deux arcs à la corde du double de l'autre arc, est comme le rapport de la perpendiculaire menée de l'extrémité du <premier arc> à la perpendiculaire menée de l'extrémité de l'autre arc, que les arcs soient du même côté ou non.

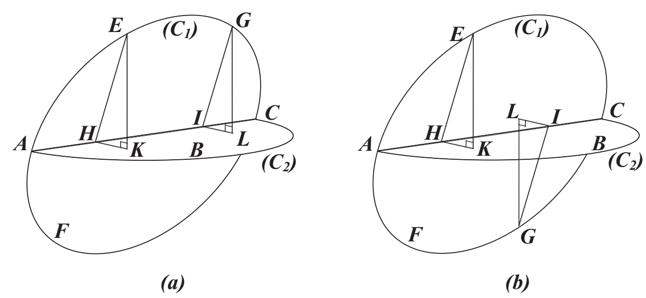


Fig. 9

35 Le texte de cette proposition, coïncide presque littéralement avec le texte de la proposition de Ménélaüs :
" Si deux figures trilatères ont un angle égal à un angle, et si deux autres de leurs angles <pris chacun dans une des figures> sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, alors les rapports des sinus des deux côtés qui sous-tendent les deux angles égaux, aux sinus des autres côtés qui sous-tendent les deux autres angles - qui sont égaux ou d'une somme égale à deux droits - sont deux rapports égaux ; et réciproquement. " (Voir *Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʿIrāq, proposition 2, livre III, p. 64 du texte arabe, trad. all. p. 197).

"الشَكْلُ الثاني،

إذا كانَتْ زاوِيَتانِ مِنْ زَوايا شَكْلَيْنِ مِنَ الأَشْكالِ ذَواتِ الأَضْلاعِ الثَلاثَةِ مُتَساوِيَتَيْنِ؛ وكانَتْ زاوِيتانِ أُخْرَيانِ <مِنْ زَواياهما> إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ إذا جُمِعَتا لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ، فإنّ نِسْبَةَ جَيْبَي الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ المُتَساوِيَتَيْنِ <إلى جَيْبَي الضِلْعَيْنِ الآخَرَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ الأُخْرَيَيْنِ المُتَساوِيَتَيْنِ> أو المُساوِيَتَيْنِ لِقائِمَتَيْنِ <إذا جُمِعَتا>، هُما نِسْبَتان مُتَساوِيَتان، وَعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً".

36 Bien que dans la proposition n° 11, Ibn Hūd utilise l'*homologue* d'un arc et que dans la proposition correspondante, Ménélaüs utilise le *Sinus*, cette différence est négligeable, car $hom(x) = 2\, Sin(x)$.

37 L'application directe de la proposition 11 donnerait : $\frac{Sin(CH)}{Sin(HG)}=\frac{Sin(EL)}{Sin(EG)}$.

38 *Les Sphériques* d'Ibn Hūd, folios 82^v-83^r.

Exemple : soient, sur la surface de la sphère, les deux grands cercles ABCD, AEC /[83^r] qui se coupent en deux points A et C. On sépare du cercle ACEF deux arcs AE et AG, chacun plus petit qu'un demi-cercle. On mène de E et G, deux perpendiculaires au plan du cercle ABCD.

Je dis que le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG, est comme le rapport de la perpendiculaire menée du point E à la perpendiculaire menée du point G.

Démonstration : l'intersection des deux cercles ABCD, AECF est leur diamètre, que ce soit AC. Des deux points E et G, menons deux perpendiculaires sur AC, soient EH et GI. Si elles étaient perpendiculaires au plan du cercle ABC, on aurait démontré ce que nous voulions, car elles seraient dans ce cas les sinus des deux arcs AE et AG. Sinon, menons des deux points E et G, deux perpendiculaires au plan du cercle ABCD, soient EK et GL. Elles sont parallèles. Menons également les deux droites LI, KH. Les deux droites EH et GI sont également parallèles. Mais si deux droites entourant un certain angle sont parallèles à deux autres droites entourant un autre angle, alors les deux angles sont égaux[39], par conséquent, l'angle HEK est égal à l'angle IGL. Mais les deux angles EKH, GLI sont droits, donc les deux triangles EHK, GIL sont semblables ; par suite, le rapport de EH à GI est comme le rapport de EK à GL . Mais le rapport de EH à GI est comme le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG - puisque ce sont leurs sinus - donc le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG est égal au rapport de la perpendiculaire EK à la perpendiculaire GL.

Si l'un des deux arcs AE, AG est du côté de AF, on montre ce que nous avons dit de la même manière. C'est ce que nous voulions montrer".

Proposition n° 10 (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd)[40]

"Après avoir introduit ce qui précède, que les deux arcs AD et CE se coupent entre les deux arcs AB et BC au point F, et qu'ils soient des arcs de grands cercles situés sur une sphère, et que chacun d'eux soit plus petit qu'un demi-cercle.

Je dis que le rapport de la corde du double de l'arc AB à la corde du double de l'arc BE est composé du rapport de la corde du double de l'arc AD à la corde du double de l'arc DF et du rapport de la corde du double de l'arc FC à la corde du double de l'arc CE.

Démonstration (voir la figure 10) : menons des points A, E, F, des perpendiculaires au plan du cercle de l'arc BC, soient les perpendiculaires AG, EH, FI, et posons la perpendiculaire FI moyenne proportionnelle entre les deux perpendiculaires AG et EH. Alors, le rapport de AG à EH est composé du rapport de AG à FI et du rapport de FI à EH. Quant au rapport de la perpendiculaire AG à la perpendiculaire EH, nous avons montré dans ce qui précède, qu'il est comme le rapport de la corde du double de l'arc AB à la corde du double de l'arc BE ; quant au rapport de la perpendiculaire AG à la perpendiculaire FI, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc AD à la corde du double de l'arc DF ; et quant au rapport de la perpendiculaire FI à la perpendiculaire EH, nous montrons qu'il est comme le rapport de la corde du double de l'arc FC à la corde du double de l'arc CE. Alors le rapport de la corde du double de l'arc AB à la corde du double de l'arc BE, est composé du rapport de la corde du double de l'arc AD à la corde du double de l'arc FD et du rapport de la corde du double de l'arc CF à la corde du double de l'arc CE.

Je dis également que, dans le cas de la diérèse, le

39 Cette affirmation manque de précision. Les angles peuvent être supplémentaires.
40 *Les Sphériques* d'Ibn Hūd, folios 83^r-83^v.

rapport de la corde du double /[83v] de l'arc AE à la corde du double de l'arc BE est composé du rapport de la corde du double de l'arc AF à la corde du double de l'arc FD et du rapport de la corde du double de l'arc CD à la corde du double de l'arc CB.

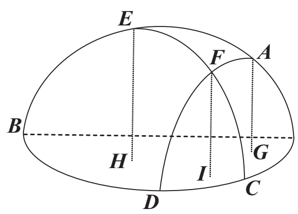


Fig. 10

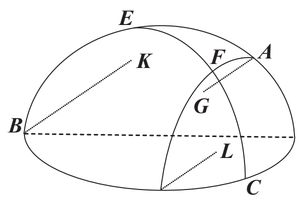


Fig. 11

Démonstration (voir la figure 11) : menons des points A, B et D, au plan du cercle de l'arc CFE, les perpendiculaires AG, BK, DL et posons DL moyenne proportionnelle entre les deux perpendiculaires AG et BK. Le rapport de la perpendiculaire AG à la perpendiculaire BK est donc composé du rapport de la perpendiculaire AG à la perpendiculaire DL et du rapport de la perpendiculaire DL à la perpendiculaire BK. Quant au rapport de la perpendiculaire AG à la perpendiculaire BK, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc BE ; quant au rapport de la perpendiculaire AG à la perpendiculaire DL, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc AF à la corde du double de l'arc FD ; et quant au rapport de la perpendiculaire DL à la perpendiculaire BK, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc DC à la corde du double de l'arc CB, comme on l'a montré dans ce qui précède. Alors le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc EB est composé du rapport de la corde du double de l'arc AF à la corde du double de l'arc FD et du rapport de la corde du double de l'arc CD à la corde du double de l'arc CB. C'est ce que nous voulions montrer ".

Proposition n° 20 (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd (voir la figure 12))[41]

"Si, sur la surface d'une sphère, deux grands cercles sont inclinés l'un sur l'autre, si l'on marque sur l'un d'eux, deux points qui ne sont pas diamétralement opposés, et si, de ces deux <points> on mène, à l'autre cercle, deux perpendiculaires[42], alors le rapport de l'homologue de l'arc situé entre les pieds des deux perpendiculaires, à l'homologue de l'arc qui est entre les deux points marqués, est comme le rapport du rectangle contenu par le diamètre de la sphère et le diamètre du cercle qui est tangent à l'un des deux cercles et parallèle à l'autre, au rectangle contenu par les diamètres des deux cercles qui passent par les deux points marqués sur l'un des deux grands cercles, et qui sont parallèles à l'autre cercle.

Exemple : que AB, BC soient deux grands cercles sur une sphère et qu'ils soient inclinés l'un sur l'autre. Marquons sur <le cercle> AB, deux points D, E, et menons des points D, E au <cercle> BC deux perpendiculaires, soient DC, EH.

Je dis que le rapport de l'homologue de l'arc CH à l'homologue de l'arc DE est comme le rapport du rectangle contenu par le diamètre de la sphère et le diamètre du cercle parallèle au cercle BC et tangent au cercle AB, au rectangle contenu par les diamètres des deux cercles passant par les deux points D, E et parallèles à BC.

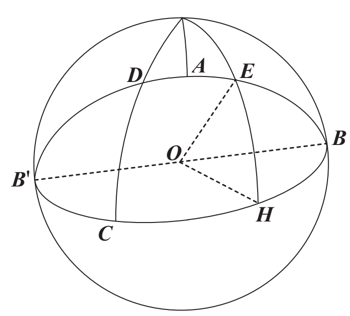


Fig. 12

41 *Les Sphériques* d'Ibn Hūd, folios 88v-89r.
42 Les perpendiculaires considérées sont des arcs des grands cercles.

Démonstration : prolongeons les deux arcs DC, EH jusqu'au pôle du cercle BC, qui est le point G, et menons du point G au cercle AB, une perpendiculaire GA. Puisque chacun des deux angles GAE, GHB est droit et que l'angle AEG est égal à l'angle BEH, /[89r] le rapport de l'homologue de l'arc AG à l'homologue de l'arc GE, est comme le rapport de l'homologue de l'arc BH à l'homologue de l'arc BE. Et étant donné que les deux arcs BED, GEH se coupent entre les deux arcs BC, GC, alors, le rapport de l'homologue de l'arc HC à l'homologue de l'arc ED est composé du rapport de l'homologue de BH à l'homologue de BE et du rapport de l'homologue de CG à l'homologue de GD. Mais on a montré que le rapport de l'homologue de HB à l'homologue de BE est comme le rapport de l'homologue de l'arc AG à l'homologue de l'arc GE, donc le rapport de l'homologue de l'arc HC à l'homologue de l'arc DE est comme le rapport du rectangle contenu par l'homologue de l'arc CG et l'homologue de l'arc GA, au rectangle contenu par l'homologue de l'arc DG et l'homologue de l'arc GE, car le rapport de l'un des deux rectangles à l'autre est composé des rapports de leurs côtés. Mais l'homologue de l'arc CG est le diamètre de la sphère et l'homologue de l'arc AG est le diamètre du cercle passant par le point A et parallèle au cercle BC, et ce cercle est tangent au cercle AB. Quant aux homologues des deux arcs GD, GE, ce sont les diamètres des deux cercles qui passent par les deux points D, E parallèlement au cercle BC. C'est ce que nous voulions montrer".

ا ب ج د ا ه ج، وَهُما مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ الّتي في بَسيطِ الكُرَةِ / [٨٣و] وَقَدْ تَقاطَعَتا عَلَى نُقْطَتَيْ ا ج، وفُصِلَ[١٠] مِنْ دائِرَةِ ا ج ه و قَوْسانِ كُلُّ واحِدَةٍ[٢] مِنْهُما أقَلُّ من نصْفِ[٣] دائِرَةٍ، وهُما ا ه ا ز. وأُخْرِجَ[٤] مِنْ ه ز عَمودانِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا ب ج د ؛ فَأقولُ : إنّ نسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا ه إلَى وَتَرِ[٥] ضِعْفِ قَوْسِ ا ز كَنسْبَةِ العَمودِ الّذي أُخْرِجَ مِنْ نُقْطَةِ ه إلَى العَمودِ الّذي أُخْرِجَ مِنْ نُقْطَةِ ز. بُرهانُ[٦] ذَلِكَ : إنّ الفَصْلَ المشْتَرَكَ لِدائِرَتَيْ ا ب ج د ا ه ج و هُما قُطْراهُما، فَلْيَكُنْ قُطْرَ[٧] ا ج، ونُخْرِجُ من نُقْطَتَيْ ه ز عَمودَيْنِ عَلَى ا ج وَهُما ه ح ز ط ؛ فَإنْ كانا عَمودَيْنِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا ب ج فَقَدْ تَبَيَّنَ ما أرَدْنا، لأنّهُما جَيْبا قَوْسَيْ ا ه ا ز. وإنْ لم يَكونا كذَلِكَ، فأنّا نُخْرِجُ من نُقْطَتَيْ ه ز عَمودَيْنِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا ب ج د، وهما ه ك ز ل ، فَيَكونا مُتَوازِيَيْنِ ؛ ونُخْرِجُ أيْضاً خَطَّيْ ل ط ك ح. وخَطّا ه ح ز ط أيْضاً مُتَوازِيانِ ؛ وإنْ وازَى خَطّانِ يُحيطانِ بِزاوِيَةٍ خَطَّيْنِ آخَرَيْنِ يُحيطانِ بِزاوِيَةٍ أُخْرَى، فَإنّ الزاوِيَتَيْنِ مُتَساوِيَتانِ[٨] ؛ فَزاوِيَةُ ح ه ك مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ ط ز ل. وزاوِيَتا ه ك ح ز ل ط قائِمَتان ؛ فَمُثَلّثا ه ح ك ز ط ل مُتَشابهانِ ؛ فنسْبَةُ ه ح إلَى ز ط كَنسْبَةِ ه ك إلَى ز ل، وَلَكِنّ نسْبَةَ ه ح إلَى ز ط كَنسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا ز، لأنّهُما جَيْباهما ؛ فنسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا ز كَنسْبَةِ عَمودِ ه ك إلَى عَمودِ ز ل. وكذَلِكَ نُبَيِّنُ كما قُلْنا، لَوْ أنّ إحْدَى[٩] قَوْسَيْ ا ه ا ز مِنْ جِهَةِ ا و. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبيِّن.

ط - <شَكْل رقم ٩>

كُلُّ دائِرَتَيْنِ مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ الّتي تَقَعُ في بَسيطِ الكُرَةِ، تُفْصَلُ مِنْ إحْداهُما قَوْسانِ اقَلُّ مِنْ نصْفَيْ دائِرَةٍ مِمّا يَلي إحْدَى نُقْطَتَيْ تَقاطُعِهِما، ويُخْرَجُ مِنْ طَرَفَيِ القَوْسَيْنِ عَمودانِ عَلَى سَطْحِ الدائِرَةِ الأُخْرَى؛ فَإنّ نسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ أحَدِ القَوْسَيْنِ إلَى وَتَرِ ضِعْفِ القَوْسِ الأُخْرَى مِنْهُما كَنسْبَةِ العَمودِ الخارِجِ مِنْ طَرَفِها إلَى العَمودِ الخارِجِ مِنْ طَرَفِ القَوْسِ الأُخْرَى، كانَتِ القَوْسانِ جَميعاً في جِهَةٍ واحِدَةٍ أو في جِهَتَيْنِ مُخْتَلِفَتَيْنِ ؛ مِثالُ ذَلِكَ: دائِرَتا

ي - <شكل رقم ١٠>

وإذْ قَدَّمْنا هَذِهِ المُقَدِّمَةَ، فَلْتَتَقاطَعْ فيما بَيْنَ قَوْسَيْ ا ب ب ج قَوْسا ا د ج ه عَلَى نُقْطَةِ و، ولتَكُنْ هَذِهِ القِسِيُّ من الدَوائِرِ العِظامِ الّتي تَقَعُ في الكُرَةِ، ولتَكُنْ كُلُّ قَوْسٍ مِنْها أقَلَّ مِنْ نصْفِ دائِرَةٍ ؛ فَأقولُ، إنّ نسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا ب إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب ه مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ د و، وَمِنْ نسْبَةِ وَتَرِ

ضِعْفِ قَوْسِ و جـ إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ[10] قَوْسِ جـ هـ. وبُرْهانُ ذَلِكَ : أَنّا نُخْرِجُ من نُقَطِ[11] ا هـ و أعْمِدَةً عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ قَوْسِ ب جـ، وهِيَ أعْمِدَةُ ا ز هـ ح و ط، وَنَجْعَلُ عَمودَ و ط وَسَطاً في النسْبَةِ بَيْنَ عَمودَيْ ا ز هـ ح ؛ فَتَكونُ نسْبَةُ ا ز إِلَى هـ حـ مُؤَلَّفَةً من نِسْبَةِ ا ز إِلَى و ط وَمِنْ نسْبَةِ و ط إِلَى هـ حـ. فَأَمّا نسْبَةُ عَمودِ ا ز إِلَى عَمودِ هـ حـ فَقَدْ بَيَّنّا بالمُقَدِّمَةِ، أنّها كَنسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا ب إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب هـ، وأمّا نسْبَةُ عَمودِ ا ز إِلَى عمود و ط فكَنسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا د إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ د و، وأمّا نِسْبَةُ عَمودِ و ط إِلَى عَمودِ هـ حـ فَتَتَبَيَّنُ أنّها كَنسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و جـ إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جـ هـ. فنسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا ب إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب هـ مُؤَلَّفَةٌ[12] مِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا د إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و د، وَمِنْ نسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ[13] قَوْسِ جـ و إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جـ هـ ؛ وَأقولُ أيْضاً إنّهُ عَلَى جهَةِ التَفْصيل تَكونُ نسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ /[٨٣ظ] قَوْسِ ا هـ إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب هـ مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ <وَتَرِ>[14] ضِعْفِ قَوْسِ ا و إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و د، وَمِنْ نسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جـ د إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جـ ب. وَبُرْهانُ ذَلِكَ : أنّا نُخْرِجُ من نُقْطِ[15] ا ب د إِلَى سَطْحِ دائِرَةِ قَوْسِ جـ و هـ أعْمِدَةَ ا ز ب ک د ل، وَنَجْعَلُ د ل وَسَطاً في النسْبَةِ بَيْنَ عَمودَيْ ا ز ب ک، فَتَكونُ نسْبَةُ عَمودِ[16] ا ز إِلَى عَمودِ ب ک مُؤَلَّفَةً من نسْبَةِ عَمودِ ا ز إِلَى عَمودِ د ل، وَمِنْ نسْبَةِ عَمودِ د ل إِلَى عَمودِ ب ک. فأمّا نسْبَةُ عَمودِ ا ز إِلَى عَمودِ ب ک فكَنسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا هـ إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب هـ، وأما نسْبَةُ عَمودِ ا ز إِلَى عَمودِ د ل، فكَنسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا و إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و د، وأمّا نسْبَةُ عَمودِ د ل إِلَى عَمودِ ب ک، فهِيَ كَنسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ د جـ إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جـ ب، كَما تَبَيَّنَ في المُقَدِّمَةِ الّتي قَدَّمْنا. فنسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا هـ إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ هـ ب مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا و إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ د، وَمِنْ نَسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جـ د إِلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جـ ب ؛ وذَلِكَ ما أَرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ.

كَ – <شكل رقم ٢٠>

إذا كانَ في بَسيطِ كُرَةٍ دائِرَتانِ مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ وَكانَتْ كُلُّ واحِدَةٍ مائِلَةً عَلَى الأُخْرَى وتُعُلِّمَتْ عَلَى إحْداهُما نُقْطَتان غَيْرُ مُتَقابِلَتَيْنِ عَلَى القُطْرِ وأُخْرِجَ مِنْهُما[17] إِلَى الدائِرَةِ الأُخْرَى عَمودانِ[18] فإنّ نسْبَةَ نَظيرِ القَوْسِ الواقِعَةِ في ما بَيْنَ مَسْقَطَي العَمودَيْنِ إِلَى نَظيرِ القَوْسِ الّتي في ما بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ اللّتَيْنِ تُعُلِّمَتا كَنسْبَةِ السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ به قُطْرُ الكُرَةِ وقُطْرُ الدائِرَةِ الّتي تُماسُّ إحْدَى الدائِرَتَيْنِ وتُوازي الدائِرَةَ الأُخْرَى إِلَى السَطْحِ القائِمِ الزَوايا الّذي يُحيطُ به قُطْرُ الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تَمُرّانِ بالنُقْطَتَيْنِ اللّتَيْنِ[19] تُعُلِّمَتا عَلَى إحْدَى الدائِرَتَيْنِ العَظيمَتَيْنِ وتُوازيانِ[20] الدائِرَةَ الأُخْرَى. <مِثالُ ذَلِكَ> : فَلتَكُنْ عَلَى كُرَةٍ دائِرَتانِ عَظيمَتانِ[21]، عَلَيْهُما ا ب ب جـ وَلتَكُنْ كُلُّ واحِدَةٍ مِنْهُما مائِلَةً عَلَى الأُخْرَى ويُتَعَلَّمُ عَلَى ا ب مِنْهُما نُقْطَتا د هـ ونُخْرِجُ من نُقْطَتَيْ د هـ إِلَى ب جـ عَمودَيْ[22] د جـ هـ ح [ي]. فَأقولُ إنّ نسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ جـ ح إِلَى نَظيرِ قَوْسِ د هـ كَنسْبَةِ السَطْحِ القائِمِ الزاوِيَةِ الّذي يُحيطُ بِهِ قُطْرُ الكُرَةِ وقُطْرُ الدائِرَةِ المُوازِيَةِ لِدائِرَةِ ب جـ الّتي تُماسُّ دائِرَةَ ا ب إِلَى السَطْحِ القائِمِ الزاوِيَةِ الّذي يُحيطُ بِهِ قُطْرُ الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تَمُرّانِ بنُقْطَتَي د هـ وتُوازيانِ[23] ب جـ. بُرْهانُهُ : أنّا نُخْرِجُ قَوْسَيْ د جـ هـ ح إِلَى قُطْبِ دائِرَةِ ب جـ الّذي هُوَ نُقْطَة ز ونُخْرِجُ من ز إِلَى دائِرَةِ ا ب عَمودَ ز ا، فلأنّ كُلَّ واحِدَةٍ مِنْ زاوِيَتَيْ ز ا هـ ز ح ب قائِمَةٌ وأنّ زاوِيَةَ ا هـ ز مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ ب هـ ح تَكُونُ / [٨٩و] نسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا ز إِلَى نَظيرِ قَوْسِ ز هـ كَنسْبَةِ[24] نَظيرِ قَوْسِ ب ح إِلَى نَظيرِ قَوْسِ ب هـ. ولما تَقاطَعَ بَيْنَ قَوْسَيْ ب جـ ز جـ قَوْسا ب هـ د ز هـ ح تَكونُ نسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ح جـ إِلَى نَظيرِ قَوْسِ هـ د مُؤَلَّفَةً مِنْ نسْبَةِ نَظيرِ ب ح إِلَى نَظيرِ ب هـ وَمِنْ نسْبَةِ نَظيرِ جـ ز إِلَى نَظيرِ ز د[25] <ونسْبَةُ نَظيرِ ح ب إِلَى نَظيرِ ب هـ>[26] فَقَدْ بَيّنّا أنّها كَنسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ا ز إِلَى نَظيرِ قَوْسِ ز هـ، فنسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ح جـ إِلَى نَظيرِ قَوْسِ د هـ كَنسْبَةِ السَطْحِ الّذي يُحيطُ به نَظيرُ قَوْسِ جـ ز[27] ونَظيرُ قَوْسِ ز ا إِلَى السَطْحِ الّذي يُحيطُ به <نَظيرُ> قَوْسِ

<دَ> زَ ونَظيرُ قَوْسِ زَ هَ لأنّ نِسْبَةَ أحَدِ السَطْحَيْنِ إلَى الآخَرِ هِيَ النِسْبَةُ[٢٨] المؤَلّفَةُ مِن نِسَبِ أضْلاعِهِما وَلَكِنَّ نَظيرَ قَوْسِ جـ زَ هُوَ قُطْرُ الكُرَةِ[٢٩] <ونَظيرُ قَوْسِ ا زَ هُوَ قُطْرُ الدائِرَةِ> الّتِي تَمُرُّ بِنُقْطَةِ اَ وتُوازي دائِرَةَ ب جـ وهَذِهِ الدائِرَةُ هِيَ مُماسَّةٌ لدائِرَةِ ا ب، وأمّا نَظيرا[٣٠] قَوْسَيْ زَ د زَ هـ فَهُما قُطْرا الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تَمُرّانِ بِنُقْطَتَيِ دَ هَ وتُوازيانِ دائِرَةَ ب جـ وذَلِكَ ما أرَدْنا إنْ نُبيِّن.

REMERCIEMENT:

Je tiens à remercier Monsieur le Docteur Philippe Abgrall pour ses suggestions et conseils amicaux.

---

[١] فصل : اللاّم مَطْموسة.

[٢] واحِدَة : واحد.

[٣] نصف : حرفا الصاد والفاء مطموسان.

[٤] وأُخرج : حرفا الراء والجيم مطموسان.

[٥] إلى وتر : حرفا الألف المقصورة والواو مطموسان.

[٦] برهان : أحرف الباء، الراء والهاء مطموسة.

[٧] فليكن قطر : حرفا النون والقاف مطموسان.

[٨] هذا الحكم غير دقيق، فقد يكون، مثلاً، مجموع الزاويتين مساوياً لقائمتين.

[٩] إحدى : أضافها الناسخ على الهامش، بعد أن ضرب بالقلم فوق كلمة نسبة.

[١٠] كُتب على الهامش: "ونبدأ على الترتيب وأمّا على <العكس>، فنسبة وتر <ضعف قوس ألف ها> إلى وتر ضعف قوس با ها مؤلّفةٌ من نسبة وتر ضعف قوس <ألف واو> إلى وتر ضعف قوس واو دال ومن نسبة وتر ضعف قوس جيم دال إلى وتر ضعف قوس جيم با".

[١١] نقط : نقطة.

[١٢] مؤلفة : حرفا اللاّم والفاء مطموسان.

[١٣] ضعف : حرف الفاء مطموس.

[١٤] <وتر> : مطموسة.

[١٥] نقط : نقطة.

[١٦] عمود : أحرف العين والميم والواو مطموسة.

[١٧] منهما : منها.

[١٨] عمودان : عمودين.

[١٩] بالنقطتين اللّتين : بالقطبين اللّذين.

[٢٠] وتوازيان : وتوازي.

[٢١] دائرتان عظيمتان : دائرتين عظيمتين.

[٢٢] عمودي : عمودين.

[٢٣] وتوازيان : ونون زاي.

[٢٤] وُضعت إشارة فوق عبارة "كنسبة" وكُتب على الهامش : لما قد تبيّن في الشكل الحادي عشر من هذا الفصل.

[٢٥] كُتبت قبالة الأسطر ٢-٤ من صفحة المخطوطة العبارة التالية : لأنّه الوجه التاسع في <تأليف> النسبة.

[٢٦] إضافة هذه الفقرة ضروريّ ليصبح المعنى سويّاً.

[٢٧] نظير قوس جيم زاي : قوس زاي.

[٢٨] وُضعت إشارة فوق كلمة "النسبة" وكُتب على الهامش : لما قد تبيّن في الشكل (كلام مطموس) من الفصل الثاني من النوع الأوّل.

[٢٩] وُضعت إشارة إضافة بعد كلمة "كرة" ولكنّه لا يوجد شيءٌ على الهامش.

[٣٠] نظيرا : نظير.

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)
TOMO XV, AGOSTO DE 2012

MATHÉMATICIENS SANS FRONTIÈRES

PIERRE CARTIER*†

Université Paris-Diderot et Institut des Hautes Études Scientifiques.
Email: cartier@ihes.fr

Key words: International Mathematical Union, European Mathematical Society, Colonial wars, Vietnam, Chile, Poland, Algeria, International Congress of Mathematicians.

SYNOPSIS

Here is a largely autobiographical account of various fights for freedom and for the promotion of the international cooperation among mathematicians. We review the involvement of many mathematicians against the colonial ruling, particularly in Vietnam. Also, we recount the difficulties connected with the International Congresses of Mathematicians in our effort to open them as largely as possible.

MATEMÁTICOS SIN FRONTERAS

Palabras clave: Unión Matemática Internacional, Sociedad Matemática Europea, Colonial wars, Vietnam, Chile, Poland, Argelia, Congreso Internacional de Matemáticos.

SINOPSIS

Éste es un reporte largamente autobiográfico de diversas luchas por la libertad y por la promoción de la cooperación internacional entre los matemáticos. Se reseña la participación de muchos matemáticos contra el gobierno colonial, particularmente en Vietnam. Además se cuentan las dificultades relacionadas con los Congresos Internacionales de Matemáticos en nuestro esfuerzo para abrirlos en la mayor medida posible.

* Conférence prononcée à Madrid, à la Residencia de Estudiantes, le 14 octobre 2010. Conférence prononcée à l'Université de Córdoba, Argentine, le 25 novembre 2010, dans le cadre des célébrations pour le Bicentenaire.
† Version corrigée et complétée. Je remercie les lecteurs qui m'ont envoyé des remarques constructives, dont j'ai tenu compte.

L'essence même des mathématiques
est leur liberté
Georg Cantor

L'expression “Médecins sans frontières” a été forgée par Bernard Kouchner, il y a plus de quarante ans; elle a fait florès, il y a des “Reporters sans frontières”, et on peut imaginer sérieusement des “Plombiers sans frontières”[1]. L'idée de base, exprimée par Kouchner quand il était un franc-tireur, et non encore ministre, est celle du *devoir d'ingérence humanitaire*: dans certaines situations, une intervention citoyenne peut, et doit, bousculer les frontières étatiques (ou politiques) et faire fi de la diplomatie. Un tel concept est délicat à manier, et ouvre la porte à des dérives. Ce que je voudrais retracer, c'est pourquoi, et comment, je me sens mathématicien sans frontières, et comment mon action a été influencée par cela. Il s'agit d'une conviction de toute une vie, dans un contexte historique changeant. Si les mathématiques se présentent souvent comme un roc de vérité intangible, nous sommes ici, au nom des mathématiques, en terrain mouvant.

Si ce récit est essentiellement à la première personne, il ne prend tout son sens qu'au sein d'une action globale. Elle fut l'œuvre de francs-tireurs, dans une perspective libertaire, et non selon le modèle léniniste d'une avant-garde de la révolution.

UNE FEUILLE DE ROUTE

Je n'ai pas choisi d'être “sans frontières”. Je suis né à quelques kilomètres de la frontière franco-belge, frontière que j'ai évidemment traversée un nombre incalculable de fois, lorsqu'elle était encore réelle. Ma région natale est une sorte de *no man's land*, traversée d'influences allemandes, belges et françaises, non loin du Luxembourg, et où les familles s'étendent souvent sur plusieurs pays, au gré des péripéties historiques. Dans ma ville natale de Sedan, une forte minorité alsacienne, arrivée en 1870 après la défaite contre les Prussiens, n'avait pas totalement oublié le dialecte alsacien, et dans les campagnes avoisinantes, on pratiquait un patois (latin, et non germanique) proche du wallon. Pour compléter ce *melting pot*, les immigrés italiens ou polonais venus travailler dans la sidérurgie. Dans ma propre famille, ma mère avait une profonde culture française *et* allemande, et pratiquait les deux langues avec la même aisance. N'est-ce pas là une invitation à ignorer les frontières?

Je me souviens parfaitement de l'occasion où j'ai dû définir ce qu'est un “mathématicien sans frontières”. Dans les années 1970-80, à la suite de divers engagements, je me suis trouvé en délicatesse avec les services consulaires des deux grandes puissances de l'époque. A plusieurs reprises, ma demande de visa pour l'U.R.S.S. fut refusée – sans explication: il est clair que j'étais un ennemi du peuple. Du côté des États-Unis, les choses furent plus civilisées. Lors d'une demande de renouvellement de mon visa J1 (alors valable 5 ans), j'ai senti les choses coincer. Finalement, je fus prié de rencontrer le Consul Général des États-Unis à Paris. Dès que je fus introduit dans le magnifique bureau de ce haut fonctionnaire, je compris que c'était un “wasp” typique, du genre presbytérien de la côte Est. Ma fréquentation des milieux huguenots français me donnait la clé du personnage; selon l'apostrophe dans Ruy Blas, de Victor Hugo:

“nous autres véridiques, et Grands d'Espagne”

1 D'ailleurs, la Gendarmerie Nationale a eu un programme de coopération technique “au ras des tuyaux” au Mali, au Sénégal et ailleurs en Afrique.

il fallait pratiquer le “parler vrai”. En bon diplomate, le consul avait plusieurs cartes dans sa manche: allait-il démasquer un agent soviétique, ou le retourner, ou me recruter comme informateur vu mes nombreux contacts internationaux? Le dialogue fut à peu près ceci, tandis qu’il compulsait mon passeport placé devant lui:

– Monsieur le Professeur, vous voyagez beaucoup
– Oui, Monsieur le Consul!
– Dans beaucoup de pays différents
– Oui, Monsieur le Consul!
– Je ne perçois pas le lien logique entre tous ces déplacements
– Monsieur le Consul, bien qu’il en coûte à ma modestie, je vous avouerai que j’ai une certaine réputation scientifique et que je suis très demandé pour des cours ou des conférences

Là-dessus, il poussa un soupir de soulagement, et tamponna mon passeport d’un air solennel. Je dois féliciter l’organisation américaine, car je n’ai plus jamais eu de difficultés avec l’ *Immigration Service*; j’ai été visiblement transféré dans une liste “blanche”.

Ma réponse était aussi sincère que possible. Les relations scientifiques créent entre les mathématiciens du monde un extraordinaire réseau, et il est possible de l’utiliser pour contribuer à la paix et au rapprochement entre nations, ou bien pour venir en aide aux mathématiciens combattants de la liberté. C’est là, me semble-t-il, la mission d’un mathématicien sans frontières.

LES MATHÉMATIQUES, C’EST LA LIBERTÉ

Avant de narrer mes divers engagements, je voudrais commenter la phrase de Georg Cantor placée en exergue. Pour lui, me semble-t-il, il s’agissait d’affirmer que la liberté de création des concepts en mathématiques n’a pas de limitation, en respectant les règles logiques de non-contradiction. Ceci, contrairement aux autres sciences, où l’objet d’étude nous est imposé par la Nature, avec ses limitations intrinsèques. Certains ont voulu par là justifier la liberté de création axiomatique, bornée seulement par la non-contradiction. Pour mon compte, je ne pense pas que les mathématiques puissent se développer de manière totalement autonome, sans se ressourcer périodiquement auprès de la physique - ou déjà d’autres sciences comme la biologie.

Mais l’invocation de la liberté des mathématiques a un autre sens. Au temps de la dictature des colonels en Grèce, les mathématiciens grecs avaient créé une revue mathématique appelée “ελευθερια” (soit “Liberté” en grec ancien ou moderne), et placée sous l’invocation de Cantor. Le rédacteur de cette revue, du nom de Zervos, était un personnage spécial: fils du premier recteur de l’Université d’Athènes au début du 20ième siècle, il vivait dans la maison familiale avec ses cinquante chats (comme Paul Léautaud). Il faisait coexister en lui des fidélités multiples: à l’Église Orthodoxe Grecque, à la monarchie, et à la révolution communiste de Markos (en 1947, durement réprimée par les Britanniques). Sa liberté n’avait pas peur des contradictions! Je comprends que, pour lui, la liberté des mathématiques est ce qui vous donne la capacité spirituelle de résister aux pires situations ou aux pires persécutions. Dans sa geôle, le pianiste Estrella rejouait mentalement ses partitions, d’autres cherchent le secours de la philosophie ou de la religion; on a de nombreux témoignages de rescapés des camps de la mort de Hitler ou Staline, trouvant leur salut dans un recours spirituel intérieur et les mathématiques peuvent fournir ce recours. Pour mon compte, je me souviens que dans les moments les plus pénibles de mon service militaire –au combat en Algérie– je trouvais consolation à lire le livre de Steenrod sur les espaces fibrés, dans mes rares intervalles de calme.

LA GUERRE D'ALGÉRIE

Il est temps de décrire mes engagements de mathématicien sans frontières, qui ont couvert trois périodes:

- la lutte anti-coloniale (Algérie et Vietnam);
- la reconstruction de l'Europe;
- la lutte contre le système soviétique et la tyrannie.

Dans chacune de ces aventures, je ne fus pas seul (loin de là), et mes maîtres Henri Cartan et Laurent Schwartz furent là pour me montrer la voie.

La première grande affaire fut ce qu'on appela "l'affaire Audin", liée à la guerre d'Algérie (et où je ne jouai qu'un rôle fort modeste). A partir de 1954, une guerre se développa de manière insidieuse en Algérie, en réplique lointaine du tremblement de terre de 1945, et de l'abominable répression de Sétif par l'armée française. La défaite de l'armée française en Indochine, en particulier l'humiliation de Dien Bien Phu, démontrait aux musulmans d'Algérie que la puissance coloniale n'était pas invincible. Les derniers gouvernements de la Quatrième République y usèrent leur énergie et leur crédit. Guy Mollet, chef du parti socialiste SFIO de l'époque, élu avec Mendès-France pour faire la paix, marginalisa son coéquipier et développa la guerre. Les choses se dégradèrent fortement au début de 1958. Je passai l'hiver 1957-58 à Princeton, à l'Institute for Advanced Study. J'étais dans une tour d'ivoire, à l'époque gouvernée par Robert Oppenheimer[2], mais la presse libérale américaine renseignait fort bien sur la situation en France. A mon retour en France, en mai 1958, il était clair que tout allait basculer. Ma femme, qui était restée en France et avait milité dans divers groupes contre la guerre, m'expliqua la participation fort réticente des camarades communistes. J'eus, quelque temps après mon retour, une conversation discrète avec le chef local de l'appareil du Parti Communiste Français; je fus convaincu que les intérêts géo-politiques de Moscou misaient sur le retour au pouvoir de De Gaulle en France.

Pendant mon absence, et avant le retour de De Gaulle, avait éclaté l'affaire Audin. Maurice Audin était un jeune assistant de mathématiques à la Faculté des Sciences d'Alger. Communiste convaincu –et membre du Parti Communiste Algérien– il prit le parti de la rébellion. Arrêté en juin 1957 par des militaires *français*, il mourut dans des conditions jamais complètement élucidées – en fait assassiné par un lieutenant Charbonnier. Sa mort fut bien reconnue officiellement vers 1961, mais de vraie enquête, point. Charbonnier a eu une brillante carrière militaire, sans être jamais inculpé.

Maurice Audin était l'assistant du professeur René de Possel (1905-1974). Celui-ci, camarade de promotion (1923) de Henri Cartan à l'ENS, a fait partie des membres fondateurs de Bourbaki et représentait le meilleur analyste du groupe. Mais sa femme Eveline fit une fugue en Espagne avec André Weil, le "primus inter pares" de Bourbaki. Quand elle fut devenue Eveline Weil, de Possel quitta Bourbaki. Il se retrouva en 1941 professeur à Alger[3]. Les études scientifiques existaient à Alger, sous la forme d'une Faculté des Sciences, et d'une classe préparatoire aux Grandes Écoles (une "taupe"). Les étudiants provenaient des

2 Un des pères de la bombe atomique; cela ne lui épargna pas les contrecoups du McCarthysme pour un passé de gauche (dont il ne se cachait pas).

3 De retour en France en 1959, il fut l'un des pionniers de l'informatique, et s'intéressa entre autres projets à la lecture optique des caractères (machine à lire!). Pendant la domination de Bourbaki, de 1955 à 1975, il était relativement marginal parmi les mathématiciens parisiens.

classes riches ou plus modestes[4] de la population non musulmane, appelée globalement “pieds-noirs”, juifs ou chrétiens.

Après la disparition de Maurice Audin, son directeur de thèse René de Possel rassembla ses notes, les mit en ordre, et proposa le tout comme thèse de Doctorat. Le temps avait manqué à Maurice Audin pour développer son œuvre; mais on peut penser, *a posteriori*, que le jury réuni par de Possel et Schwartz a eu raison de parier sur lui. Le coup de génie politique de Laurent Schwartz (et quelques autres) fut l’imparable raisonnement suivant: “Si Audin n’est pas mort, mais empêché, rien n’interdit une soutenance *in absentia*”. On vit donc, dans les amphithéâtres de la Sorbonne, un public nombreux et varié, aux intérêts mathématiques assez modestes, écouter René de Possel présenter, au nom du candidat, quelques résultats d’Analyse Fonctionnelle! On vit François Mauriac –et quelques autres– faire semblant de s’intéresser à une argumentation mathématique. Ce fut un beau coup médiatique!

On aurait pu en rester là, mais on voulait entretenir la flamme. On inventa donc un prix mathématique Maurice Audin, destiné à un jeune mathématicien. Une souscription réunit facilement une somme suffisante pour attribuer le prix quatre ou cinq fois – jusqu’à la fin de la guerre! Mais là, les choses grincèrent[5]. Je me souviens de mes questions:

– Le donnera-t-on à Malliavin?
– Non, car trop réactionnaire, il le refusera avec éclat!
– Alors à Malgrange?
– Tu sais bien qu’il est trop marqué comme communiste!

Difficile d’attribuer un prix, en écartant d’emblée les deux meilleurs, et sans tomber dans la distribution aux copains.

Après la fin de la guerre, début 1962, je devins plus impatient et formulai mes réserves par écrit. Je proposai d’utiliser l’argent restant pour créer une bourse pour un étudiant algérien, ou pour recréer la bibliothèque mathématique d’Alger. La réponse à ma lettre fut, quelques mois plus tard, un appel téléphonique retransmis par ma femme en Grande-Bretagne, où je voyageais, et m’annonçant que j’étais le lauréat pour 1962! J’acceptai, sous la condition que je donnerais l’argent du prix à une ONG[6] protestante, animée par des amis, et qui s’efforçait de panser une (petite) partie des plaies de la guerre en Algérie. Je souhaitais en faire état publiquement, et l’on me pria de ne pas mélanger science et politique! Il s’ensuivit une belle confusion, qui fit disparaître le prix, mais n’empêcha pas ma déclaration. Dans les archives du prix, il n’y a pas de trace de cette année-là![7]

Je ne voudrais pas quitter ce récit de l’Algérie sans adresser une mise en garde contre le *déni de réalité*. Lors de mon long service militaire, je me souviens d’une courte permission à Paris. Vu le développement des transports militaires déjà vers 1960, je pus quitter les hauts-plateaux algériens vers 5h du matin pour me retrouver avant midi au Jardin du Luxembourg. Je quittais un enfer déplaisant –dont le souvenir troubla mes nuits pendant plus de dix ans– pour retrouver un jardin familier et printanier, où de jeunes beautés se dévoilaient au soleil. Mon premier acte fut de téléphoner à Laurent Schwartz qui me pria pour le lendemain chez lui. Là, comme je m’y attendais, était réuni tout l’état-major de la lutte politique contre la guerre: Mendès-

4 L’élitisme républicain avait bien fonctionné, mais pour les européens seulement.
5 L’action scientifico-médiatique est pleine de trappes, et il n’y a pas de raison de taire ce fait.
6 Organisation non gouvernementale.
7 Très récemment, le prix a été recréé, dans le bon sens, avec une mission explicite de coopération entre un mathématicien français et un collègue algérien.

France, Sartre, Beauvoir, Vidal-Naquet, peut-être même Mauriac. Lorsque ce fut mon tour de parler, j'éprouvai ce sentiment d'étrangeté, souvent décrit dans la littérature sur la guerre, et que je retrouvai plusieurs fois dans ma vie. Entre ce que je racontais avec mes tripes et mon émotion, et un discours politique, aucune communication possible – d'autant plus que j'essayai de faire comprendre que des personnes souffraient dans tous les camps politiques, et que je mentionnai l'accueil chaleureux offert par des familles pied-noir d'Oran. Ma femme fut très impressionnée par mon désarroi, et me l'a souvent rappelé.

Absent pendant deux années scolaires pour mon séjour à Princeton, puis enrôlé pendant plus de deux ans dans la Marine Nationale avec une obligation de réserve, je n'avais pas pris une part très active à la lutte contre la guerre d'Algérie. Je me rattrapai avec le Vietnam.

LES GUERRES DU VIETNAM

Si la guerre entre la France et l'Algérie fut si traumatisante pour nos deux pays, et si, après cinquante ans, la blessure n'est pas complètement guérie, à l'échelle mondiale la guerre du Vietnam –ou plutôt les *deux* guerres– est bien plus importante. Dans l'empire colonial français, *l'Union Indochinoise* comportait cinq parties. Trois d'entre elles –Tonkin, Annam, Cochinchine– forment le Vietnam actuel, le Laos regroupe assez artificiellement les royaumes de Vientiane et Luang-Prabang; enfin, le Cambodge est le reste du grand empire Khmer, siège d'une brillante civilisation proche de celle de l'Inde.

Fin 1941, l'armée japonaise, alliée au gouvernement d'alors du royaume du Siam (aujourd'hui Thaïlande) prend le contrôle complet du Laos et du Tonkin. L'administration française est restée fidèle au gouvernement de Vichy (du Maréchal Pétain), et coexiste difficilement avec les Japonais, jusqu'à la prise de contrôle directe par ceux-ci en mars 1945. Après la défaite du Japon, une période d'occasions manquées et de jeux de dupe voit des négociations assez avancées avec Ho Chi Minh sabotées par des opérations militaires intempestives. Avec l'appui intéressé de la Chine de Chang Kai Chek, en utilisant l'hostilité de Roosevelt au colonialisme français (et britannique), Ho Chi Minh prend le contrôle du Tonkin. Répondra une escalade militaire française. En France, seul le Parti Communiste, grâce à ses relais dans les syndicats de marins et de dockers, s'oppose à la guerre croissante, et provoque des actions de sabotage (affaire Henri Martin). Plusieurs erreurs tactiques françaises, en face du génie militaire du Général Giap, aboutissent à l'infamante défaite de Dien Bien Phu. Il ne reste plus, en 1954, que la négociation pour la France. Mendès-France, appelé à la tête du gouvernement pour se sortir de l'impasse, doit signer les accords de Genève, sous la surveillance du Premier Ministre chinois Chou En Lai, et des diplomates américains.

Les accords de Genève ont reconnu l'indépendance du Vietnam, uni sous l'autorité de façade de l'empereur Bao Dai, fantoche rapidement écarté par tous. La réalité est que la ligne d'armistice (dite du 17^{e} parallèle) coupe en deux le pays, tout comme la Corée à la même époque. Le Nord-Vietnam est dirigé par Ho Chi Minh et ses communistes, le Sud-Vietnam est dominé par les catholiques autour de Ngo Dinh Diem et son frère l'archevêque. Le Nord se remet difficilement de la guerre contre les Français, avec peu d'appuis externes, tandis que le Sud, puissamment aidé par les États-Unis, réussit son envol économique[8]. La prospérité du Sud ne profite pas à tout le monde, et des oppositions diverses –nationalistes, bouddhistes, communistes, bourgeoisie

8 Encore aujourd'hui, le développement de Saigon est beaucoup plus ordonné que celui d'Hanoi.

libérale– se fédèrent peu à peu. Par la *piste Ho Chi Minh* (route masquée par la forêt le long de la frontière cambodgienne), les nordistes soutiennent l'action des guérillas viet-cong du Sud. Les États-Unis ripostent par l'envoi de "conseillers militaires" pour appuyer l'armée sud-vietnamienne (à partir de 1964). Ils s'impliquent de plus en plus dans une guerre directe contre le Nord, ce qui ne prend fin qu'en 1973. Quant au Sud, en partie abandonné par les États-Unis après 1972, il s'écroule le jour où la "troisième force", emmenée par les bouddhistes, fait une alliance tactique avec les communistes.

La violence et l'inhumanité de la guerre des États-Unis contre Ho Chi Minh –mais y a-t-il des guerres humaines?– choquent l'opinion publique internationale. La guerre est menée avec des moyens terribles: usage du napalm pour brûler lieux et gens, utilisation de produits chimiques défoliants (l'"agent orange") avec des séquelles graves pour les personnes contaminées, bombardements aériens ciblés sur les digues des rizières, écrasement des villes comme Hanoi par les tapis de bombes. Mais cela fournit aussi une occasion de fédérer des oppositions bien différentes:

- Pour l'Union Soviétique, c'est un épisode de plus de la guerre froide: une nation communiste attaquée par le Satan impérialiste (comme la Corée dix ans plus tôt). De plus, la Chine est empêtrée dans le chaos absurde de la Révolution Culturelle voulue par Mao; elle laisse le champ libre à la pénétration soviétique en Asie du Sud-Est. La propagande soviétique se déchaîne.

- Aux États-Unis, les années 1960 voient une grande agitation politique, centrée sur la lutte des Noirs pour l'égalité civique. La lutte contre la guerre du Vietnam, surtout de 1965 à 1970, s'ajoute à ce combat de la "gauche" américaine. Le savoir-faire logistique des Américains –qui leur fit gagner la guerre contre Hitler– se mobilisa pour de gigantesques manifestations, comme celle de Washington fin 1969, à laquelle je participai.

- En France[9], une certaine gauche a commencé, dès les années 1950, à soupçonner la vraie nature du régime soviétique; elle est aussi dépitée de l'effondrement de la Quatrième République (et de Guy Mollet et de sa SFIO), et cherche de nouvelles voies. Lutter contre la guerre du Vietnam lui permet de se construire comme force politique sans se couper des communistes encore puissants (c'est toute la stratégie convergente de François Mitterand et de Michel Rocard).

- Les pacifistes purs et durs, dont Bertrand Russell est l'icône, ont une excellente occasion de mobiliser l'opinion contre le militarisme et l'impérialisme.

L'OPPOSITION DES MATHÉMATICIENS À LA GUERRE

Mais dans tout cela, où se situent les universitaires, emmenés le plus souvent par les mathématiciens?

En Union Soviétique, l'opinion publique ne peut guère s'exprimer[10], l'intelligentsia est en général réservée devant le régime, et ne comprend guère pourquoi elle participerait à la défense d'un régime communiste qu'elle ne croit pas différent de celui de son pays. De plus, il règne un certain racisme "anti-jaune", que j'ai surpris parfois même chez mes amis russes les plus proches. Il y a des exceptions: Maslov a

9 Et aussi en Israël, après le procès Oren à Prague.
10 Elle ne commencera à le faire que lors de la déroute d'Afghanistan, vers 1985, sous Gorbačev.

épousé une femme vietnamienne, dont le sort tragique a aggravé sa paranoïa, et Manin a eu un très brillant étudiant vietnamien[11]. Vers 1970, toute une génération de mathématiciens vietnamiens a été formée en Union Soviétique, pas toujours dans les universités les plus prestigieuses, mais je n'ai connaissance d'aucun collègue russe qui soit allé enseigner au Vietnam à cette époque.

Aux États-Unis, les campus universitaires sont le siège d'une grande agitation, et de nombreux mathématiciens s'engagent. Il me souvient de ma visite à Berkeley en 1965, avec ma femme, où l'on nous traîna de meeting en agape révolutionnaire pendant trois jours. La Société Mathématique Américaine fut le théâtre de polémiques acharnées, pour ou contre la guerre, et même dans la sage Princeton, j'ai vu frémir l'indignation. Le risque était, en retour, de régénérer un McCarthysme jamais tout à fait éteint. Les plus engagés furent Serge Lang, Steven Smale et Neal Koblitz, qui eurent à payer leur engagement par des entraves à leur carrière.

Ces trois collègues américains s'engagèrent de manière différente. Serge Lang était un polémiste-né, mais individualiste, incapable de participer à une action collective. Ses diatribes contre la guerre du Vietnam ne furent qu'un de ses exutoires; à la fin de sa vie, il se lança dans une campagne douteuse de négation du sida. Steven Smale, un des gourous de Californie, était par tradition familiale un communiste convaincu. La médaille Fields lui fut décernée lors du Congrès International des Mathématiciens (ICM66) à Moscou en 1966. Il tint, sur les marches de l'Université Lomonosov, une conférence de presse sur le Vietnam, ce qui ne plut guère aux autorités moscovites[12]. Je n'ai pas de détails sur ses visites au Vietnam, mais après sa retraite de Berkeley, il s'établit à Hong Kong pour plusieurs années. Neal Koblitz est lui aussi un communiste convaincu. Avec sa femme (tout aussi communiste), il anime la "fondation Sofia Kovalevskaïa" qui s'emploie à soutenir en Amérique Latine et au Vietnam les jeunes femmes scientifiques. A eux deux, ils ont fait beaucoup de visites au Vietnam, où ils sont très chaleureusement accueillis, par les collègues et par les autorités.

En France, c'est là que les campagnes furent les plus structurées. Le Vietnam avait été une colonie française, et la première guerre du Vietnam se fit contre nous. Laurent Schwartz, que nous retrouverons souvent dans ce récit, était une figure majeure et respectée des mathématiques françaises, et il a été toujours très engagé politiquement[13]. Comme le disait André Weil, qui fut très lié à Schwartz, la porte de sa sœur, Simone Weil, était ouverte à tout ce que l'Europe comptait de Juifs communistes dissidents; Schwartz rentrait bien dans cette catégorie. Dans les années 1965 à 1967, tous ceux qui seront les agitateurs et les meneurs de la révolution étudiante de mai 1968 fourbissent leurs armes militantes dans des "Comités Vietnam". Les réseaux constitués lors de la guerre d'Algérie (Vidal-Naquet, Mandouze), souvent animés par les chrétiens progressistes de l'époque[14], sont restés mobilisés à propos du Vietnam. Schwartz et certains de ses élèves (Malgrange, Martineau) séjourneront à diverses reprises au Vietnam.

Le plus surprenant est la visite de Grothendieck au Vietnam. Lors de la guerre d'Algérie, Grothendieck s'était cantonné dans ses mathématiques; on a publié

11 En général, les Soviétiques rencontrés au Vietnam avaient un comportement de colonialistes.
12 Pour faire diversion, elles lui organisèrent une "visite guidée des musées de Moscou", avec deux anges gardiens du KGB.
13 Jusqu'à se présenter, à Grenoble en 1947, comme candidat trotzkiste à une élection.
14 Ceci est contemporain du Concile Vatican II, qui s'efforça de réformer en profondeur l'Église Catholique!

de lui une lettre assez naïve à Henri Cartan, où il lui demande d'intervenir pour faire dispenser du service militaire les jeunes mathématiciens prometteurs (dont moi!). Est-ce l'effet de sa médaille Fields, décernée en 1966 en même temps que Smale? Il n'a pas voulu se rendre à Moscou et y délégua Léon Motchane pour la recevoir en son nom. Est-ce le souvenir de son père, deux fois condamné à mort en Russie –par le tsar, puis par Lénine– qui rouvre la communication vers les idéaux anarchistes et pacifistes de ses parents? Plus crûment, veut-il utiliser sa renommée nouvelle pour servir une cause politique? En tout cas, sans prévenir personne, il part au Vietnam où il visite les mathématiciens de Hanoi, réfugiés dans les rizières pour fuir les bombardements américains. Sur la photo de groupe, il y a une jeune et fière milicienne de 17 ans, Hoang Xuan Sinh[15], qui fera sa thèse vers 1975 sous la direction de Grothendieck. Juste avant l'explosion de 1968, il fera un récit militant de cette visite, qui fait de lui un franc-tireur parmi les francs-tireurs.

Mais, ce qui eut le plus grand impact fut le "Tribunal Russell". Bertrand Russell (1872-1970)[16] a toujours été engagé dans le mouvement pacifiste, ce qu'il a payé par un internement en Grande-Bretagne en 1918. Malgré les sarcasmes de Poincaré et de Dieudonné, il faut le considérer comme un mathématicien, ou en tout cas un philosophe des mathématiques et un logicien. Les "Principia Mathematica", écrits avec Whitehead, sont mieux compris aujourd'hui qu'il y a trente ans, car la théorie des types a repris de l'importance en informatique théorique.

Russell et Schwartz rassemblent les témoignages les plus accablants sur la façon dont les Américains mènent la guerre au Vietnam, et les font connaître à l'opinion publique. Bien sûr, cela vaudra à Russell et à Schwartz une grande reconnaissance de la part des dirigeants vietnamiens, et ce sera le départ d'une amitié personnelle entre Schwartz et Pham Van Dong. Ce dernier est un des plus proches compagnons de Ho Chi Minh, et à la mort de ce dernier en 1969, il partage la direction du pays, comme Premier Ministre, avec Le Duan, secrétaire général du Parti Communiste (mort en 1986). C'était un homme très fin, qui, au soir de sa vie, encouragea le Doi Moi (nouveau cours économique) et resta francophile malgré tout[17]. De ce fait, Schwartz était reçu comme un hôte d'État.

Le combat politique pacifiste, mené par Russell et Schwartz pour le Vietnam, n'était pas isolé. Du côté des physiciens, il y a eu depuis 1945, avec le soutien d'Einstein et Oppenheimer, une opposition à l'armement nucléaire. Les plus engagés se retrouvèrent au sein du Mouvement Pugwash, un forum indépendant où se côtoyaient des physiciens des deux côtés du Rideau de Fer. Du côté des mathématiciens se cristallisa une certaine opposition à la politique de l'OTAN, et surtout sa pratique de financer des rencontres scientifiques. Lors d'un congrès à Anvers en 1973, sur les fonctions automorphes, la tension fut forte. Le mode de financement opposa les organisateurs (Kuyk, Poitou, Serre) à un groupe de contestataires (Langlands, Godement, Lang, Tate et moi-même). Malheureusement, la possibilité d'une discussion publique civilisée entre les deux groupes fut ruinée par l'arrivée intempestive de Grothendieck, qui se livra avec son fils Serge à toutes sortes de clowneries, et retourna l'opinion du congrès contre la thèse qu'il prétendait défendre.

15 *"En ce temps-là, j'étais communiste"*, m'a-t-elle avoué récemment.
16 Sa vie romancée fait l'objet d'une intéressante bande dessinée: "Logicomix".
17 On peut le comparer à Chou En Lai, lui aussi éminent mandarin confucianiste.

AGITATION PARISIENNE

Je ne suis pas parti pour le Vietnam en 1976 sur un coup de tête. Revenu de Strasbourg à Paris fin 1971, je me retrouvai au centre d'une fièvre militante. Ce que j'ai raconté plus haut, sur le Congrès d'Anvers en 1973, n'est qu'un des aspects. La guerre au Vietnam donnait une bonne occasion de fustiger le militarisme américain, qui était celui que nous subissions en Europe de l'Ouest. Le printemps de Prague de 1968 –ou l'espoir d'un autre socialisme, à visage humain– a été cruellement écrasé par le militarisme soviétique; la "doctrine Brejnev" de la souveraineté limitée des pays d'Europe de l'Est est aussi monstrueuse que la "doctrine de Monroe" qui donne aux États-Unis le droit de régenter tous les pays d'Amérique Latine. Peu d'esprits sont assez lucides à ce moment pour se rendre compte que la fin des bombardements américains à Hanoi et la liberté à Prague ou à Varsovie relèvent de la même exigence et du même combat. Russell et Schwartz le savent et le disent, mais il faudra attendre 1978, avec le piège afghan pour l'Armée Rouge, et l'élection d'un Pape polonais[18], deux événements à la convergence historique étonnante, pour que l'opinion publique de gauche bascule vraiment – et que Mitterand soit élu président dans la foulée.

A Orsay, j'avais lié connaissance avec van Regemorter, un astrophysicien, et Markovich, un biologiste. Par eux, j'avais rencontré Raymond Aubrac. Ce dirigeant de la Résistance à l'occupation nazie a toujours été l'agent de liaison entre de Gaulle et les communistes. A la Libération, il est "Commissaire de la République" (préfet avec pouvoirs exceptionnels) à Marseille. Il participe ainsi à la reconquête de la France par l'administration nationale, face à la double menace constituée par les milices communistes des FTP et le projet de Roosevelt d'imposer à la France un gouvernement militaire américain sur le modèle de Mac Arthur au Japon[19]. Avec le titre modeste de préfet honoraire, il jouera un rôle majeur dans la diplomatie "discrète" française, accueillant Ho Chi Minh chez lui en 1946; à en croire les mémoires de Mac Namara (ministre de la défense des États-Unis dans les années 1970), Aubrac fut, avec Markovich, l'un des relais essentiels entre Vietnamiens et Américains lors de la négociation finale de 1972. Que le consul américain ait été intrigué par ma fréquentation assidue d'Aubrac et Markovich, comme raconté plus haut, n'a donc rien de surprenant.

Henri van Regemorter était un franc-tireur qui se démena beaucoup pour développer l'informatique au Vietnam, en utilisant sa structure, le CCSTVN, autrement dit le "Comité pour la Coopération Scientifique et Technique avec le Vietnam". C'était encore l'époque héroïque de l'informatique où trois vietnamiens doués, avec du matériel de récupération, pouvaient construire un prototype de microordinateur. L'informatique est devenue l'un des tout premiers acteurs technologique, industriel, économique (et même politique) au début du vingt-et-unième siècle. C'est là un bon paradigme historique.

Le dernier personnage de la bande était mon beau-frère. Médecin pédiatre, catholique progressiste, il a été l'élève de Neeman, un des pionniers de la pédiatrie en France, puis le collaborateur de Robert Debré, un des autres pionniers. On ne compte pas les hôpitaux Robert Debré en France! Le père de Robert Debré fut rabbin de Neuilly, l'un des fils de Robert

18 Comme me l'a dit un ami mathématicien et jésuite: "Pour une fois, l'Esprit Saint n'était pas aux abonnés absents lors de l'élection d'un Pape!".

19 Sommes-nous dans le camp des vainqueurs – ou celui des vaincus?

Debré est Michel Debré, qui fut premier ministre de 1959 à 1962, au début de la Cinquième République. L'un des petits-fils de Robert Debré est Jean-Louis Debré, qui fut un efficace président de l'Assemblée Nationale, et préside maintenant le Conseil Constitutionnel de notre pays. Et la sœur de Robert Debré est la mère de Laurent Schwartz[20]. On ne sort pas de la famille, et l'on est au cœur de l'intelligentsia juive du début du vingtième siècle, très influente dans l'université, la médecine et la politique après l'affaire Dreyfus.

A cette époque, mon beau-frère travaillait pour l'OMS[21], branche médicale des Nations-Unies. Il fit plusieurs missions dans les deux parties du Vietnam, en liaison avec les deux grandes associations caritatives françaises: le Secours Catholique et le Secours Populaire Français. Cette dernière était contrôlée par le Parti Communiste Français, mais à l'époque la collaboration entre les deux organismes fonctionnait assez bien. Il faut dire que les séquelles de la guerre sur les enfants: amputations, brûlures, sous-alimentation, étaient effrayantes. Mon beau-frère était à Saigon peu de temps avant l'effondrement final du Sud-Vietnam, dernier héritier de l'empire de Bao Dai. Il put nous expliquer pourquoi et comment les héritiers de Ho Chi Minh l'avaient emporté.

Donc, à nous cinq, nous fîmes notre travail d'information militante dans ce qui sera prochainement fédéré sous le nom de Campus du plateau de Saclay: Université Paris-Sud, CNRS de Gif-sur-Yvette, Centre d'Énergie Atomique de Saclay, et quelques années plus tard École Supérieure d'Électricité et École Polytechnique.

MES VOYAGES AU VIETNAM

Jusqu'à présent, je n'étais pas allé au Vietnam, malgré mon engagement de plusieurs années pour ce pays. L'occasion se présenta en 1976. Invité par la JSPS[22], je fis un long séjour au Japon. Le conseiller scientifique français voulait m'organiser une tournée en Corée du Sud (pays que je visiterai pour la première fois au printemps 2011). Je tins bon, et grâce à l'intervention de notre Ambassadeur au Vietnam, alerté par Laurent Schwartz, j'obtins *in extremis* un visa pour le Vietnam. Le voyage fut héroïque. Je fis escale à Pékin et à Nanning (dans le sud de la Chine) et dus psalmodier en chœur le "Petit Livre Rouge" de Mao Tse Dong dans l'avion. En 1976, la Chine était dans un chaos complet, six mois après la mort du grand mandarin Chou En Lai, image de la sagesse et de la maîtrise confucéenne, et six mois avant celle de l'empereur fou Mao Tse Dong (manipulé par sa sorcière de femme). Malgré un visa de transit, je ne pus donc visiter Pékin (ce que je ferai en 2001); les quelques heures d'escale à Nanning me permirent de flairer l'hostilité entre Chinois et Vietnamiens qui devait déboucher sur la guerre-éclair de 1979[23].

Je débarquais dans un pays assommé par trente ans de guerre. La région d'Hanoi portait les lourds stigmates des bombardements les plus récents; on se méfiait des occidentaux venus des pays impérialistes capitalistes. J'étais une sorte d'OVNI mathématique.

Les telex dont Schwartz avait inondé l'Ambassade de France me garantirent un accueil chaleureux de la part d'un ambassadeur fort attaché à sa mission de réconciliation entre Français et Vietnamiens. Je me

20 Dans ses mémoires, Schwartz parle avec admiration et respect de "l'oncle Robert".
21 Organisation Mondiale de la Santé.
22 Japan Society for the Promotion of Science.
23 J'y assistais depuis Hanoi, alors que mon frère le sinologue visitait Pékin.

souviens de son commentaire: “Il faut des francs-tireurs comme vous, pour ouvrir ensuite des voies plus officielles”. Les mathématiciens furent d’abord surpris, mais la glace fondit lorsque je m’offris à faire un panorama des développements récents en algèbre, géométrie, analyse et probabilités (un condensé du Séminaire Bourbaki). Je citai Bourbaki, Cartan, Serre, Schwartz, Grothendieck, Hörmander, Atiyah, Nelson et les noms de Schwartz et Grothendieck furent le sésame.

Ce fut le premier d’une longue série de voyages (dix environ sur une trentaine d’années). Ce sont des souvenirs très riches, mais les détails en lasseraient le lecteur. Disons seulement que ces voyages me permirent de constater l’ouverture et la normalisation progressives du pays. Une étape importante fut la défaite soviétique en Afghanistan en 1986, qui initia le désengagement de l’URSS au Vietnam. Ce pays est dans une situation géographique difficile. La Chine a toujours été une menace, même si parfois la Chine communiste et le Vietnam communiste eurent une alliance réticente. L’Union Soviétique fut un allié, mais jamais un ami. Les Vietnamiens payèrent un lourd tribut pour l’armement ou l’aide économique fournis par les Soviets: une main-d’œuvre de 150 000 à 200 000 vietnamiens pour les grands projets en Sibérie, dans des conditions voisines de l’esclavage du Goulag; une émigration à peine plus qualifiée vers l’Allemagne de l’Est ou la Tchécoslovaquie, qui s’évapora lors de la chute du mur de Berlin[24].

Si le Vietnam voulait sortir de l’isolement, il lui fallait se rapprocher de ses voisins. Les États-Unis avaient créé un pendant asiatique de l’OTAN, ou ANSEA[25], et une Société Mathématique de l’Asie du Sud-Est (en abrégé SMASE) en était un appendice. Si je m’étais battu en 1973 contre le financement d’un congrès mathématique par l’OTAN, je recommandai à mes collègues vietnamiens d’adhérer à la SMASE. En 2000, j’assistai à Saigon (devenue Ho Chi Minh Ville) à une rencontre dans ce cadre, avec des mathématiciens philippins, indonésiens, thaïlandais, Les choses ont tellement évolué que le Vietnam fait partie de l’ANSEA et que Hanoi a accueilli l’un des derniers sommets de cette organisation.

Les conditions matérielles se sont considérablement améliorées, ce qui porte à la fois sur l’accueil qu’on me donnait, et sur les conditions d’enseignement (bien sûr, le climat tropical sera toujours là). La communication avec l’extérieur a aussi beaucoup changé. Le temps n’est plus où je sortais du Vietnam avec, de manière plus ou moins légale, 200 lettres à poster. Lors de mon dernier voyage (automne 2008), j’avais tout préparé grâce à des échanges maintenant standard par courriel, et je suivais les nouvelles sur les sites Internet de la presse française ou internationale, même lorsque les dépêches sur le Vietnam étaient politiquement sensibles (exemple: manifestation catholique au centre d’Hanoi).

Dans tous mes voyages, j’ai insisté pour visiter les trois capitales du pays: Hanoi, Hué, Saigon. L’atmosphère n’y est pas identique, et Hué reste fortement pénétrée de la spiritualité bouddhiste. C’est dans mon dernier passage à Hué que j’ai perçu le changement dans les mentalités. Lors d’une soirée fort officielle, du genre distribution des prix, en présence du recteur, le spectacle organisé par les étudiants comprenait danses traditionnelles en costumes, concert rock, et concours de beauté par couples! Comme me le sussura à l’oreille

24 Ce qui à Paris serait l’exploitation capitaliste d’un travailleur africain était, à Prague, de la solidarité entre pays socialistes!
25 Association des Nations du Sud-Est Asiatique, ASEAN en anglais.

un collègue: “Musique jaune![26] Il y a vingt ans, pour une réunion en petit groupe de ce type, nous finissions tous la nuit au poste de police!”.

Le niveau des mathématiques vietnamiennes s’est beaucoup élevé. La remise de la médaille Fields, le 19 août 2010, à Ngo Bao Chau, vietnamien récemment naturalisé français, est un signe de reconnaissance éclatant. Le talent ne manque pas au Vietnam, mais il y fallait un jardin bien arrosé!

LA SITUATION ACTUELLE AU VIETNAM

Il faut s’interroger sur le sens politique de toute cette action qui, aujourd’hui, s’est institutionalisée. Les échanges d’étudiants entre France et Vietnam sont codifiés, et la coopération est prise en charge par le Formath Vietnam, animé par mon collègue Lionel Schwartz. Diverses universités, l’École Polytechnique, ont signé des conventions avec le Vietnam.

Laurent Schwartz, pour son action publique lors du Tribunal Russell, bien que trotzkiste dans sa jeunesse, était vénéré par les autorités de Hanoi, et le tapis rouge était déroulé devant lui. Je profitai de ce tapis rouge, et je fus longtemps une sorte d’hôte d’État, mais dont on se méfiait à cause de ses réactions imprévisibles, et de ses efforts pour échapper à la propagande officielle, et rencontrer les gens ordinaires. Il fallut un ordre express de Pham Van Dong, alors premier ministre, pour me permettre de circuler à bicyclette dans Hanoi. Nous en avons ri ensemble vingt ans plus tard!

On m’a souvent reproché de cautionner l’un des régimes communistes les plus durs. Je n’ignore pas la dictature idéologique et policière, heureusement fort affaiblie aujourd’hui. J’ai rencontré des dissidents, et j’ai communiqué à la Croix-Rouge Internationale les photos que j’avais volées en passant devant un camp de rééducation. J’ai aidé un “boat-people” à émigrer légalement en France, j’ai servi de facteur entre des Saigonnais et leur famille installée en France Je n’ai ni à me vanter, ni à me justifier de cela. Malgré une petite hésitation, je ne suis pas allé à Cuba vers 1965; je n’irai jamais en Corée-du-Nord (mais on ne voudrait pas de moi).

Au Vietnam, il y avait une possibilité d’évolution intérieure dans un sens libéral, et elle s’est réalisée. La situation actuelle est assez loufoque, et sur le modèle chinois. La structure politique reste celle du Parti Communiste, mais

- les dirigeants politiques, assez médiocres, effrayés par la Chine, sont très coupés, et du peuple, et de la nouvelle classe moyenne;

- la nouvelle classe des managers me semble dans l’ensemble compétente et relativement honnête; l’un d’eux m’a expliqué crûment qu’il n’est plus nécessaire d’être membre du Parti Communiste pour faire carrière (!);

- les couleurs du drapeau national communiste (étoile jaune sur fond rouge velours) correspondent au bonheur dans le code de couleurs de la tradition religieuse;

- la vénération de Ho Chi Minh a pris un tour religieux; il fait partie du panthéon national pour les confucianistes, et c’est un boddhisatva pour les bouddhistes;

26 Le jaune est la couleur traditionnelle du mépris; les communistes désignaient ainsi toute la culture populaire actuelle.

- l'équilibre entre villes et campagnes est délicat; il ne faudrait pas voir le régime communiste abattu par une révolte "maoïste" du style népalais, venue du fond des rizières.

Je ne souhaite certainement pas une nouvelle révolution ou guerre civile au Vietnam. Espérons que la libéralisation actuelle se poursuivra pacifiquement, et que le pays ne retombera pas, après la fin du communisme, sous la coupe d'une autre clique idéologique ou militaire.

FIGURES EXEMPLAIRES

En dehors des nombreux cours que j'ai donnés, de l'importante documentation mathématique dont j'ai fait don, des étudiants que j'ai formés, la partie la plus positive de mon action au Vietnam me semble le soutien donné à mes nombreux amis vietnamiens. Je n'en retiendrai que trois, en m'excusant auprès des autres.

Nguyen Dinh Tri est venu à moi par l'intermédiaire de Laurent Schwartz. Formé en mathématiques appliquées en Union Soviétique, il a été souvent invité à l'École Polytechnique, à l'époque où Schwartz, puis moi-même, y travaillèrent. Il était membre d'honneur de notre Centre de Mathématiques. A Hanoi, il était vice-recteur de l'Institut Polytechnique, où je donnai nombre de mes cours. Après sa retraite, il créa l'Institut Francophone d'Informatique, qu'il fit rattacher au réseau des universités francophones. A un certain moment, il offrit à ma fille un poste de professeur de français dans son Institut. Ma fille qui l'aimait beaucoup, et l'appelait "Oncle Tri", était tentée d'accepter, mais déclina sur mon conseil, pour des raisons pratiques (son fils était encore bébé!).

Le fils de Tri, qui fut l'un de mes étudiants les plus prometteurs (je fis publier sa thèse dans le journal "Topology" après avoir plaidé sa cause auprès de Michael Atiyah), a fait une carrière administrative. Il est un très efficace sous-directeur (et de fait animateur) de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences Vietnamiennes. Sa sœur, après des études à Odessa, s'est installée en France, et enseigne l'informatique à l'Université Catholique d'Angers, tout en élevant sa fille Li.

Lors de ma dernière visite à Hanoi (octobre 2008), j'eus avec Tri le dialogue suivant:

– Schwartz et toi, vous m'avez fait changer d'avis sur beaucoup de sujets.

– Nous le reproches-tu?

– Non, je vous en remercie.

Je fus extrêmement touché de ce compliment. Il me rappelait la dernière conversation entre ma femme et son oncle et tuteur (qui fut pour moi un beau-père):

– Monique, ma fille[27], tu sais que j'ai beaucoup évolué grâce à toi...

Mon beau-père fut une des figures marquantes du syndicalisme démocrate-chrétien, qui accoucha de la CFDT. Au cours de sa vie, il évolua depuis un catholicisme très rigide et très formel jusqu'à un libéralisme solide.

J'ai maintenant à parler de deux femmes libres. J'ai déjà mentionné Hoang Xuan Sinh, jeune milicienne étudiante dans le maquis, puis élève de Grothendieck. Quand je la rencontrai à Hanoi en 1976, elle était à peine de retour au Vietnam, et complètement fascinée par Grothendieck (qu'elle appelait Chourik, son

27 Il l'appelait toujours ainsi!

surnom familier). Elle m'invita chez elle, avec quelques complices, ce qui était à la limite de la dissidence. Elle navigua longtemps dans l'entre-deux. D'un côté, elle fut la présidente de l'Union (communiste) des femmes du Vietnam, de l'autre, elle a développé graduellement, avec son ami Huynh Mui[28], une structure d'enseignement supérieur parallèle. Cela avec la bénédiction de la municipalité de Hanoi, et le soutien politique du Général Giap. Celui-ci, grand stratège, et artisan de la victoire militaire sur la France et les États-Unis, avait été mis dans un placard politique. Il était la référence de tous les libéraux du régime, et j'eus la chance de le rencontrer une fois. Quand la société vietnamienne commençait à s'ouvrir, Sinh n'hésita pas à venir me chercher à mon hôtel, et à s'afficher avec moi en public. Lors de mon dernier voyage, elle m'a fait les honneurs de sa toute nouvelle Université privée (8000 étudiants) remarquablement bien équipée. Elle ne m'a pas caché non plus ses réserves sur le régime politique.

C'est par mon beau-frère le pédiatre que j'entrai en relation avec ce personnage de légende qu'était le Docteur Duong Quynh Hoa, chef de service à l'hôpital pédiatrique n° 2 de Saigon (Nhi Dong Hai, en vietnamien), d'origine sino-vietnamienne comme l'atteste son prénom Hoa, supérieurement intelligente et courageuse. Elle était typique de cette "Troisième Force" de Saigon, la bourgeoisie libérale et humaniste ralliée aux communistes pour abattre le régime de Ngo Dinh Diem, qui fut suivi de la dictature des généraux Minh, puis Thieu. Elle avait rejoint les guérillas dans les rizières, et y perdit en bas âge son unique enfant (victime de la dioxine répandue par les Américains). A la fin de la guerre, elle fut promue vice-ministre de la Santé dans le premier gouvernement du Vietnam réunifié. Elle en démissionna rapidement avec ce commentaire: "Je serai plus utile dans mon hôpital, qu'à faire de la paperasserie, et censurer les revues médicales étrangères."

Lors du premier Symposium international de pédiatrie, organisé à Ho Chi Minh Ville, en 1988, je pris la place de mon beau-frère empêché (!). C'est là que j'entendis Hoa prendre à partie un haut responsable de Hanoi: "Camarade, nous sommes ici entre médecins. La propagande ne nous intéresse pas ". Inquiet, je demandai: "Hoa, que va-t-il se passer? – Rien!" A de nombreuses reprises, elle me rencontra à la terrasse des grands cafés, où nous parlions très librement en français, voire en anglais à l'occasion, sans nous soucier des mouchards qui nous entouraient. Je la vis pour la dernière fois sur la chaine de télévision francophone TV5 Monde (accessible au Vietnam), disant en particulier: "Mes anciens amis politiques –C'est-à-dire, Madame?– Les communistes évidemment". Puis elle expliqua ses nouveaux engagements socio-médicaux au service des minorités ethniques Cette femme, d'un tel talent, d'un tel courage et d'un tel humanisme, brillait au milieu des décombres du vingtième siècle.

Je ne veux pas infliger au lecteur dix autres récits du même genre. Ce serait autant d'humanistes courageux que je pourrais décrire, et je m'excuse de ne pouvoir ici rendre hommage à chacun d'eux. Si le Consul américain de Paris me demandait aujourd'hui le sens de mes voyages au Vietnam, je répondrais sans hésiter:

Utiliser mon talent et ma réputation de mathématicien pour conforter les hommes et les femmes libres de ce pays martyr et donner l'espoir aux plus jeunes.

N'est-ce pas une bonne définition d'un mathématicien sans frontières?

28 Spécialiste de topologie algébrique, il avait passé quinze ans de formation au Japon!

MATHÉMATIQUES UNIVERSELLES ET SANS FRONTIÈRES

Nul ne doute qu'il y ait des *styles* en musique: on ne confond pas Bach et Duke Ellington, non plus que Monteverdi et Chostakovich. C'est le rôle de l' *ethnomusique* de faire l'inventaire des instruments, des rythmes et des tonalités à travers l'histoire de l'humanité. Dans la société d'aujourd'hui coexistent de multiples formes de musique, non seulement pratiquées par des individus différents, mais le même mélomane peut apprécier Beethoven et le jazz. Voir aussi comment Ravel a su exploiter les rythmes du flamenco et du jazz pour en faire de la musique dite sérieuse.

Qu'y a-t-il d'analogue en mathématiques? Bien sûr, il y a place pour une *ethnomathématique* qui fait l'inventaire des modes de numération, ou des instruments géométriques dans les diverses civilisations. Il y a des styles en mathématiques: la réserve de Cartan et de Serre n'est pas la fougue d'Atiyah. On parle de la géométrie algébrique *italienne*, de l'algèbre *allemande*, du symbolisme *britannique*, et dans leur isolement soviétique, les mathématiciens *russes* avaient un style bien reconnaissable. Mais on peut affirmer qu' *il y a aujourd'hui une seule mathématique*, avec des canons universels, que Bourbaki a eu l'ambition de codifier. On se réclame souvent de l'héritage géométrique grec (Euclide, Archimède, ...), mais il ne faudrait pas ignorer la révolution algébrique de Viète, puis Descartes et Wallis, jusqu'à Euler, admirablement théorisée par Leibniz. Ce que n'avaient pas les Grecs était le symbolisme, si riche aujourd'hui. Que l'on compare, en Mécanique, les "Principia" de Newton et la "Mécanique Analytique" de Lagrange, pour observer une profonde mutation de style.

Je ne ferai pas ici l'analyse historique et philosophique de cette nouvelle unité des mathématiques à l'échelle mondiale. Je me bornerai à la constater, comme un fait évident du vingt-et-unième siècle, pour en analyser les conséquences institutionnelles et politiques.

Le dix-septième et le dix-huitième siècles furent ceux de la création des Académies Scientifiques, le dix-neuvième vit la multiplication des périodiques scientifiques, et vers la fin le développement des Sociétés Savantes. Chaque centre universitaire important eut sa Société Mathématique (Göttingen, Saint-Petersbourg, Glasgow, ...), une sorte de club des mathématiciens. La fédération en sociétés nationales ne vint que plus tard, et même aujourd'hui, il n'y a pas, pour des raisons historiques différentes, de société mathématique britannique ou russe. Puis on prit l'habitude d'organiser des rencontres internationales. Chez les physiciens, ce furent les fameux Congrès Solvay à Bruxelles. Avec une quarantaine de participants, on réunissait le gratin de la physique européenne, avec côte à côte Henri Poincaré, Marie Curie et Albert Einstein.

En mathématiques, les choses commencèrent sérieusement en 1897 à Zurich. L'étape suivante fut l'Exposition Universelle de Paris en 1900; c'est à cette occasion que Hilbert formula ses 23 problèmes, et que Russell[29] découvrit les mathématiques et la logique. Les retrouvailles se produisirent à Heidelberg en 1904, puis à Rome en 1908 où Poincaré donna la réplique à Hilbert, et à Cambridge en 1912.

Il n'y eut pas de rencontre en 1916, car l'Europe était coupée en deux par une terrible guerre. En 1920, ce fut un scandale. Les Alliés (surtout Français et Britanniques), dans l' *ubris* de la victoire militaire,

29 Jeune fils de famille, attaché culturel à l'Ambassade de Grande-Bretagne à Paris.

ostracisèrent les vaincus (Allemagne et Autriche). On créa une Union des Sociétés Scientifiques dont les vaincus étaient exclus. Les Français insistèrent pour que le Congrès de Mathématiques ait lieu à Strasbourg, redevenue française, *sans participation allemande*. Émile Picard, respecté pour ses travaux, y fit un discours d'un chauvinisme insupportable[30]. Il y eut des mathématiciens humanistes et progressistes, tels que Painlevé, Borel et Hadamard pour protester, mais en vain.

En 1924, il n'y eut pas non plus d'Allemands invités à Toronto, et ce n'est qu'en 1928, à Bologne, à la suite des pressions des collègues italiens, que les Allemands furent réadmis, et Hilbert eut un triomphe. Cela n'allait pas de soi même pour les Allemands, et un nationaliste (devenu ultérieurement nazi) comme Bieberbach fit une opposition vigoureuse. La situation fut encore assez chaotique aux deux suivants: Zurich en 1932 et Oslo en 1936.

Il y eut une longue interruption due à la Seconde Guerre Mondiale, et les choses ne reprirent qu'en 1950. On ne commit pas l'erreur de 1920 en ostracisant les vaincus. Le Congrès eut lieu à Harvard aux États-Unis, et les médailles Fields furent attribuées au Japonais Kodaira et à Laurent Schwartz. Mais la guerre froide avait commencé, on était en pleine hystérie McCarthyste. Pour des raisons politiques, Schwartz obtint son visa avec difficulté (il fallut monter jusqu'au Président Truman) et Jacques Hadamard se vit refuser l'entrée aux États-Unis. Il y fallut la ténacité et l'habileté de Henri Cartan, menaçant d'un boycott français, pour que le visa de Hadamard arrive *in extremis*.

Depuis, les choses ont fonctionné à peu près normalement tous les quatre ans. Je raconterai plus loin les difficultés qu'il y eut à vaincre en Pologne pour ce fonctionnement normal en 1982 et 1983. Le titre officiel est "Congrès International des Mathématiciens"[31] pour ce qui est en fait le "Congrès Mondial des Mathématiques".

Ce fut longtemps une entreprise européenne, et l'on a vu que la première rencontre hors d'Europe se passa à Toronto en 1924. Il est remarquable que celle de 1950 ait lieu aux États-Unis, comme décidé depuis 1936, alors que la Seconde Guerre Mondiale (et le nazisme) avait fait basculer le centre de gravité de la science vers les États-Unis. Signes d'une nouvelle évolution: la rencontre de 2002 se fit à Pékin, et ces jours-ci (août 2010), c'est à Hyderabad, en Inde, que tout le monde se retrouve. Le prochain rendez-vous est en 2014, en Corée.

Quelle est la situation aujourd'hui? Depuis 1950, fonctionne sans trop d'à-coups une *Union Mathématique Internationale* (sigle IMU en anglais). Peut-être manque-t-elle un peu de transparence comme toutes ces bureaucraties internationales cooptées. Il y a rarement eu de conflits d'intérêt, sauf peut-être quand une médaille Fields fut décernée au fils du président de l'IMU.

La tâche principale de l'IMU est l'organisation des congrès quadriannuels ICM. Cela va du choix du pays hôte à celui des conférenciers et des lauréats des divers grands prix. Les mathématiciens français se pavanent car ils ont reçu un quart des Médailles Fields, mais en incluant parmi les Français un apatride (Grothendieck), deux Belges (Deligne, Bourgain) et un Vietnamien (Ngo Bao Chau), qui appartiennent indiscutablement à l'"école française".

30 Les mêmes boycottèrent la visite d'Einstein à Paris en 1922.
31 Sigle anglais ICM.

L'IMU ne réunit que 65 pays sur les 190 membres des Nations-Unies. L'effort de mondialisation se poursuit vigoureusement. L'obstacle est parfois financier pour les pays pauvres qui n'ont que peu de mathématiciens. Les réunions ICM sont la grand-messe: remise des grands prix, manifestation de l'unité des mathématiques toujours menacées d'exploser en sous-disciplines qui s'ignorent, manifestation de cette collaboration pacifique entre mathématiciens du monde entier, manifestation de l'importance croissante prise par les femmes mathématiciennes. A l'époque des communications instantanées et des moteurs de recherche mathématiques, il ne faut plus s'attendre au scoop, à l'annonce d'un résultat mathématique vraiment nouveau, mais on peut écouter (parfois) de belles présentations synthétiques.

FANTÔMES MATHÉMATIQUES

Jusqu'à l'effondrement du bloc soviétique en 1990, la plus grande frontière était le *Rideau de Fer*, ainsi nommée par Churchill, cette clôture auto-imposée par le régime soviétique. On sait que Pasternak dut décliner le prix Nobel de littérature, mais Landau (et quelques autres) n'eurent pas à refuser le prix Nobel de Physique. Il est certain que les russes ont été sous-représentés dans les médailles Fields, mais le premier à la recevoir, Sergei Novikov en 1970, ne put venir la chercher.

Avec les mathématiciens d'Europe de l'Est, les pays "satellites" de l'Union Soviétique, le fil ne fut jamais totalement coupé. Nous avions des contacts avec les mathématiciens hongrois, tchèques, allemands de l'Est, et les relations étaient assez étroites entre France et Pologne. Il y avait un bon vivier de mathématiciens en Roumanie, mais beaucoup émigrèrent vers l'Ouest. Certains le firent illégalement comme Valentin Poénaru qui sauta le mur lors de l'ICM de 1962 à Stockholm. Le soutien un peu curieux offert par Zoia Ceausescu, la fille des dictateurs placée à la tête de l'Institut Mathématique de Bucarest, permit à d'autres d'émigrer.

En Union Soviétique, contrairement aux biologistes chez qui Mitchourine et Lyssenko firent régner un absurde anti-scientifique au nom de l'orthodoxie marxiste-léniniste, les mathématiciens furent relativement épargnés car ils surent rester unis. Il y eut bien des persécutions dans les années 1920 (Lusin, Fedosov, ...)[32], puis dans les années 1950-60 les grandes affaires (Plioutch, Essenin-Volpin, Chikhanovitch, Orlov, ...) et enfin l'émigration vers Israël ou les États-Unis à partir de 1970 (Misha Gromov, Viktor Kac, David Kazhdan, ...). Mais je voudrais parler ici des difficultés de communication.

Il y avait d'abord l'obstacle linguistique. Jusque vers 1940, beaucoup d'articles mathématiques russes étaient écrits en allemand (Kolmogoroff, Alexandroff, Gelfand, ...) mais on passa ensuite au russe et les revues scientifiques soviétiques étaient peu diffusées en Occident. Un remède partiel fut offert par un très ambitieux programme de traduction presque simultanée des principales revues mathématiques en russe par les soins de la Société Mathématique Américaine.

Le plus gênant était l'impossibilité de voyager hors de l'Union Soviétique, sauf rares exceptions. Dans les années 1960, Arnold, Manin, Faddeev, Kirillov purent faire de courts séjours en France, mais en laissant leur famille en Russie. En 1970, l'ICM eut lieu à Nice et, comme signalé plus haut, Novikov devait recevoir la

32 Voir le livre de Loren Graham et Jean-Michel Kantor "Naming infinity" sur l'histoire curieuse de l'École moscovite de théorie des ensembles.

médaille Fields. Il ne put venir, ainsi qu'environ la moitié des conférenciers soviétiques invités. La moitié autorisée devait retourner chaque soir sur le paquebot qui les attendait dans la rade de Villefranche (près de Nice).

En particulier, Dynkin, qui venait de se reconvertir de la théorie des groupes aux probabilités, était absent. Son texte me fut remis par Ladizhenskaia le premier jour, et avec l'accord de Dieudonné, président du Congrès, j'offris de faire sa conférence à sa place. Ce fut un peu acrobatique car je donnais le même jour mon propre exposé dans un lieu différent (vive la bicyclette pour se déplacer rapidement dans Nice!). A 14 heures, Prokhorov (éminent probabiliste russe) ouvrit la séance de la section de probabilités et annonça l'absence de Dynkin. Je me levai alors, mais – était-ce la crainte des mouchards soviétiques dans la salle – Prokhorov déclara la séance terminée et quitta la salle. Le complot était bien au point! A sa manière très aristocratique, Dooh vint sur l'estrade, et expliqua que la session du lendemain, sous sa présidence annoncée, commençait; puis il me donna la parole, avant que Prokhorov ne referme la porte. J'ai revu Prokhorov bien plus tard, après l'effondrement soviétique, assez piteux, mais je ne cherchai pas à le placer dans une situation humiliante!

Une deuxième fois, je remplaçai un fantôme. En 1986, l'ICM eut lieu à Berkeley, et le président-élu de l'IMU était alors mon vieil ami Ludwig Faddeev. Juste avant l'ouverture, il me tendit un manuscrit de Manin et un de Drinfeld. J'étais déjà bien lié à Manin, mais je ne connaissais pas Drinfeld. Le *hic* était que l'exposé de Drinfeld était programmé pour le jour même. J'acceptai le défi, j'allai voir Kaplansky, le président américain du Congrès. Il m'enferma dans ce qui ressemblait à l'office de son bureau, avec café et sandwiches, et nous fermâmes la fenêtre aux psalmodies "Hare Krishna" provenant d'un groupe de hippies dans la rue (nous étions en Californie!). Il y avait 400 personnes pour écouter ce qui était sans doute l'exposé le plus novateur du Congrès. Je dus ensuite organiser tant bien que mal une distribution de copies du texte. Un an plus tard, on me transmit un laconique message de remerciements, bien dans le style réservé de Drinfeld.

A ma connaissance, les congrès ICM sont maintenant vraiment sans frontières. La Chine accueillit l'ICM de 2002 à Pékin. L'année précédente, j'assitai à Pékin à une réunion de préparation assez protocolaire, où le président Yang Je Min et le mathématicien Chern firent montre de leur amitié ancienne. Le but de cette rencontre était d'affirmer l'importance politique de la modernisation technologique de la Chine. Le Vietnam participe depuis longtemps librement aux ICM, avec le parrainage français au début. Il y a trop peu de mathématiciens à Cuba ou en Corée-du-Nord, les deux dernières geôles marxistes, pour tester ces régimes. La situation au Moyen-Orient pourrait devenir plus critique.

POLOGNE ACTE I: CONCILIABULES

La belle mécanique des Congrès Internationaux des Mathématiciens, relancée en 1950, a failli se gripper en 1982. Après la rencontre de 1966 à Moscou, il y avait une volonté de se rapprocher, au moins géographiquement, de l'Union Soviétique. Après Nice en 1970 et Vancouver en 1974, on se retrouva à Helsinki en 1978, avec la promesse de se revoir à Varsovie en 1982.

Les collègues polonais s'étaient activés, dès 1981, pour la préparation. C'était sans compter avec la situation politique. La Pologne avait conservé plus d'autonomie que ses voisins, grâce à la présence d'une Église Catholique restée puissante. Un seul exemple: il y avait en Pologne un vigoureux mouvement scout contrôlé par l'Église. On était au début du processus paradoxal, qui allait abattre le régime communiste par le moyen d'un mouvement authentiquement ouvrier:

Solidarnosc! Mais les choses étaient en train d'aller trop vite. Le général Jaruzelski, chef de l'armée, s'assura le contrôle du gouvernement et du Parti Communiste, et déclencha, le 13 décembre 1981, ce qui était l'épisode inédit d'un coup d'État militaire dans le bloc soviétique. Ceux qui veulent absoudre Jaruzelski –et j'en suis– rappellent que sa famille fut déportée en Sibérie en 1940, et que l'armée soviétique était massée aux frontières polonaises en 1981. On déclara l'état d'urgence –appelé "état de guerre"– le pays fut bouclé, et des milliers d'activistes furent jetés en prison ou dans des camps. Il y eut peu de bavures, heureusement, mais comment organiser l'ICM82 à Varsovie dans ces conditions?

Toutes les communications étaient interrompues. Il y eut deux séries de rencontres: des négociations menées par l'IMU, et une mission d'information et de bons offices à l'initiative des mathématiciens français. Nous fûmes cinq volontaires pour le voyage, dont Laurent Schwartz, naturellement notre chaperon. Obtenir des visas ne fut pas aisé; je dus interrompre des vacances en Forêt-Noire pour une journée, où je retrouvai Schwartz et Verdier à Paris. Nous fûmes reçus à l'Ambassade de Pologne, près des Invalides, et repartîmes avec une promesse assez vague de visas. La secrétaire (très dévouée) de Schwartz à Polytechnique collecta les cinq passeports et resta pendue nuit et jour au téléphone. Finalement, nous eûmes le feu vert polonais, et un des rares avions polonais encore en service nous emmena à Varsovie. Nous arrivâmes une demi-heure avant le couvre-feu (de 23 heures à 6 heures), et la voiture de notre ambassadeur nous mena à trop vive allure vers l'un des rares hôtels restés ouverts aux étrangers. La présence, au bar, d'hôtesses trop avenantes et trop aguicheuses, qui parlaient familièrement avec le policier de faction à l'entrée, nous rappela qu'il fallait être sur nos gardes. Point besoin d'être James Bond pour savoir que le métier de franc-tireur requiert quelques précautions classiques.

Les négociations furent assez extraordinaires, et montrèrent l'ambiguïté de la situation. Pour simplifier, je dirai que tous les camps politiques se définissaient comme patriotes polonais – en clair, ils étaient tous d'accord pour éviter l'intervention russe qui aurait déclenché un bain de sang. La volonté unanime, du petit-neveu de dix ans du mineur polonais de Lorraine voisin de mes parents, prêt à se battre avec une fronde contre les chars russes, aux plus hauts responsables universitaires, était celle de la résistance.

Verdier et moi, nous allâmes pour une journée à Wroclaw (Breslau) en Silésie avec la feuille de route: "rencontrer tel chef semi-clandestin de l'opposition". Grâce à un réseau extraordinaire de complicités, la rencontre eut lieu, et nous aida à définir une ligne politique claire:

- le gouvernement polonais souhaitait que ce Congrès prestigieux ait lieu, pour pouvoir affirmer que la situation était normale;

- la résistance nous remit une liste de 75 internés, mathématiciens au sens strict ou généralisé, dont on voulait obtenir la libération.

Du coup, le marchandage était évident.

Entre autres souvenirs mémorables, il y eut un dîner au domicile privé d'un vice-ministre du gouvernement communiste, et l'air faussement navré du père quand le fils se pavana devant nous avec une bannière Solidarnosc!

Nous quittâmes Varsovie assez perplexes. Mais nous comprîmes l'importance de notre mission à notre arrivée à Paris. Au pied de l'avion, une voiture nous attendait et emmena certains d'entre nous à l'Élysée, où nous fûmes longuement reçus par Jacques Attali, alors conseiller spécial du Président de la République, François Mitterand. Les cinq petits mathématiciens français étaient parmi les premiers Occidentaux à pouvoir contacter les dirigeants polonais. On nous utilisait comme des pions dans un jeu diplomatique subtil: c'est l'autre dimension des mathématiciens sans frontières.

A propos de ce compte-rendu à l'Élysée, je voudrais faire une petite digression au sujet de Schwartz. Une fois de plus, il était traité comme une personnalité officielle. Quel que soit le président, il a toujours eu plus ou moins ses entrées à l'Élysée. Si pour des raisons de proximité politique, ce n'était pas étonnant au temps de Mitterand, c'était plus surprenant sous Giscard. Pour le temps de De Gaulle, Schwartz ne donne pas toutes les clés dans ses Mémoires, en particulier que l'oncle Robert est l'illustre pédiatre Robert Debré, ancêtre de la dynastie politique des Debré. Pour ceux qui accompagnaient Schwartz en voyage, cela pouvait être plaisant; je me souviens d'une arrivée à Bogota, où, après un voyage fatigant, nous fûmes conduits au salon d'honneur de l'aéroport, sans avoir à faire la queue pour les passeports et les bagages! Mais, dans des situations plus délicates, comme lors de notre arrivée à Varsovie, son assurance frisait parfois l'inconscience ou la naïveté. Il avait un solide parachute, mais ses compagnons étaient plus vulnérables.

POLOGNE ACTE II: LE CONGRÈS DÉCALÉ

Les négociations qui suivirent furent laborieuses, d'autant plus que les collègues polonais étaient eux-mêmes divisés sur la ligne à suivre. Finalement, lors d'une réunion sous l'égide de l'IMU, un collègue polonais, fervent catholique, cita l'Évangile: "Quand m'avez-vous visité alors que j'étais en prison?". Pour des raisons pratiques, on ne pouvait se réunir en août 1982; tout en gardant le sigle ICM82, imprimé sur les documents officiels et sur les bannières, on reporta la réunion à août 1983. Après quelques hésitations, car je n'aime pas abandonner ma famille au mois d'août, je cédai aux arguments de ma femme m'expliquant à quel point mon absence serait déloyale.

On avait craint un boycott. Il y eut environ 3000 participants, alors que la moyenne dans ces réunions oscille entre 3000 et 5000. Les Polonais manifestaient une liberté de ton qui époustouflait les autres représentants des pays de l'Est. Je me souviens en particulier de l'audace du recteur de l'Université de Varsovie lors de la cérémonie d'ouverture. Mon ami russe Iouri Manin, assis à côté de moi, me chuchota: "Les Polonais se prétendent réduits au silence. Si, dans ma tête, je me disais à Moscou le quart de ce qui vient d'être dit publiquement, je serais le lendemain déporté au fin fond de la Sibérie!".

Notre pari était presque gagné. Schwartz avait beaucoup insisté sur la levée du couvre-feu. Les dernières restrictions à la circulation dans Varsovie furent supprimées peu avant le Congrès. Sur les 75 prisonniers politiques pour lesquels nous nous étions engagés, 74 avaient été libérés. Il restait un emprisonné du nom de Czys. Je pense que le but de cette rétention était de tester la solidité de notre engagement. Mais pourquoi celui-là? Czys, tout en étant un mathématicien actif, n'avait peut-être pas une renommée internationale qui permettrait de mobiliser l'opinion mathématique mondiale. Il me semble aussi qu'il y avait des facteurs internes polonais qui faisaient que Solidarnosc ne jouerait pas le grand jeu pour lui. Pendant le Congrès, avec l'aide de Bernard Teissier et Christophe Soulé, nous nous lançâmes dans une campagne de signatures. Nous collectâmes environ 400 signatures de soutien en 5 ou 6 jours. Manin voulait signer, mais je ne souhaitais pas être responsable de sa déportation en Sibérie. Un collègue français, demeuré un communiste convaincu, me demanda pourquoi je voulais arbitrer en Pologne un conflit entre les curés et les militaires!

Par l'intermédiaire d'Onyszkiewicz, collègue mathématicien polonais, un des dirigeants importants de Solidarnosc, et qui sera plusieurs fois ministre après le changement de 1989, nous nous étions procurés une photocopie du dossier judiciaire de Czys. Comme dans Tintin, je recopiai à la main le dossier, puis *mangeai l'original*. Notre contact gouvernemental officieux était le vice-ministre des affaires étrangères. Lors de la grande réception officielle du Congrès, dans l'un des plus beaux palais historiques de Varsovie, nous devions nous rencontrer. Une négociation secrète au milieu d'une grande foule est parfois une bonne ruse. Nous fûmes présentés, un collègue américain et moi, de manière apparemment mondaine, à cet officiel polonais. Après un bavardage inoffensif pour s'apprivoiser, à sa demande, je sortis ma copie du dossier. Je fus interrompu: "Vos informateurs " à quoi je répliquai: "Mes informations, Monsieur le Ministre". Il écouta attentivement, me dit en soupirant qu'il y avait tellement d'affaires de ce genre qu'il ne les connaissait pas toutes. Au moment de nous quitter, je lui tendis mon dossier, qu'il refusa ostensiblement. Mais quelques secondes plus tard, je fus abordé par un de ses assistants qui bafouilla de telle sorte que je lui tendis le dossier – qu'il ne refusa point. On m'avait expliqué la gestuelle auparavant et j'avais pu me faire une répétition intérieure.

C'est dans l'avion du retour à Paris que se joua pour moi le dénouement. D'une part, le programme de radio diffusé dans l'avion mentionna la libération de Czys, intervenue de manière délibérée après notre départ. De l'autre, je fus surpris, en m'asseyant sur mon siège de sentir un obstacle: une grosse enveloppe que j'enfournai dans mon sac, et que je n'ouvris qu'à Paris. C'était un grand "Merci pour tout" cosigné par plusieurs des grands noms de la résistance.

Il y eut aussi quelques bénéfices "collatéraux". Mon ami Gawedzki, alors mon collègue à l'IHÉS, put faire venir en France sa femme et son fils bloqués à Varsovie. Quelques années plus tard, je découvris avec surprise qu'une de mes étudiantes à l'École Normale Supérieure avait bénéficié de notre négociation globale; elle avait pu quitter Varsovie où elle était retenue à 12 ans, pour rejoindre ses parents, à l'époque physiciens au CERN de Genève.

L'EUROPE UNIE, ACTE I: LA RÉCONCILIATION FRANCO-ALLEMANDE

Chacun sait que l'entreprise d'unification de l'Europe, commencée au traité de Rome, a pris plus de 50 ans, en gros de 1950 à 2000. Elle n'est pas vraiment terminée. Un des gestes fondateurs fut la poignée de main de De Gaulle et Adenauer, et il est clair que la première étape était de créer un attelage franco-allemand. L'extension vers l'Europe de l'Est ne pouvait être que l'acte II. Il me faut donc revenir en arrière.

Le personnage-clé est mon maître Henri Cartan, une des figures majeures des mathématiques du vingtième siècle. Avec Luc Illusie, je viens de publier un hommage à Henri Cartan, décédé en 2008 à l'âge de 104 ans. Je ne me répèterai donc pas. Dès les années 1930, Cartan avait démarré une solide collaboration avec les mathématiciens allemands de Münster: Behnke, Thullen et Stein, suivis par leurs élèves Remmert, Grauert et Hirzebruch. L'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, qui fut l'un des thèmes majeurs de la recherche de Cartan, est née de cette collaboration. La guerre de 1939-1945, même si elle rendit les contacts difficiles, ne brisa pas ces amitiés. Dès 1946, Cartan se rendit à Oberwolfach, dans la Forêt-Noire, qui abrite un important centre de rencontres mathématiques.

J'avais été l'étudiant de Cartan à la rue d'Ulm, j'avais assisté à son fameux Séminaire, et le moment venu, j'y avais apporté ma contribution (sur la géométrie algébrique); Cartan était aussi officiellement mon directeur de thèse (comme celui de la plupart de mes compagnons mathématiciens de la nouvelle génération). Après ma thèse, j'eus droit à un séjour (on dit aujourd'hui: "post-doctoral") de deux ans à l'Institute for Advanced Study à Princeton. Ce fut ensuite un long service militaire de plus de deux ans. Mais j'ai déjà raconté tout cela à propos de la guerre d'Algérie.

A 29 ans, en 1961, il me fallait trouver un poste de professeur[33]. L'époque était favorable, et on n'avait que l'embarras du choix. Le TGV n'existait pas encore, et je souhaitais ne pas trop m'éloigner de Paris. A chaque contact pris, je reçus la même réponse: "Nous serions heureux de t'avoir, mais Cartan nous assure que le poste de Strasbourg est pour toi!", alors que je n'étais pas candidat à Strasbourg! Difficile dans ces conditions de ne pas se retrouver à Strasbourg, où l'éloignement de Paris n'est pas dû simplement au nombre d'heures de train!

J'y restai dix ans, et ma femme a toujours assuré que ce furent nos années les plus heureuses. Il y avait une tâche énorme et exaltante: c'était la période de la plus grande expansion des Universités, et tout était à créer. Cartan, comme il me le dit à l'époque, me confiait la tâche du rapprochement entre mathématiciens français et allemands de la nouvelle génération. Il y avait aussi à Strasbourg Pierre Gabriel, mais Cartan considérait qu'il était trop allemand et pas assez français[34] pour servir vraiment de pont. Quant à moi, j'avais de nombreuses racines alsaciennes, avec ma mère née à Belfort d'une famille juive venant de Dabo, et une tante paternelle originaire de Molsheim. Grâce à ma mère, j'avais su très jeune lire l'allemand et il ne fallait qu'un peu de pratique pour que je le parle sans problème.

La circonstance favorable fut qu'au moment où j'étais recruté à Strasbourg, Dold (qui avait fait sa thèse avec Thom) l'était à Heidelberg, et Puppe à Sarrebruck. Or nous nous étions liés à Princeton, et nos intérêts mathématiques étaient proches. Pendant presque dix ans, nous nous sommes rencontrés très régulièrement pour ce que nous avions baptisé: "le séminaire européen de mathématiques". Chaque année, nous choisissions un thème en algèbre ou géométrie; nous avions des séances chacun chez soi, et au moins un week-end par mois de synthèse, assez souvent à Oberwolfach. Au moins deux livres de mathématiques[35] sont issus de ces travaux, et sont toujours des références utiles.

L'Université de Strasbourg fut tantôt allemande, tantôt française. A chacune de ces périodes, la bibliothèque de mathématiques s'était enrichie, et il y avait des trésors inestimables. A côté des œuvres de jeunesse d'André Weil et Henri Cartan, publiées dans la série des "Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg" (aux éditions Hermann), il y avait des livres allemands classiques toujours valables, et je profitai des raretés de la bibliothèque pour faire republier par Chelsea l'Algèbre de Heinrich Weber et les Œuvres complètes de Dedekind (et Dirichlet). On découvrit un exemplaire rarissime de "La géométrie pour les peintres" d'Albrecht Dürer, qui fut le clou d'une très belle exposition sur Dürer. En fait, il suffisait d'intégrer les mathématiques dans la riche tradition de culture allemande (musique, peinture) de Strasbourg.

Dans les journées fièvreuses de mai 1968, nous occupâmes le pont qui relie Strasbourg à Kehl pour accueillir les étudiants allemands qui devaient nous ramener Cohn-Bendit. Ce fut un espoir déçu, mais

33 On dit aujourd'hui: "professeur de deuxième classe" mais l'appellation de l'époque était: "maître de conférences".
34 Ce que sa carrière ultérieure confirma, puisqu'il enseigna à Bonn et Zurich, et publia un manuel d'algèbre en allemand!
35 Celui de Demazure et Gabriel, et celui de Gabriel et Zisman.

l'occasion d'une fraternisation inattendue entre policiers allemands et étudiants français. De manière moins folklorique, nous invitâmes à Strasbourg un groupe d'étudiants de première année de Fribourg. Dans mon amphithéâtre, avec 30 français et 40 allemands, je donnai mon cours en allemand.

Je fus invité pour des séjours plus longs par les Universités de Heidelberg, et de Tübingen (l' *Alma Mater* de Kepler!). Paul-André Meyer, l'un des rénovateurs du Calcul des Probabilités dans la France de 1960, fut mon collègue à Strasbourg, et fut détaché pour deux ans à Fribourg. Il y eut de nombreuses autres initiatives "européennes" auxquelles je participai: les rencontres régulières de physique mathématique à Strasbourg, qui attiraient de nombreux collègues suisses (Genève et Zurich) ou allemands, le "Séminaire lotharingien de combinatoire" qui fédérait les spécialistes de Strasbourg, Vienne, Nuremberg, Stuttgart (et même Montréal et Bordeaux!). Dans les deux cas, on est proche aujourd'hui de la centaine de rencontres!

Tout le terreau culturel de la Mitteleuropa, si actif et fécond au temps de la Réforme, n'attendait que d'être réveillé et réactivé. Les progrès sont si extraordinaires que j'ai siégé récemment, à Nancy et à Strasbourg, dans le jury de thèses en cotutelle, où la discussion se faisait alternativement en français et en allemand, en oubliant le latin moderne qu'est l'anglais!

L'EUROPE UNIE, ACTE II: DE L'ATLANTIQUE À L'OURAL

Ce titre est pour rappeler une prophétie –ou une injonction– célèbre de De Gaulle. Je me souviens des objections de certains –dont ma femme– à une construction européenne qui ne rassemblerait que la moitié occidentale du continent. A quoi je répondais qu'une Europe de l'Ouest pacifique et prospère aurait un pouvoir d'attraction sur la partie orientale. Ce qui se réalisa au bout du compte.

La part des mathématiciens fut la création de la *Société Mathématique Européenne*. Là encore, le rôle de Cartan fut énorme et prophétique. Au passage, lors de la présentation par la cinéaste Isabelle Broué, la fille d'un ami, d'un film sur la vie de Cartan, je lui fis le commentaire suivant: "Ma chère Isabelle, tu nous as présenté une vidéo familiale émouvante. Ne sais-tu pas que Cartan est un personnage historique, à la hauteur de Mendès-France ou d'Adenauer?". Bien sûr, j'exagérais un peu.

La Société Mathématique Européenne ambitionne de devenir aussi importante que la Société Mathématique Américaine. Comme cette dernière, elle s'essaie à devenir une maison d'édition non commerciale; dans l'incertitude actuelle sur l'avenir des livres imprimés, c'est une ambition difficile. La société publie un très intéressant bulletin d'information trimestriel qui montre clairement la diversité de l'Europe et redonne leur place à des traditions en marge du poids lourd France-Allemagne-Grande Bretagne. La manifestation la plus visible est constituée par les Congrès Européens quadri-annuels[36]. Le premier eut lieu à Paris, à l'initiative de Max Karoubi, sous la présidence de Cartan, en 1992. Le retour à la maison européenne des mathématiciens russes (Arnold, Gelfand, ...), avec la découverte de la jeune génération (Drinfeld, Kontsevich, ...), fut un moment émouvant.

Mais pour en arriver là, il a fallu deux étapes essentielles. Tout d'abord, la résurrection des nations du Sud de l'Europe. Si l'Italie avait toujours été présente, avec une école mathématique qui restait de

36 Le prochain est prévu à Cracovie, en Pologne, en 2012.

haut niveau (Andreotti, Gallavotti, de Giorgi, Bombieri, Regge, ...), il fallut attendre 1975 pour que le Portugal, l'Espagne et la Grèce en terminent avec les dictatures militaro-fascistes. Dans ces cas-là, il faut une génération pour que les choses se remettent en place. Si l'éclat mathématique de la Grèce me semble bien modeste, mes nombreux voyages au Portugal m'ont permis d'observer la montée en puissance des mathématiques. Il y a 15 ou 20 ans, j'étais un missionnaire venu apporter la bonne nouvelle bourbakiste – ou postbourbakiste. Aujourd'hui, je fais face à des interlocuteurs ayant leur mot à dire. J'ai moins de contacts avec l'Espagne, mais ma récente visite à Madrid m'a fait bonne impression. Il y a déjà un bon moment que le Centre de Recherches Mathématiques de Barcelone a atteint un très bon niveau, avec des spécialisations bien choisies, en s'appuyant sur des coopérations régionales[37]. Dans le cadre du programme Erasmus d'échange d'étudiants européens, nous recevons de bons étudiants espagnols. Il n'est pas fortuit que Madrid ait accueilli l'ICM en 2006.

Mais l'Europe de l'Est? Il faut distinguer selon les pays. Pour la Pologne, sans remonter à Chopin ou Marie Curie, les rapports avec la France furent toujours profonds; on vit même Edward Gierek, un mineur franco-polonais, diriger la Pologne communiste de 1970 à 1980. L'extraordinaire École Mathématique des années 1920-30 avec Banach, Zygmund, Kuratowski, utilisait le français comme langue scientifique. L'École d'après 1945, peut-être moins éclatante, comporta de grands noms en théorie des singularités, analyse fonctionnelle, géométrie différentielle, physique mathématique. Lojacewicz, et beaucoup de ses collègues, visitèrent fréquemment la France. Ceci explique pourquoi, lors de la crise de 1981, les mathématiciens français furent aussi actifs. En Hongrie, après la sauvage répression soviétique de 1956, qui provoqua la déchirure entre de nombreux intellectuels français (mais pas tous) et le système soviétique, un cours un peu plus libéral se fit jour. La personnalité extraordinaire de Paul Erdös, mathématicien itinérant, permit de garder le contact entre mathématiciens hongrois et occidentaux.

La situation était beaucoup plus sombre dans d'autres pays. Je ne parlerai pas de l'Allemagne de l'Est, où je ne me rendis jamais, et qui vivait dans une paranoïa presque égale à celle de Cuba. En Bulgarie, quelques collègues avaient la possibilité de voyager, et je fis très tôt la connaissance d'Ivan Todorov, éminent spécialiste de physique théorique. Mon expérience personnelle se fonde sur un voyage que je fis en 1986 en Roumanie et Tchécoslovaquie.

La Roumanie avait une situation proche de celle de la Syldavie, pays imaginaire décrit dans les *Aventures de Tintin*. Avec Cuba et la Corée-du-Nord, elle était une monarchie communiste héréditaire. Elle était gouvernée par le couple infernal des Ceaucescu. Elena, bien que quasiment illettrée, se prétendait la meilleure chimiste du pays, et un gros traité –de bon niveau– portait son nom sur la couverture. L'ambition scientifique s'était reportée sur les enfants. Si l'aîné, un monstrueux fils à papa, était le prince héritier, la fille Zoia dirigeait l'Institut de Mathématiques. Il y a eu –et il y a toujours– une brillante école de mathématiques en Roumanie, mais beaucoup émigrèrent: Poenaru, Lusztig, Moscovici, Foias, et souvent avec l'aide complice de Zoia Ceaucescu. Elle est décédée il y a quelques années.

Je fis la connaissance du frère Valentin Ceaucescu lors de mon voyage de 1986. Un congrès de physique théorique de bon niveau avait lieu à Brasov, avec au programme des distractions, la visite du "château de

37 Il se peut que, comme au Québec, le défi de faire exister une nation — ce dont je me méfie en général — ait été un moteur de progrès et de développement.

Dracula" et un concert d'orgue à la cathédrale luthérienne de Brasov (avec commentaire en allemand par le pasteur). Valentin Ceaucescu était le parrain de notre rencontre, et j'ai le souvenir d'un retour époustouflant à Bucarest dans sa voiture. Je n'ai su que récemment qui était l'élégante auto-stoppeuse devenue entre temps Madame V. Ceaucescu. Après la "révolution" de 1990 et l'exécution du couple infernal, les deux enfants Zoia et Valentin furent mis à l'ombre pendant quelques mois. Je m'étais promis de protester si cela durait plus de six mois, estimant qu'en des temps troublés, il vaut mieux parfois être tenu à l'ombre (je me souvenais de l'automne 1944 et de l' *épuration* qui suivit en France la *libération*). Je suis allé récemment à Bucarest. J'y ai retrouvé, sans déplaisir, Valentin Ceaucescu, qui vit discrètement, toujours membre de l'Institut de Physique. La situation à Bucarest est assez ambigüe, et l'on continue d'y vivre entre deux mondes, l'ancien et le nouveau, avec des meutes de chiens errants dans la ville.

La deuxième partie de mon voyage fut une mission à Prague pour le compte des "Philosophes sans frontières". En Angleterre s'était créée une "Jan Hus Association" qui apportait aide et secours aux dissidents tchèques de la *Charte* 77. Une des animatrices de ce groupe de philosophes était Catherine Audard. Je l'avais connue enfant, puis elle fut élève à l'École de Sèvres[38]. Elle épousa un neveu de Marie-Hélène, épouse de Laurent Schwartz et fille de Paul Lévy. Elle enseigna la philosophie à la *London School of Economics*, et aussi au *Collège International de Philosophie*, où je la retrouvai. Cette structure a été créée, pour, et autour de Jacques Derrida. Elle illustrait, au moins au début, cette volonté de philosopher sans frontières. Avec son collègue Vernant (ancien professeur d'histoire grecque au Collège de France), Derrida créa la branche française de Jan Hus.

Je fis donc une mission de *Mathématicien-Philosophe sans frontières*. J'avais dans ma valise en certain nombre de livres interdits à remettre aux philosophes (dont la dernière édition de la *République* de Platon!). J'avais aussi une forte somme d'argent pour venir en aide aux prisonniers politiques. Je la remis, avec des ruses de sioux, à Piotr Uhl, qui m'embarrassa fort en me donnant un reçu. Tout mon séjour fut surréaliste. Je logeais chez des intellectuels de la "zone grise", bons communistes le jour et dissidents la nuit (je pense que leur centre de gravité tournait autour de Trotski). J'étais en contact avec Piotr Vopenka, un mathématicien-logicien fort original avec sa "théorie alternative des ensembles". Il me fit parler à son Séminaire de l'Université Charles. Le lendemain, je donnai la suite de mon exposé, plus philosophique, au Séminaire clandestin des philosophes persécutés. Le public était à peu près le même pour mes deux exposés, y compris sans doute les mouchards.

Comme Piotr Vopenka est le beau-frère de Vaclav Havel, je fus invité pour une soirée (privée) chez Havel. Malheureusement, il devait se cacher ce soir-là, et je rencontrai tout son clan familial – sauf lui. D'ailleurs, je joue de malchance avec Havel. Dix ans plus tard, devenu président de la République Tchèque, il fit une visite d'État à Paris. Son programme comportait une visite au Collège de France. J'assistais à la même heure à un cours au dit Collège. Les appariteurs, sans beaucoup de ménagement, nous firent sortir, et je n'aperçus que de très loin le visage de Havel, entre des rangs d'officiels et de policiers.

Lors de ma visite de 1986, personne ne se doutait que la fin du système soviétique était si proche. Très peu d'années plus tard, je revis Piotr Vopenka, devenu ministre de l'Éducation Nationale, et aussi peu à l'aise dans cette fonction que je l'aurais été si les hasards de

38 Autrement dit, École Normale Supérieure de Jeunes Filles (ENSJF), dirigée entre autres par Madame Prenant, et Josiane Serre, la femme de mon collègue et ami Jean-Pierre Serre, fameux mathématicien.

l'histoire avaient fait de Laurent Schwartz notre président, qui m'aurait nommé ministre.

En fait, je n'étais pas en terrain inconnu. L'opposition au régime communiste tchécoslovaque s'était manifestée par le manifeste de la Charte 77 (en 1977), dirigé entre autres par Havel, Uhl, Dès 1979, à l'occasion du procès des dissidents, plusieurs délégations d'intellectuels français étaient venues les soutenir. Il y avait parmi eux les mathématiciens Marcel Berger et Jean Dieudonné (âgé de 75 ans). Il y fallait beaucoup de courage, et ceci nous valut la reconnaissance des dissidents. On trouvera des détails dans l'autobiographie de Schwartz, page 313-4.

LIBÉRER L'AMÉRIQUE LATINE: SUR LES TRACES DE GUEVARA?

Dans les cinquante dernières années se succédèrent en Amérique Latine nombre de dictatures, le plus souvent militaires, auxquelles s'opposèrent des mouvements "révolutionnaires" guère plus respectueux de la dignité humaine. Des mathématiciens furent pris en otage dans ce système, tel José Massera, en Uruguay, qu'une campagne internationale menée par Schwartz et Dieudonné finit par faire libérer. Aujourd'hui, c'est à Cuba que les persécutions sont les plus criantes, mais aucun mathématicien n'est pour le moment en danger, ce qui pourrait justifier une campagne d'opinion et des pressions.

J'ai visité à plusieurs reprises le Brésil et l'Argentine, mais dans des périodes calmes, le seul souvenir désagréable étant le vol de mon appareil photographique à Rio de Janeiro l'an passé. Je centrerai ici mon récit sur le Chili, où j'ai effectué de nombreux séjours.

C'est fin 1973 que, avec le soutien des États-Unis, les militaires chiliens renversèrent le gouvernement de Salvador Allende, avec une répression épouvantable. Dans l'ensemble, les universitaires soutenaient Allende. Beaucoup perdirent leur poste, et furent réduits à l'exil. La France en accueillit un certain nombre, dont Frederigo Varela, très intéressé par la mathématisation de la biologie et de la physiologie. Je passais l'année à Princeton lorsque j'appris le danger que courait Neantro Saavedra. Celui-ci, originaire du Venezuela, le dernier élève de Grothendieck, était un marxiste convaincu. Je fis pression sur mes collègues de Princeton pour qu'on l'accepte, hors contingent, en cours d'année universitaire. La flexibilité de l'Institute for Advanced Study permit ce repêchage. Il arriva avec sa compagne, rencontrée à l'IHÉS. J'avais à ma disposition un petit crédit que je versai à celle-ci, ce qui me permit de disposer de la secrétaire de Grothendieck! Ma femme la prépara au concours de Sciences Politiques, en échange d'une aide pour les soins de notre fille de six ans. Après cette année à Princeton, Neantro put se recaser au Venezuela et Antoinette en France, loin des geôles de Pinochet.

Jorge Soto Andrade était en France depuis 1967, et travaillait avec moi en thèse. J'avais à Strasbourg une bonne petite équipe en théorie des groupes que je transportai à l'IHÉS en 1971. Après avoir soutenu sa thèse en 1975, il retourna au Chili pour des raisons familiales. Ayant par précaution gardé son poste au CNRS, il en démissionna un an plus tard. Son caractère assez détaché, influencé par sa philosophie bouddhiste, lui permettait d'être un opposant presque au grand jour et de construire, tel l'araignée, une toile très efficace dans les diverses Universités du Chili. Il m'écrivait par le courrier diplomatique français, ce qui m'obligeait à lui envoyer des carnets de timbres français. De toute façon, il avait un soutien très efficace de l'ambassade de France; ceci lui permit d'exfiltrer Guido Ahumada, menacé par la dictature, et qui fut l'un de mes étudiants en thèse.

La situation se détendit un peu, et on put envisager des séjours réguliers au Chili de mathématiciens français, dont moi-même et Claude Dellacherie (probabiliste de Rouen et collaborateur de Paul-André Meyer). Les collègues qui avaient perdu leur poste à l'Université publique purent souvent se recaser à l'Université Pontificale (qui disposait de sa propre chaîne de télévision, plus ouverte que la chaîne publique). Il faut dire que l'Église Catholique est experte dans l'art du double jeu. J'eus une fois rendez-vous à l'Archevêché avec un prêtre-ouvrier français (ami et collègue d'un de mes beaux-frères); il me reçut en face du bureau de l'archevêque, qui arrivait, tout déguisé encore pour un Te Deum, entouré des dignitaires de l'armée. Il est exact que je me sentais beaucoup plus détendu dans mon enseignement à l'Université Pontificale.

Pendant des années, on vécut sous un régime de couvre-feu qui s'assouplit progressivement, et avait l'avantage de limiter la longueur des soirées – on était en Amérique Latine! Il fallait se méfier des provocateurs et informateurs de la dictature, et les médias étaient censurés. On pouvait cependant voyager. Je me rendis à Arica, à la frontière nord. J'y fus l'hôte de Nancy Alanoca, connue par l'intermédiaire de son frère émigré en France. Après avoir joué un rôle important sous Allende, à propos de la réforme agraire, elle continuait une action semi-clandestine (et je guettais les bruits la nuit chez elle!). Elle s'arrangea pour me faire interviewer par la radio locale, où je m'amusai, comme à Varsovie à la même époque, à profiter de la complicité de la journaliste pour faire un numéro du double sens qui était de la haute voltige. J'étais là aussi lorsqu'eut lieu l'attentat manqué contre Pinochet, perpétré par le Frente Patriotico Manuel Rodriguez (un groupe révolutionnaire d'extrême gauche). Ma femme me téléphona affolée de France, mais je rentrai sans encombres à Santiago de mon voyage du week-end, et pus me rendre le surlendemain sur le lieu même de l'attentat, hors de la ville. Imaginez, par comparaison, Paris le soir d'un attentat contre Sarkozy!

Avec la fin de la guerre froide, les États-Unis n'avaient plus besoin de Pinochet, et le lachèrent. Il rendit le pouvoir après avoir perdu son deuxième referendum. L'événement symbolique le plus frappant – semblable en émotion à la chute du mur de Berlin – fut "Chile Crea". Né de l'imagination et du talent organisationnel d'émigrés chiliens à Paris, cet événement prétendait être un festival artistique à l'échelle du pays. Jack Lang, alors ministre de la Culture, paya le voyage à un groupe d'intellectuels français, où je côtoyai Paul-Émile Beaulieu, le père de la pilule-retard, et Jack Ralite, ancien ministre communiste du premier gouvernement de Mitterand. Dès l'arrivée à l'aéroport, nous fûmes pris en charge par un comité d'accueil qui narguait les policiers de l'autre côté de la rue. Ce fut pendant quatre jours une débauche de happenings plus extravagants les uns que les autres: visite de la maison de Pablo Neruda, de la tombe de Violetta Para, grand meeting final (où la télévision catholique zooma sur le "groupe de nos amis français"). Les jeunes filles de bonne famille, élèves du conservatoire Schumann affilié au Goethe Institut allemand, jouèrent avec leur violon en pleine rue. J'assistai même à la création du syndicat ("gremio" en espagnol) des artistes lyriques. Je dus y prendre la parole et le lendemain, lors de mon arrivée à l'Université[39], je fus ovationné et l'on m'offrit solennellement ma photo en première page d'un journal gauchiste: *Fortín Mapocho*. Il y avait aussi une traduction et une amplification rhétorique de mon discours aux artistes.

Il y eut ensuite la longue, trop longue, période de transition. La Concertation Démocratique, coalition

39 J'avais une double casquette, car il y avait un Colloque Mathématique Sud-Américain en même temps!

des deux partis modérés: Chrétiens-Démocrates et Sociaux-Démocrates, appuyée sur divers partis de gauche plus radicaux, fit élire cinq présidents (chacun pour 4 ans), la dernière étant Michèle Bachelet. Elle termina sur un triomphe, mais la constitution, sage sur ce point, lui interdisait un deuxième mandat immédiat. On vit donc en janvier dernier une alternance pacifique gauche-droite, signe que le pays est réconcilié. Arracher leurs privilèges à Pinochet et à l'armée fut un long et difficile combat, qui ne s'acheva qu'à la mort de Pinochet. Je me souviens d'une conversation avec le ministre de la défense du président Frei:

– Monsieur le Ministre, avez-vous un passé militaire?
– Dieu m'en garde, je suis avocat!
– Quel est votre rôle?
– Maintenir solidement fermée la porte de la garde-robe aux uniformes.

J'eus encore un rôle à jouer au Chili, moins militant. Sous la présidence du Démocrate-Chrétien Frei (dont le grand-père avait déjà été président avant Allende), notre collègue Claudio Teitelboim[40], directeur de l'Institut de Physique Théorique[41], fut chargé de l'organisation et de la direction d'un "Conseil Présidentiel pour les Sciences et les Techniques". Chaque année, nous nous réunissions pendant une semaine pour faire une évaluation, et des recommandations de financement. Je m'y occupais des mathématiques, mais cela me donnait une vue transversale. Nous rendions compte directement au Président Frei qui avait une solide formation d'ingénieur[42]. La seule fois où il écouta distraitement notre rapport fut le jour où il avait à choisir le nouveau chef de l'armée, en remplacement de Pinochet. Il y eut ensuite un conciliabule entre le président et Teitelboim, qui était son conseiller le plus écouté sur tous sujets. Évidemment, il était comique d'entrer dans la Moneda, siège de la Présidence, avec les honneurs de la garde, alors que quelques années plus tôt, je n'aurais pu m'approcher sans être traité en suspect!

Quel soulagement lorsque les choses sont redevenues normales, et qu'on peut ranger son uniforme de franc-tireur des droits de l'homme et du mathématicien!

TÂCHES ACTUELLES

Avec la fin de la guerre froide, le monde n'a malheureusement pas trouvé la paix universelle. Les menaces sont nombreuses:

- l'impérialisme américain n'est pas mort, avec au moins deux guerres en cours (Irak et Afghanistan), et la tension avec Cuba (et le Venezuela, l'Iran, la Corée-du-Nord, ...);

- la Russie a mal accepté la perte de son empire colonial, elle fait régner la terreur au Caucase, se montre aggressive avec la Géorgie, pressante avec l'Ukraine;

- la Chine se prend pour une grande puissance (peut-être la première) et se retrouve engagée dans des conflits récurrents aux marges de son empire (Tibet, Sinkiang);

- l'Afrique est dans un état proche du chaos. Enfin, le Moyen-Orient est la poudrière du monde, avec les conflits liés à la place d'Israël en particulier.

40 Il se fait maintenant appeler Bunster du nom de son père biologique. Ses deux pères ont joué un rôle important auprès d'Allende.
41 Qui a déménagé il y a quelques années de Santiago à Valdivia.
42 Je me souviendrai de cela lors d'une rencontre similaire avec le président Yang Je Min de Chine.

Du point de vue des mathématiciens français, la meilleure structure me semble être le Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA) basé à Nice. Il a une longue expérience de coopération et de formation en Afrique, en Asie du Sud-Est et en Amérique Latine. L'Inde a atteint sa maturité scientifique, mais il faut pérenniser les solides relations entre mathématiciens français et indiens.

Notre collègue physicien Rivasseau, dont le frère est un personnage important du Quai d'Orsay, s'affaire à créer un réseau d'Instituts africains. Du côté des mathématiciens, le CIMPA essaye de s'investir au Moyen-Orient. Nous avons récemment organisé le premier Congrès Franco-Irakien de Mathématiques qui s'est tenu à Erbil au Kurdistan irakien (presque) indépendant. Le travail de Cartan a permis en 40 ans la création d'une Société Mathématique Européenne. A quand celle des mathématiciens du Moyen-Orient:

I have a dream. Some day [43]

L'époque des francs-tireurs est-elle terminée?

POSTSCRIPTUM: NE PAS BAISSER LES BRAS

J'aurais souhaité terminer sur cette note optimiste, mais deux événements tout récents (août 2010) m'obligent à nuancer.

Du 19 au 27 août 2010 s'est tenu le Congrès ICM 2010 à Hyderabad (Inde), avec 3000 participants. D'après les règles de l'IMU, le comité local d'organisation d'un ICM s'engage à obtenir de son gouvernement tous les visas nécessaires pour les participants. Or l'Inde a des relations difficiles avec plusieurs de ses voisins, et surtout le Pakistan; dans ces derniers temps, la tension avec la Chine a augmenté, surtout pour les problèmes frontaliers dans l'Himalaya (Cachemire, Népal). Les organisateurs indiens de l'ICM 2010 étaient conscients des problèmes, et avaient obtenu des appuis en haut lieu. Mais cela ne suffisait pas pour contrer les lourdeurs de l'administration, et un certain nombre de collègues, surtout chinois, ne purent se rendre à Hyderabad. Ceci devrait servir d'avertissement aux organisateurs coréens de l'ICM 2014, car leur pays se trouve dans une zone politiquement instable.

Une autre affaire, qui me touche encore plus, concerne un collègue vietnamien, nommé Pham Minh Hoang. Ce vietnamien naturalisé français a fait ses études mathématiques en France après 1973. Il a vécu une vingtaine d'années en France, puis est retourné au Vietnam enseigner à Ho Chi Minh Ville. Le mieux est que je laisse la parole à sa femme, dans une lettre copiée sur Internet.

> "Je m'appelle Le Thi Kieu Oanh, 46 ans, résidant à Saigon. C'est avec tristesse et peine que je vous écris cette lettre pour vous alerter sur le fait que mon époux a été arrêté le 13 août 2010 par les autorités vietnamiennes pour enquêter selon l'article 79 du Code Pénal vietnamien (tentative de renversement du gouvernement).
>
> Mon époux est M. PHAM Minh Hoang, 55 ans, professeur à l'École Polytechnique de Hochiminh-ville. Il est parti étudier en France en 1973. Après avoir assimilé les méthodes d'enseignement efficaces et équitables durant son séjour là-bas, il avait toujours nourri le rêve de revenir au pays pour enseigner et contribuer à façonner un brillant avenir aux jeunes vietnamiens.
>
> Après un premier retour au pays à la fin des années 90 pour rendre visite à ses parents malades, il a pu se rendre compte de l'insuffisance matérielle et intel-

43 Martin Luther-King en 1963.

lectuelle du milieu dans lequel doivent évoluer les étudiants vietnamiens. Abandonnant le confort matériel de sa vie en France, il décide alors de rentrer définitivement au Vietnam pour réaliser son rêve, devenant enseignant à l'École Polytechnique. Il a toujours eu à cœur de faire en sorte que les jeunes vietnamiens prennent conscience de leurs responsabilités et de leurs devoirs pour construire un pays développé et moderne.

Depuis près de 10 ans qu'il réside au Vietnam, outre les exaspérations ressenties vis-à-vis de l'éducation de la jeunesse vietnamienne, mon époux se préoccupe également des autres fléaux qui touchent le pays, depuis la corruption jusqu'aux injustices sociales. Il me fait part régulièrement de ses inquiétudes quant à la pollution de l'environnement. Lorsque l'État a autorisé la Chine à exploiter la bauxite sur les hauts plateaux, il s'est demandé comment une décision tellement nocive a pu être prise. Lorsqu'il a pris connaissance de la pétition pour l'arrêt du projet d'exploitation de la bauxite lancé par les professeurs Nguyen Hue Chi, Pham Toan et Nguyen The Hung, il n'a pas hésité à signer et a demandé à ses amis d'en faire autant. La question des îles Paracels et Spratleys ainsi que les exactions des gardes-côtes chinois contre les pêcheurs vietnamiens sont également pour lui une source de révolte. C'est pourquoi il a participé à la conférence sur "la mer orientale et les archipels vietnamiens" organisée à Saigon le 24 juillet 2009 pour mieux comprendre le sujet."

BIBLIOGRAPHIE

Cartier, P. & Illusie, L. (sous la direction de), A tribute to Henri Cartan, Notices of the AMS, vol. 57, n 8, pp. 946-975.

Demazure, M. & Gabriel, P. Groupes algébriques, Masson, Paris, 1970.

Doxiadis, A. & Papadimitriou, Ch. Logicomix, Vuibert, Paris, 2010.

Gabriel, P. & Zisman, M. Calculus of fractions and homotopy theory, Springer, Berlin, 1967.

Graham, L. & Kantor, J. M. Naming infinity, Harvard Univ. Press, Cambridge, 2009 (traduction française à paraître chez Belin en 2010).

Koblitz, N. Random curves, Journeys of a Mathematician, Springer, Berlin, 2008.

Schwartz, L. Un mathématicien aux prises avec le siècle, Éditions Odile Jacob, Paris, 1997.

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)
TOMO XV, AGOSTO DE 2012

GERHARD HOCHSCHILD (1915/2010) A MATHEMATICIAN OF THE XXTH CENTURY

Walter Ferrer Santos

Facultad de Ciencias, Universidad de la República Iguá 4225, 11400 Montevideo, Uruguay.
E-mail address: wrferrer@cmat.edu.uy .

G. HOCHSCHILD, A MATHEMATICIAN OF THE XXTH CENTURY

Key words: History and biography, personalia

SYNOPSIS

Gerhard Hochschild's contribution to the development of mathematics in the XX century is succinctly surveyed. We start with a personal and mathematical biography, and then consider with certain detail his contributions to algebraic groups and Hopf algebras.

GERHARD HOCHSCHILD (1915/2010) UN MATEMÁTICO DEL SIGLO XX

G. HOCHSCHILD UN MATEMÁTICO DEL SIGLO XX

Palabras clave: Historía y biografías, recolecciones personales.

SINOPSIS

Las contribuciones de Gerhard Hochschild al desarrollo de la matemática en el siglo XX son sucintamente presentadas. Luego de una breve biografía personal y matemática, consideramos con cierto detalle sus contribuciones a las teorías de grupos algebraicos y álgebras de Hopf.

The author would like to thank Anii, Csic-UdelaR, Conycit-MEC, Uruguay and Mathamsud Project for financial assistance. Moreover the author wants to warmly thank Hochschild's family for letting him share some parts of Gerhard's files and for providing some translations. Moreover, we have also used regularly along this note, the material presented in Gerhard Hochschild (1915–2010) [14] and we want to thank all the authors of the collaborations therein.

1. THE LIFE, TIMES AND MATHEMATICS OF GERHARD HOCHSCHILD

1.1. **Berlin and South Africa.** Gerhard Paul Hochschild was born on April 29th, 1915 in Berlin of a middle class Jewish family and died on July 8th, 2010 in El Cerrito where he lived after he moved to take a position as professor at the University of California at Berkeley in 1958.

His father Heiner was an engineer working as a patent attonery and in search of safety sent Gerhard and his older brother Ulrich, to Cape Town in May of 1933. The boys were some of the many germans escaping from the Nazis that were taking over their native country.

The first 18 years of his life in Germany were not uneventful. In 1924 his mother Lilli was diagnosed with a lung ailment and sent –together with his younger son Gerhard that was then nine years old– to a sanatorium in the Alps, near Davos. Later in life he commented to the author that reading in *Der Zauberberg* (The Magic Mountain) by Thomas Mann, about Hans Castorp –Mann's main character in the book– he evoked his own personal experiences. Castorp was transported away from his ordered and organized family life to pay a visit to his cousin interned also in a sanatorium in Davos. Once he was there, Castorp was diagnosed with tuberculosis, spent seven years interned, and was only able to leave the place after volunteering for the army at the beginning of the first world war.

The boy was his ailing mother's only support while she started to descend into mental illness. In 1926 she was transferred to a mental asylum in Germany, where she was later murdered by the Nazis as part of the infamous "Final Solution" program[1] .

Heiner with boys, Gerhard at his left c. 1923

Gerhard returned alone to his father and brother in Berlin to continue his education entering the gymnasium where, even though he did not enjoy formal education –a feeling that he continued to hold all his life, he liked his courses in physics and mathematics. In a letter to one of his teachers at the time, Dr. Flatow that was sent in 1937 after he finished a MSc. in mathematics at the University of Cape Town, he wrote: *"You probably won't remember me since it has been five years since you had me as a student. I want to let you know how my life has gone. I have made a choice for which I want to thank you. You kindly advised me ... so I owe you a report. I decided in the end for pure mathematics and not physics, although in my first two years I was involved with physics and applied mathematics...The reason for this was because I was more and more interested in mathematics, and, I came to see physics as only one field of application...I still remember with pleasure our hours of mathematics in school, and am so grateful to you for interesting me in mathematics. Greetings from an old student"* [2].

At that time as a young boy in Germany, he started to cultivate passions for photography and hiking in the mountains, passions that lasted all his life.

1 For the Nazis, Jewish mentally-ill patients were unique among victims in that they embodied both "hazardous genes" and "racial toxins", see [56].

2 See Schwartz's contribtion in [14].

Even though, later in life he never made a fuzz about the subject, at the end of his stay in Berlin he suffered some of the ignominies imposed to jews by the Nazi regime. He mentioned a particular incident to the author, in which he went to meet his young friend Eva, was accosted by Nazi thugs and one of them said while exhibiting a gun: *"A german girl like you should not be with a dirty jew"*. They managed to walk away unharmed.

In South Africa, and because Hitler made it impossible to send money out of the country, the Hochschild boys were forced to earn their own way, and shortly after his arrival in Cape Town, Gerhard found employment as a photographer's assistant. By then, Gerhard had started to frequent a circle of leftist intellectuals and artists that meet on a regular basis in Cape Town; later in life he frequently mentioned how well and at ease he felt within this group of free thinkers and intellectuals. It was probably at that time that he acquired the leftist and anarchist ideals that accompanied him all along his life.[3]

His registration at the University of Cape Town in the B.Sc. program starting in January 1934, was made possible by a small grant received from a foundation established by one of his relatives: Berthold Hochshild, a german industrialist that emigrated to the USA at the end of XIX century to establish a company called American Metal Co. that flourished in the economic boom that followed the Civil War.

He finished a B.Sc. in Physics and Mathematics in 1936 and a M.Sc. in Mathematics in 1937. His student records list the following courses: **1934**; Applied mathematics I, Chemistry I, Physics I, Pure mathematics I; **1935**; Applied mathematics II, Economics I, Physics II, Pure mathematics II; **1936**; Applied mathematics III, French I, Pure mathematics III; **1937**; Applied mathematics: Relativity, Hydrodynamics, Tensor methods in dynamics; Pure mathematics: Complex analysis, Elliptic functions, Harmonic analysis, Differential geometry, Differential equations, Elementary algebra, Elementary theory of functions of a real variable.

After finishing his M. Sc. he worked as a Junior Lecturer at the University of Cape Town during the 1937/38 academic year.

Stanley Skewes[4], then a lecturer at Cape Town University was Gerhard's advisor and supporter. In the letter he sent to Princeton recommending Hochschild he wrote:

Stanley Skewes
Gerhard's advisor at Cape Town

"I know of no reason why he should be unsuitable to enter Princeton University–Graduate College. He is a good student and a very promising mathematician –he was first choice for the post graduate scholarship at the end of 1937. I myself recommended him to go to your institution –the average University can do little more for him, except possible to set him up in research, an occupation for which I believe him to be eminently suited".

In his application form to Princeton, besides attaching recommentation letters from Brown, Crawford and Skewes, Gerhard mentions a non published paper –now lost– that he had written on: *"the application of the δ tensors to the theory of determinants"*.

He was admitted in the PhD program at Princeton University and in the summer 1938, he sailed from Cape Town to New York where his father was then living.

3 When Hochschild found out about the author's involvement with some human right causes in South America while a graduate student at Berkeley under his direction, he offered a monetary donation to :"whatever organization you find suitable".

4 Stanley Skewes (1899/1988) a student of Littlewood at Cambridge University is known for his discovery of the Skewes number in 1933. This is an upper bound for the smallest number x for which $\pi(x) > li(x)$ where π is the prime counting function and li is the logarithmic integral; Skewes proved that the number thus defined is smaller than 101010963

1.2. **Princeton and Aberdeen proving grounds.** Hochschild registered at Princeton, starting September 8, 1938[5] and for one of the leading algebraists of his generation his choice of courses in the PhD program may seem rather peculiar to the reader accustomed to the fashions of contemporary overspecialized mathematical education.

1938/39: Calculus of variations, I.A.S. (Mayer); Elementary theory of functions of a real variable (Bohnenblust); Continuous groups (Eisenhart); Advanced theory of functions of a real variable (Bochner); The theory of relativity (Robertson); Continuous groups (Eisenhart).

1939/40: Aplications of the theory of functions of a complex variable (Strodt); Riemannian geometry (Eisenhart); Topological groups (Chevalley); Algebraic geometry (Chevalley); Applications of analysis to geometry (Bochner); Riemannian geometry (Eisenhart).

1940/41: Applications of analysis to geometry (Bochner); Probability and ergodic theory, I.A.S. (Halmos and Ambrose); Differential equations (Chevalley); Research and work on dissertation under the direction of Chevalley –two semesters–; Advanced theory of functions of a real variable (Bochner), Ergodic theory, I.A.S. (von Neumann).

During the years 1938/40 he enjoyed a Porter Scholarship from the University of Cape Town, and in his last year 1940/41 he was awarded in the first semester a Research Assistantship in mathematics and in the second semester a position of Part Time Instructor and Assistant.

Hochschild was the first of Chevalley's[6] students at Princeton University, and started to work under his direction around 1939, when he gave him to study some of the first Bourbaki manuscripts.


Hochschild at Princeton Claude Chevalley c.1950

An interesting story of his days at Princeton is the following: during the first lectures of Chevalley's course on Differential Equations in 1940, the room was packed with people curious to know what he had to say on this subject but at the end of the course only three persons remained: Hochschild, von Neumann and Weyl.

In the internet project: "The Princeton Mathematics community in the 1930s" Robert Hooke describes Chevalley as playing an *"endless game of Go"* while at Princeton. Gerhard developed then, a lasting passion for the game acquiring approximately the level of a 7th. kyu. He used to play it whenever he had the oportunity, and besides Chevalley some of his rivals were: P. Erdös, D. Goldschmidt, N. Steenrod, etc.

While still a graduate student at Princeton, Hochschild submitted his first paper for publication. It contained the main results of his thesis, was entitled *Semi-simple algebras and generalized derivations* and appeared in print in 1942 shortly after he was drafted into the army. In the Introduction to this paper, see [21], Hochschild says that it deals with: *"the study of*

5 Here and in other parts of the manuscript the author used the material provided to Hochschild's family by the staff of Seeley G. Mudd Manuscript Library, Princeton University.

6 Claude Chevalley was a native of South Africa (1909–1984) –his father was a french diplomat– and was at Princeton Inst. in the year 38/39, at Princeton Univ. from 1940/48 and at Columbia from 1949/55. He was one of the founding members of Bourbaki.

the behaviour of Lie algebras and associative algebras with respect to derivations" and continues: *"These 'generalized derivations' ... were found to be significant for the structure of an algebra. In fact we shall obtain a characterization of semisimple Lie algebras and semisimple associative algebras, in terms of these generalized derivations."*

Gerhard's dissertation committee, cochaired by Chevalley and Lefschetz, that met to hear the thesis in April 24, 1941 reports : *"The thesis deals with certain important problems in Lie algebras and related questions in associative algebras. It contains in particular a highly interesting characterization of semisimple Lie algebras in terms of the operation of formal derivation. The thesis is highly worthy of publication as it contains many new results in addition to those indicated above. Furthermore Hochschild set the problem himself and also did the research in an essentially independent way"*.

After defending his thesis, he was appointed as a Part time Instructor and Research assistant at Princeton University, for the academic year 1941/42 starting in September, but in November he was drafted into the US Army. He was first stationed at Ft. Sill in Oklahoma and along with other non–citizen soldiers in his unit, he was taken to the local county courthouse for naturalization in June 1942.[7] He spent the rest of his time at the Aberdeen proving grounds where he was put to work in the Mathematics Section whose director was Oswald Veblen the famous topologist from Princeton. Veblen gathered in that unit, an important number of recruits, some of them become later well known mathematicians: Federer, Kelley, Morrey, Morse, etc.

Regarding that period of his life, in a letter sent to the Notices of the AMS in July 2009 and that concerns calculus teaching, Hochschild says: *"Memories dating back to 1942 are of spending hundreds of days calculating military firing tables with the help of a Friden desk calculator"*.

The second and third of his papers, dealing with what later was to be called Hochschild cohomology, [22] and [23] list his address as "Aberdeen proving grounds".

About that period of his life, his long time collaborator G. D. Mostow says, see [14]: *"One cannot write about Gerhard comprehensively without mentioning his charisma. Some of his charisma resulted from his colorful criticism of the hypocrisies that abound in all large organizations. In the army, even though he was a recent immigrant to the United States, he impressed his fellow soldiers with the virtuosity of his profanity.*

I learned this from the famous geometric measure theory mathematician Herbert Federer, who served in Gerhard's unit at Aberdeen Proving Grounds".

After the war in mid 1945, he left the Army to take a part time position for a semester –November 1945 to June 1946– as an Instructor at Princeton University.

1.3. **Harvard and Urbana.** Gerhard was a Benjamin Pierce Instructor at Harvard University during the academic years 1946/48 and in September of that year, took a position at the University of Illinois at Urbana–Champaign. At Urbana he raised quickly and became a full professor in 1952.

While tenured in Urbana, he spent the academic year 1951/52 visiting Yale University, 1955/56 visiting the University of California at Berkeley and 1956/57 as a member of the Institute of Advanced Study at Princeton with a Guggenheim fellowship.

7 See the contribution by Magid in [14].

Dan Mostow

Dan Mostow was also a member of the Institute at that time and their very long and fruitful collaboration started then; they wrote 17 papers together. Other Institute members that year were: M. Auslander, R. Bott, C. Curtis, J. Leray, I. Kaplansky, A. Rosenberg, J.-P. Serre, T. Tannaka, all of whom devolved long term personal and mathematical relationships with Gerhard.

At the beggining of the 1950s, he started to impel the application to other parts of mathematics of the cohomological methods already developed and succesfully aplied to the theory of associative and Lie algebras.

Particularly remarkable are his papers [24], [25], [28] where he applied cohomological methods to Class field theory. In [24] he was the first to apply these methods, to the local theory. The importance of cohomology for the global theory –already observed by Weil when he constructed the global Weil group as an extension of the Galois group by the idèle class group via a cohomology class living in the corresponding H^2– was clarified in the paper [28] that was written with Nakayama. This work was explained and further developed in the famous Artin–Tate seminar, whose notes were for a long time the basic reference for the modern presentation of the theory[8] .

J.-P. Serre published a short note [55], where he sketched a proof of the construction of a spectral sequence relating the cohomolgies of G,K and G/K, whenever K is a normal subgroup of the finite group G. He used the Cartan–Leray spectral sequence associated to the action of G/K on E_G/K where E_G is a universal bundle for G. After reading the note and producing a direct proof using explicit calculations with resolutions, Gerhard wrote Serre in January 1951 proposing a joint publication which included both methods.

Jean-Pierre Serre, c.1950

The first paper product of that collaboration, see [29], was written jointly while Hochschild spend one year at Yale University substituting Jacobson during his sabbatical and Serre was visiting Princeton Institute in January/February 1952. In this paper, the convergence of the so called Hochschild–Serre spectral sequence is established. The paper is neatly divided into three parts, the first based on Serre's methods, the second called "The direct method" based in Hochschild's manipulations with cochains, and the third establishes some interesting applications, in particular to the theory of simple algebras.

The same techniques are applied without much pain to establish similar results for the cohomology theory of Lie algebras in [30].

These constructions, were extremely important as they presented one of the first extensions of the very powerful computational tool of the spectral sequences introduced by Leray, to non–topological situations. Both sequences were later encompassed by Grothendieck in his theory of derived functors in abelian categories; he proved the existence of a spectral sequence relating the derived functors of a composition, with the derived functors of its components.

Around that time, Hochschild also started a line of work that he continued to pursue all along his later career, and that consisted in the generalization of the basic results in group and Lie algebra cohomology, to the situation of groups and algebras with additional structure where many of the standard techniques used in the discrete case do not apply.

In [26] and [27] he tackles the problem of the classification of the extensions of Lie groups by con-

8 For this part and the next comments, see the contribution by J. Tate –with a letter from Serre– in [14].

structing “differentiable” factor sets, a device that is not available in the situation of topological groups.

In the early 1950s started the interaction of Gerhard with the Bourbaki group, that began when he attended three of the group congresses even though he never was formally a member of the group. In accordance with the Bourbaki files provided to the author by J.-P. Serre from Viviane le Dret, see [14], Hochschild participated at the following instances: the congress at Pelvoux-le-Poet (June 25 to July 8, 1951), Foreign visitors: Hochschild and Borel, “cobayes”: Cartier and Mirkil; the congress at Pelvoux-le-Poet (June 25 to July 8, 1952), Foreign visitors: Borel, De Rham and Hochschild; at the congress at Murols (August 17 to 31, 1954), Foreign visitors: Hochschild and Tate, “Honorable foreign visitors”: Iyanaga and Yoshida; “effciency expert” MacLane, “cobaye”: Lang.

Hochschild mentioned later to the author, about his participation in the 1951 meeting, and the surprise that he felt when he saw the *“very young boy with a boy scout look that went to pick me up at the station”*, later participating fully in the discussions of the group –of course he was referring to P. Cartier.

The 1951 Bourbaki meeting from left to right: Dixmier, Dieudonné, Samuel, Weil, Delsarte, Schwartz

It was in Urbana that Gerhard met his wife, Ruth Heinsheimer, who like Gerhard was born in Germany. She and her mother escaped Germany in early 1939, first settling in Paris and then fleeing to a small village in the Pyrenees before sailing for New York from Lisbon in February of 1941. Ruth graduated from Bryn Mawr College in 1947 and then enrolled in the graduate program in mathematics at the University of Illinois at Urbana -Champaing, where she obtained an M.A. degree in Mathematics in 1948. When Gerhard arrived as an assistant professor, she was working under the direction of R. Baer. They married in July 1950 and their daughter Ann was born in 1955 in Urbana and their son Peter in 1957 in Princeton. Ruth passed away in El Cerrito, on June 2, 2005.

In conversations with the author that took place much later, Gerhard recalled how much they both enjoyed those early years of their relationship at Urbana and frequently in his later years, mentioning nostalgically the loss of that close group of friends that included not only mathematicians but also some people in literature.

The Hochschild couple at Urbana Ruth
is sitting at Gerhard’s right

1.4. **The Berkeley period.** Gerhard remained at UIUC until September 1958, when he moved to Berkeley as a Professor of Mathematics, in the meantime Ruth had finished a Master’s degree in mathematics and another in French literature.

In the book *Mathematics at Berkeley, A History*, see [52], Calvin Moore presents a detailed and very insightful account of the process that starting from a minuscule department in a financially troubled private California college in the 1860s ended up producing one of the leading mathematical institutions in the world.

In Chapter 13 of the book: *The Kelley years: 1957–1960*[9] the author describes the strategy followed by John Kelley, then chairman of the department, to hire in clusters in order to develop the underrepresented areas: Algebra, Topology and Applied Mathematics. The first cluster was to be in algebra where the department hired Hochschild and Maxwell Rosenlicht from Northwestern University. The deparment recommended the appointment of both of them as full professors effective July 1958 and made it known to each that the other was also being recommended.

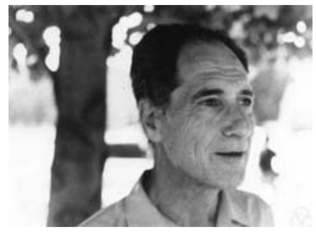

John Kelley Maxwell Rosenlicht

Kelley knew Hochschild since they served together at Aberdeen, and Rosenlicht and Gerhard were acquainted since both were together at Harvard, the first as a graduate student and the second as a Pierce instructor.

The following year the same strategy was adopted in geometry with Spanier and Chern, and both accepted; Spanier arrived in 1959 and Chern in 1960.


S.S. Chern Edwin Spanier

This went simultaneously with the hiring of some outstanding junior mathematicians: Glen Bredon, James Eels, Morris Hirch, Bertram Kostant, Emery Thomas and Steven Smale and altogether in *The Kelley years* the number of professorial staff increased from 19 to 44, with a very good balance between the fields. By 1960 the situation was much more balanced than in 1956 when the strength was basically in analysis (PDEs and functional analysis), computational number theory, and logic.



Hochschild in 1968 at the Campanile Esplanade

Hochschild had 26 students along his career and 22 of them graduated at Berkeley.

Along his career, Gerhard's students thesis covered a wide thematic spectrum. Besides the expected subjects on homological algebra, Lie groups and Lie algebras, algebraic groups and Hopf algebras, one finds topics as Category theory, number theory and field theory, topological groups and groupoids, etc.

His first PhD student was George Leger that finished in 1951 at the University of Illinois at Urbana–Champaign and wrote a thesis on *Cohomology theory for Lie algebras*, and his last student was Nazih Nahlus in Berkeley 1986 with a thesis entitled: *Lie theory of algebraic groups*.

A constant theme in all comments of Hochschild's former students, is a deep appreciation of Gerhard's personality that went together with, but often transcended, his mathematical influence, mentioning his role as an advisor and later mentor and friend throughout their mathematical careers.

Illustrative of the relationship he generated with his students is the comment of Ronald Macauley who

9 See also C. Moore's contribution in [14].

wrote a thesis in 1955 at University of Illinois at Urbana on: Analytic group kernels and Lie algebra kernels.

In the acknowledgments he says: *"The author takes this opportunity to express his most sincere gratitude to Professor G. P. Hochschild who offered and gave more aid and encouragement in the preparation of this thesis than could reasonably be expected of any advisor and friend. Indeed, Professor Hochschild's patience has withstood an arduous test"*.[10]

Hochschild frequently played the role of advisor of many junior members of the department, especially but not limited, to those in his areas of main interest. Even though he played a crucial academic role all along his tenure, he deeply disliked the bureaucratic organization of academic institutions –for example he championed systematically and unsuccesfully, for the separation of sports and academics– and for that reason he never accepted to take responsabilities in the administrative tasks of the University.

He served for a short time in a committee to select the new Instructors at Berkeley and the administration gave him guidance as to consider Affirmative Action policies. As soon as he received the information he told the Dean that he was unable to stay in the committee as he had personally seen the Nazis making a difference between "jewish" and "aryan" mathematics. He did not accept the Dean's arguments about the difference between "negative" racism as in the Nazi era and the policy they were implementing of "positive" racism. In a conversation with the author of this note, he mentioned that what was considered positive today, could easily become negative tomorrow and that the only safe attitude was to be blind to racial distinctions to the point of never registering any information about the issue, specially in official documents. He resigned from the committee.

While at Berkeley he was elected in 1979 to the National Academy of Sciences and to the American Academy of Arts and Sciences. In 1980 the American Mathematical Society awarded him the Steele prize for work of fundamental or lasting importance, citing in particular five of his papers published from 1945 to 1952 on homological algebra and its applications.

It was in the year 1980 that the author finished his PhD dissertation *Cohomology of comodules* working under his direction. In one of our frequent outings to drink coffee at the usual coffee shop in Hearst Ave., I asked him what he thought about his nomination for the Steele prize. His opinion was that to give him the prize was completely useless, he thought that the only utility a prize might have, was to help young people to get good jobs, and that for a senior mathematician like him, was completely irrelevant.

During his tenure at Berkeley, Hochschild published 40 papers and all of his five books and along this very fruitful period of almost 30 years, his mathematical interest concentrated more and more in the theory of Lie groups, Lie algebras and algebraic groups, with special emphasis in the cohomological methods.

His collaboration with Mostow blossomed with the stream of papers written on Representative functions (see in [14], the articles by A. Magid and D. Mostow with a very rich description of the large ideas concerning Tannaka duality and representative functions; we also summarize the results in a later section).

During the Berkeley period, and in a line of work with a strong homological flavor, he published the nowadays extremely cited paper [38], where the so called Hochschild, Kostant, Rosenberg theorem appears.

10 We thank Prof. P. Bateman and the librarians of the University of Illinois for the information, see [14].

We briefly mention the importance that this result has had in the development of the basic ideas of "non commutative geometry".

A convenient formulation of the HKR theorem is the following: for a smooth algebra A over $\mathbb{K}$ there is a graded isomorphism $H_\bullet(A, A) = \Omega^\bullet_{A|k}$ where $H_\bullet(A, A)$ denotes the Hochschild homology with coefficients in A, and $\Omega^\bullet_{A|k}$ is the algebra of differential forms. The point here, taken over by Connes and others is that for a non commutative algebra A, one can think of $H_n(A, A)$ as the n–forms for the non commutative space described by A. Moreover in the "geometric" case of a smooth algebra, the Hochschild homology *is* the usual graded algebra of differential forms.

Kostant was hired as an assistant professor at Berkeley in 1956 and left in 1961 to take a position at MIT.

Both were interested in similar subjects in particular in the theory of algebraic groups that they studied together in the printed notes of the Chevalley Seminar 1956/1858, and as a result of their collaboration they wrote the paper [39], on the cohomology of homogeneous spaces for algebraic groups. In that paper they generalized the basic results on the rational cohomology of algebraic groups. This cohomology theory was developed in [36]. These two papers will be considered later in this note. Kostant mentioned once to the author how much he agonized when he took the decision to leave Berkeley, mainly because the certainty of severely diminishing the relationship he had developed with Gerhard[11].

1.5. **Hochschild's mathematics at Berkeley.** We will comment at length in a later section on the contributions of Hochschild to the theory of algebraic groups and Hopf algebras. Now, we will concentrate briefly our attention on two papers on Lie theory, that concern specifically Ado's theorem and algebraic Lie algebras.

He produced a large opus in Lie theory, but many times along his life he went back in his efforts to some topics he had dealt with, at the beggining of his career. One of them has to do with Ado's theorem –and its global version as discussed for example in the contribution by Moskowitz in [14].

Hochschild at his office Evans Hall 8th floor, 1986.

Ado's theorem, called sometimes Ado–Iwasawa's theorem, states that every finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$ over a field $\mathbb{K}$ of zero characteristic, can be viewed as a Lie algebra of square matrices under the commutator bracket, i.e. $\mathfrak{g}$ has a faithful finite dimensional linear representation ρ over $\mathbb{K}$. It was first proved in 1935 by Igor Dmitrievich Ado of Kazan State University, see [1], and the restriction on the characteristic was removed later, by Iwasawa, Harish-Chandra and Hochschild, see [18] and [50].

After the original proof by Ado, valid for algebraically closed fields in characteristic zero and that apppeared in 1935, E. Cartan published in 1938 an analytic proof in the case that the field was $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. The next published proof is due to Iwasawa in 1948, see [50], and established the result in the case that the characteristic was different from zero. Soon afterwords, Harish–Chandra in [18] –for characteristic zero– published a proof that, besides being much more econom-

11 See also the contribution by Kostant in [14].

ical, was a little more precise than the original statement by Ado. In fact he proved that the faithful representation ρ could be taken to have the additional property that every element of the maximal nilpotent ideal of $\mathfrak{g}$ is mapped into a nilpotent matrix on the representation space.

It is interesting to note, that Harish–Chandra in his paper mentions in a footnote a proof by Hochschild: *"Professor Chevalley has kindly informed me that Dr. Hochschild has succeded in constructing an algebraic proof which imitates Cartan's procedures"*. The author of the present article, has never seen the original proof mentioned by Harish–Chandra (it seems that he did not publish it) but Gerhard mentioned once in a personal conversation, that his proof was the one adopted by Bourbaki in his treatise on Lie Groups and Lie algebras, Chapters 1–3.

In his 1966 paper, An addition to Ado's theorem, see [41], Hochschild presents a slight generalization of the classical theorem –as improved by Harish–Chandra. In the introduction he writes: *"The main purpose of this note is to point out the following strenghtened (with respect to the nilpotency property) form of the theorem on the existence of a faithful finite–dimensional representation of a finite dimensional Lie algebra"*. Theorem 1 –that is the main statement of the paper– reads as: *Let L be a finite–dimensional Lie algebra over an arbitrary field, and let α denote the adjoint representation of L. There exists a finite dimensional representation ρ of L such that $\rho(x)$ is nilpotent for every element $x \in L$ for which $\alpha(x)$ is nilpotent.*[12]

It is interesting to point out that Hochschild's proof –as almost all the proofs of this kind of results– is not independent of the characteristic and in fact he produces two different proofs, one for the zero characteristic case and the other for positive characteristic.

It is obvious that Ado's theorem cannot be naively globalized, if G is a Lie group and $\mathfrak{g}$ is its Lie algebra, there are serious obstructions to construct from the embedding of $\mathfrak{g}$ into $\mathfrak{gl}_n$ for some n, an embedding of G that linearizes to the original embedding of $\mathfrak{g}$.

In the series of papers on representative functions written together with Mostow, the authors dealt with the globalization problem and proved the following neat result –see the contribution by Mostowski in [14]: Let G be a connected real or complex Lie group. In the real case G has a faithful finite dimensional smooth representation if and only if its radical and a Levi factor have such a representation. In the complex case G has a faithful finite dimensional holomorphic representation if and only if the radical does (since a complex semisimple group always has a faithful representation). If G is either real, or complex with a faithfully represented Levi factor and a simply connected radical, then G has a faithful finite dimensional smooth (resp. holomorphic) representation which is unipotent on the nilradical –these results are also written in [48], Chapter XVIII.

Next, we discuss another important paper that appeared in 1971, called: *Notes on algebraic Lie algebras.* –see [45], where he studies a related problem.

In the introduction to the paper he writes as motivation: *"A Lie algebra is said to be algebraic, if it is isomorphic to the Lie algebra of an affine algebraic group. In view of the fact that entirely unrelated affine algebraic groups (typically, vector groups and toroidal groups) may have isomorphic Lie algebras, this notion of algebraic Lie algebra, calls for some clarification"*. If we start with an algebraic Lie algebra $\mathfrak{g}$, we call $G_{\mathfrak{g}}$

12 In the mentioned paper Gerhard mentions Leonard Ross thesis written under his direction, *Cohomology of graded Lie algebras* for the suggestion that the *"nilpotency property might be secured"*.

a connected affine algebraic group that has $\mathfrak{g}$ as Lie algebra–provided that it exists.

A well known criterion for a Lie algebra to be algebraic is the so called Gotô's theorem –published by M. Gotô in 1948, [16]– that says that a finite dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$ over a field of characteristic zero is algebraic, if and only if its image under the adjoint representation is the Lie algebra of an algebraic subgroup of the group of automorphisms of $\mathfrak{g}$.

More precisely, consider $\mathfrak{g}$ and the representation $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, where $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ denotes the Lie algebra of derivations of $\mathfrak{g}$. In this context $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{g})$ is the ideal of the inner derivations of $\mathfrak{g}$. If we take the affine algebraic group $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, then its associated Lie algebra is $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$, i.e. $\mathcal{L}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) = \mathrm{D}(\mathfrak{g})$. In this situation Gotô's theorem, asserts that it exists an algebraic subgroup $H \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ with the property that $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})=\mathcal{L}(H)$ if and only if $\mathfrak{g}$ is algebraic. In the case that the basic field is algebraically closed, $G_{\mathfrak{g}}$ can be taken to have unipotent center.

Once that was unveiled the special unipotency property that one can enforce the center of the group $G_{\mathfrak{g}}$ to have, the road is paved for the following result, that is in fact the main theorem in [45]. *Over an algebraically closed field of characteristic zero, there is exactly one isomorphism class of connected affine algebraic groups, with unipotent center, whose Lie algebras are isomorphic with a given algebraic Lie algebra.* –see [45], page 10.

The situation is simpler in the case of unipotent groups and nilpotent Lie algebras. With the methods developed in the papers on representative functiones specially in *Algebraic groups and Hopf algebras*,[44], it can be proved that the category of unipotent affine algebraic groups over a field of characteristic zero is equivalent to the category of finite dimensional nilpotent Lie algebras.

Using Gotô's theorem and the above result on nilpotent Lie algebras, Hochschild establishes his main result by first decomposing the group $G_{\mathfrak{g}}$, given by Gotô, into the semidirect product of a linearly reductive group and the unipotent radical and treating both cases separatedly.

He also mentions that the result on isomorphisms cannot be strengthened to morphisms and exhibits some examples that show that a Lie algebra homomorfism of algebraic Lie algebras is not always the differential of a homomorphism of the affine algebraic groups constructed from the Lie algebras, even if the groups have unipotent centers.

The simplest example is the following: let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic zero and $G = \mathbb{K}_a \rtimes \mathbb{K}_m$ (additive and multiplicative groups of the field respectively), with product $(a, u)(b, v)=(a+ub, uv)$, then $\mathcal{L}(G)= \mathbb{K}_x + \mathbb{K}_y$ with $[x, y]= y$ and $\mathcal{L}(\mathbb{K}_a)= \mathbb{K}_y$. The Lie algebra morphism $\rho : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(\mathbb{K}_a)$ that sends $\rho(x)= y$, $\rho(y) = 0$ is surjective but it is not the differential of a homomorphism of algebraic groups because there is no morphism of $\mathbb{K}_m$ onto $\mathbb{K}_a$.

Moreover, the above result proves that the natural map of the automorphism group of such an algebraic group –with unipotent center– into the automorphism group of the Lie algebra, is an isomorphism. This implies that the group of algebraic automorphisms of such kind of groups, is also an affine algebraic group. This situation is extremely rare, the only other example of such a family –as Hochschild himself proved in another paper, is the family of groups with the property that the dimension of the centers of G/G_u is zero or one –see Chapter XV of Hochschild's book *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras,* [48].

1.6. **Hochschild's books.**

(1) *Perspectives of elementary mathematics.* New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag.(1983).

(2) *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras*. Graduate Texts in Mathematics, 75. New YorkHeidelberg-Berlin: Springer-Verlag. (1981).
(3) *Introduction to affine algebraic groups.* San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day, Inc. (1971).
(4) *A second introduction to analytic geometry.* San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day, Inc. (1968).
(5) *The structure of Lie groups.* Holden-Day Series in Mathematics. San Francisco-London-Amsterdam: Holden-Day, Inc. (1965).

Gerhard wrote the five books mentioned above along his career all of them while at Berkeley.

Three of them: *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras*, 1981; *Introduction to affine algebraic groups*, 1971 and *The structure of Lie groups*, 1965, are addressed primarily to graduate students, and the other two have more global educational goals.

The purpose of the book: *Perspectives of elementary mathematics* becomes clear in the handwritten dedication that Gerhard stamped in this author's copy: *"You may view this as my anti–education manifesto"*. In the Preface, Gerhard writes: *The general aim of what follows is to present basic mathematical concepts and techniques in familiar contexts in such a way as to illuminate the nature of mathematics as an art...In order to avoid burying the essentials under routine technicalities, a style has been adopted that relies on the reader's active involvement somewhat more than it is customary.."*

A novelty of the presentation of the material, is that at the end of each chapter there is a project concerned with the creation of computer programs –without the need to do any formal programming. For example, at the end of Chapter IX entitled: *The sphere in 3–space*, where in particular he exhibits the identification (up to a sign) of the group of unit quaternions with the group of rotations of $\mathbb{R}^3$, he suggests the following project: *"Design computer routines implementing quaternion arithmetic. There should be four functions of quaternions with quaternions as values: sum, negatives, product, reciprocal. Note that such a facility contains complex number arithmetic."*

The book: A second introduction to analytic geometry, has a somewhat similar purpose. It was dedicated to his son Peter when he was an undergraduate, and in the preface Gerhard wrote: *"What follows is an examination of the basic geometrical features of Euclidian three–space from the point of view of rigorous mathematics. This requires that even the simplest visually obrious facts concerning the relations between points, lines, and planes in space be rigorously deduced from the properties of the system of real numbers. . . [and] indeed, our program here necessarily involves algebra and analysis as much as it involves geometry"*.

Next we take a quick glance at the other three books, that have been designed as texts for graduate students.

The book, *The structure of Lie groups* received a very serious attention from reviewers and specialists as some of its reviews clearly show.

The titles of the Chapters indicate by themselves the extremely ambituous scope of the book: 1. Topological groups, 2. Compact groups, 3. Elementary structure theory, 4. Coverings, 5. Power series maps, 6. Analytic manifolds, 7. Analytic subgroups and their Lie algebras, 8. Closed subgroups of Lie groups, 9. Automorphisms groups and Semidirect products, 10. The Campbell–Hausdorff formula, 11. Elementary theory of Lie algebras, 12. Simply connected analytic groups, 13. Compact analytic groups, 14. Cartan subalgebras, 15. Compact subgroups of Lie groups, 16.

Centers of analytic groups and closures of analytic subgroups, 17. Complex analytic groups, 18. Faithful representations.

The above list of wide ranging but rather minimalist titles, does not explicitly illustrates one of the great strengths of the book. Actually, besides providing unified proofs for many important and then recent results that were scattered in seminar notes or specialized articles, not few of new and not previously published results are included. For example: In Chapter 15 the author presents a deep generalization of a theorem due to Iwasawa in order to obtain the basic results concerning the maximal compact subgroups of Lie groups. Moreover, in Chapter 18 his results with Mostow on the globalization of Ado's theorem mentioned before, concerning the existence of finite dimensional representations of analytic groups are exposed for the first time in book form.

K. H. Hofmann, in his review for Zentralblatt MATH, 1966, Zbl 0131.02702, comments on the need for a book on the subject that: *"presents the foundations of [global] Lie theory in a language that takes into account the recent developments"*, and gives his opinion that: *"The book by G. Hochschild is an admirable response to that need"*. He commends the fact that: *"The book is completely self–contained insofar as not results are used whose proofs have to be looked up elswhere. The prerequisites are held at a minimum in order not to discourage interested students... The whole architecture of the book is very clear and systematic. It is amazing to see the author present such a large body of information on 226 pages"*.

Not everybody found satisfactory the minimalist style of the book, and some authors described it as "relentless", even though other reviewers did not share at all the negative opinion. Prof. F. Hirzebruch writes: *"It is amazing the extent to which the author achieved his goal to enable a self contained reading to someone who only knows the basics of multilinear algebra, group theory, set theoretical topology and calculus"*.

Hochschild wrote two books on the theory of algebraic groups, the first: Introduction to affine algebraic groups in 1971 and the second: *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras* in 1983.

In the period of a few years, and starting with A. Borel seminal book: *Linear algebraic groups*, that appeared in 1969 and not counting different sets of seminar notes, the mathematical community saw the appearence of a flood of books on the theory of algebraic groups, that reflected the deep interest of the mathematical community on the subject.

The following might be a not too incomplete list: M. Demazure and P. Gabriel: *Groupes Algébriques*, 1970; E. Kolchin: *Differential algebra and algebraic groups*, 1973; J. Humphreys : *Linear algebraic groups*, 1975; W. Waterhouse: *Introduction to affine group schemes*, 1979; D.G. Northcott: *Affine sets and affine groups*, 1980, T. Springer: *Linear algebraic groups*, 1981. All of these monographs have as predecessors three basic references of Chevalley: *Théorie des groupes de Lie II*, *Groupes Algébriques*, 1951; *Théorie des groupes de Lie III, Groupes Algébriques*; 1954, *Classification des groupes de Lie algébriques*, 2 vols, Notes polycopiées, 1956/58 (see also the edition of Chevalley's collected works, [11]). Of these three works of Chevalley, the last has a very different flavor from the first two: the methods have changed radically as algebraic geometry marched into the subject after the work of Borel and Chevalley himself, and the algebraico–geometric emphasis –as contraposed with the characteristic zero, Lie algebra–Lie group inflexion– is very explicit in the majority of the books of the above list.

Hochschild's two books cover different material than the others, and there is less emphasis in the classification theorems of semisimple algebraic groups (that are the main topic of Chevalley's seminar and justly considered a major –and also slightly suprising– achievement of the theory) and there is more emphasis in his own contributions to the subject –many of them jointly with Mostow.

In that respect we mention the following subjects (without distinguishing in which of the two books they are included): Mostow's theorem about the decomposition of an affine group in characteristic zero as a semidirect product of its radical and a linearly reductive group; the result mentioned above on algebraic Lie algebras and its consequences concerning necessary and sufficient conditions for the automorphism groups of an affine algebraic groups to be affine; the theory of observable subgroups as developed jointly with Mostow and Bialynicki–Birula; the theorems about the categorical equivalence of the nilpotent Lie algebras with the unipotent groups, etc.

But what more sharply distinguishes Hochschild's books from the others, are the following two features –one of technical and the other of stylistic character, the first is the systematic use of Hopf algebra theory in order to get control of the basic features of the affine theory, the second the strong determination to keep the monographs as much self contained as possible.

The second feature is not surprising and can be considered as his usual style of writing mathematics–see above. For example, in the introduction to the 1971 book, he writes: *"In order to keep this book self– contained, we have limited the material so that only elementary affine algebraic geometry comes into play, and all the [needed] results in this area. . . are established in Section 1. . . no special knowledge is presupposed, although it is assumed that the reader will be able to assimilate the daily diet of the working algebrist in unpremasticated form"*. The same can be said about the second book. For that reason the books have a manageable size, and can be used for standard courses in the subject.

Concerning the first issue, it is worth mentioning that in the opinion of some integrants of the mathematical community the Hopf algebra viewpoint that Hochschild adopts in a rather punctilious manner *"seems to detract from the geometric content of the elementary results. . . "* c.f. [49].

The author of this article does not intend to enter in the rather epistemological discussion that would be necessary in order to try to understand expressions like: "geometric content" or "geometric methods", specially when they are used in opposition to "algebraic methods", but we find useful to point at a few aspects of the theory where the Hopf algebra viewpoint adopted by Hochschild, simplifies considerably the treatment of the subject[13].

To deal with quotients in the category of algebraic varieties is more complicated than in other geometrical environments because of the scarcity of functions we have at our disposal.

In particular, if G is an affine algebraic group and K a closed normal subgroup, the quotient group has a natural structure of affine algebraic group. This is a classical result –probably due to Chow in the 50's– and the known proofs are in general non intrinsec and rather indirect.

In his 1971 book, Hochschild presents this result in the following not hard to prove intrinsec form. He proves that if A is an affine Hopf algebra and B a sub Hopf algebra, then B is also affine. Taking $A = \mathbb{K}[G]$ and $B = \mathbb{K}[G]^K$ where K is a normal subgroup of G, we obtain the quotient by dualizing B.

13 To be fair, we must mention that the Hopf algebra viewpoing has been used systematically in the author's book (written together with A. Rittatore), "Actions and invariants of algebraic groups", 2005, see [15]

Moreover, the systematic use of the coproduct $\Delta : A \to A \otimes A$, induced on $A = \mathbb{K}[G]$ by the product on the affine group G, simplifies some formulas and definitions, trivializing the operational aspects.

For example if $\tau,\sigma : A \to \mathbb{K}$ are two tangent vectors at the identity, its Lie bracket is simply the commutator associated to the convolution product: $[\tau,\sigma]= \tau * \sigma - \sigma * \tau =(\tau \otimes \sigma - \sigma \otimes \tau)\Delta$, and if $\sigma : A \to \mathbb{K}$ is a tangent vector at the identity as above, the associated vector field –invariant derivation– can be expressed simply as: $(\sigma \otimes \mathrm{id})\Delta : A \to A$.

It is this author's opinion, that Hopf algebra theory plays in this area the role that differential calculus plays in the theory of Lie groups, and plays it better as it is more algorithmic. Hence, one can view the systematic introduction of the Hopf algebra structure as one more step in the process of *"algebraiz[ing]. . . to death"* the theory of algebraic groups (Chevalley's ditto) –this expression was taken from the very interesting monograph by A. Borel, see [3], Chapter 7, page 147.

1.7. *Retirement and photography.* Hochschild retired on July 1, 1982, teaching part-time until retiring fully on July 1, 1985[14] .

This happened in accordance to the general retirement policy of the university that required mandatory retirement of tenured faculty on July 1 following their 67th birthday. He happened to be –by two months– in the last cohort that was subject to early retirement. He always resented this policy that soon changed back and forth with the waves of US national politics.

After retirement he dedicated much time to two of his all life passions, cinema and photography.

He particularly enjoyed the not mainstream movies that were shown in "cinémathèques" and alternative movie theaters in the Bay Area, where he used to go –by himself or with some of his friends, ex–students or colleagues, and enjoy the movies, sitting in a corner far away from the crowds. I remember an all night stand where we watched a whole series of the Clint Eastwood's spaghetti westerns. He mentioned then, that in other of these marathons, he had seen the same series accompanied by Moss Sweedler.

A more important area of his attention was photography. He was keen on the activity since his childhood in Berlin, and later in life while at Berkeley he took long trips in the west –including Canada and Alaska– to take pictures. He was already taking regular photography trips in the 60s and after retirement he became more and more involved in landscape photography, pursuing this hobby with tenacity. Entirely self-taught, he was particularly attracted to the desert landscape of the US west. He would go off on long trips by himself –at the end accompanied by a cell phone and once he told this author, that in the places he went he hardly ever had coverage– with his camera gear, which included a Hasselblad 4x4 and later a view camera, driving thousands of miles to find the right light and framing. Each picture took him at least one day and he amassed an incredible amount of negatives that he himself developed at the lab he had built at the basement of his house. His pictures were almost always black and white and he constructed at his house a device, that he installed in the living room wall close to the piano and to his Go board, where he displayed a changing exhibition for visitors.

Here and at the end of the article we show a couple of his pictures[15] .

14 See the article by C. Moore in [14].

15 We thank Hochschild's family for providing the pictures.

A picture of the US Southwest by Hochschild.

He died peacefully in El Cerrito, accompanied by his daughter Ann at his bedside on July 8, 2010, at the house where he lived since he moved to the Bay Area in 1958.

2. HOCHSCHILD'S WORK ON ALGEBRAIC GROUPS AND HOPF ALGEBRAS

Hochschild work on algebraic groups is vast. He wrote dozens of papers on the subject and it won't be possible to present a detalied analysis of his whole opus. We will concentrate upon three aspects of his work: we consider his contributions to representative functions of Lie and analytic groups; his work on representation and cohomology of groups with additional geometric structure that includes linear algebraic groups; and on his one paper in invariant theory of unipotent groups. Other relevant aspects of his production like the study of automorphism groups of affine groups and profinite groups will be omitted.

2.1. **From Lie groups to algebraic groups.** Hochschild involvement with the general theory of affine algebraic groups[16] is closedly related with Chevalley's work on the subject, for that reason we start with a few words about Chevalley's opus in that period.

In Chapters VI and VII of the monograph *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, by A. Borel –see [3]– the author recounts that the starting point by Chevalley was in his 1943 paper: *A new kind of relationship between matrices*. There he generalized to general fields Maurer's results on (the later called), algebraic Lie algebras, proved over $\mathbb{C}$. For that, he defined the notion of "replica" of a matrix and proved that Maurer's result can be expressed as follows: *If the Lie algebra of a complex linear algebraic group contains a matrix, it also contains all its replicas.* Later in a joint paper with Tuan, 1946, they proved the converse. All this was later incorporated in [7] and [8].

In Chevalley's classic 1951 book: *Theory of Lie groups*, Chapter VI: *Compact groups* –see [6], he deals with Tannaka duality theory –see [57]– and the approach he presented was followed –and vastly generalized– in the series of papers on Representative functions by Hochschild and Mostow, see [31], [33], [34]. The authors of the series mention also other relevant work besides Chevalley's that they used: one is the paper by Harish–Chandra in 1950, see [19], and the other is the 1956 paper by Cartier, see [4][17] .

We start by explaining the basic ideas of Chevalley–Hochschild– Mostow approach to Tannaka's theory in modern guise –we have used heavily the very illustrative survey by Joyal and Street: *An introduction to Tannaka duality and quantum groups*, [51].

Tadao Tannaka
c. 1960

Assume that G is a compact topological group and call ${}_G\mathcal{M}$ the monoidal rigid category of its finite dimensional complex representations. For a finite dimensional G–module V we call $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ the morphism associated to V.

16 In the note by Kostant that will appear in [14] the author recalls that at the late fifties when both were together at Berkeley, he and Gerhard used to meet to expose to each other the material in the Chevalley's seminars: on the foundations of algebraic geometry [10] and on the classification of semisimple algebraic groups [9].

17 See also the personal reference to this topic that appears in the interview to P. Cartier in [14].

This monoidal category is fibered over $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ (the category of finite dimensional complex spaces) via the forgetful functor $U : {}_G\mathcal{M} \to \mathcal{V}$.

One can take $\mathcal{E}(U)$ the set of natural transformations of U that when equipped with the vertical composition and the natural addition, becomes an algebra. Moreover, it can be endowed with a natural topology that makes it a topological algebra: we take the coarsest topology that makes all the proyections $\mathcal{E}(U) \to \mathrm{End}(V)$ continuous for all $V \in {}_G\mathcal{M}$. Recall that $\mathcal{E}(U)$ has a conjugation operation given as follows. For any natural transformation u, we define the natural transformation $\overline{u}_V = (u_{V_c})_c$ where $(-)_c : {}_G\mathcal{M} \to {}_G\mathcal{M}$ is the standard conjugation functor; i.e. the functor that associates to a vector space the same abelian group but the multiplication by scalars is defined by composing conjugation of the scalar and then applying the original multiplication.

Next we restrict the natural transformations to the monoidal ones, i.e., we assume that $u_{V\otimes W} = u_V \otimes u_W$ and $u_{\mathbb{C}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Clearly, if we take only the natural *monoidal* transformations, we have a closed submonoid –called $\mathcal{E}^{\times}(U)$– of $\mathcal{E}(U)$ that is in fact a topological monoid with the topology induced by the one of $\mathcal{E}(U)$.

It is not hard to prove that in the case that G is a group the monoidal transformations are invertible. Indeed if $u \in \mathcal{E}^{\times}(U)$ and we define $u' \in \mathcal{E}(U)$ as $u'_V = (u_{V^\vee})^\vee : V \to V$, where $V^\vee$ is the (contra-gradient) representation given by the rigidity property of the category ${}_G\mathcal{M}$, then, u' is also monoidal and the inverse of $u \in \mathcal{E}(U)$.

Definition 2.1. In the context above, given the topological group G we write $A(G) = \mathcal{E}^{\times}(U) \subset \mathcal{E}(U)$. Thus, $A(G)$ is the group of all monoidal natural transformations of the forgetful functor on ${}_G\mathcal{M}$ with the topology induced by the one of $\mathcal{E}(U)$. We define the closed subgroup $B(G) = \{u \in A(G) : u = \overline{u}\}$. We avoid the name of Tannaka group for $B(G)$ that is used in [51] as it is not standard. The group $A(G)$ has been called by Lubotzki the Hochschild–Mostow group. Hochschild and Mostow called it the group of proper automorphisms of $\mathcal{R}(G)$, we explain the reason for that nomenclature later.

Clearly, if $x \in G$ the left translation by x on any representation of G, defines a monoidal natural transformation. We call this function $\pi : G \to B(G)$.

One has the following theorem.

Theorem 2.2. *The morphism $\pi : G \to B(G)$ is a continuous homomorfism of topological groups and if G is compact so is $B(G)$.*

The compactness of $B(G)$ follows from the fact that we can use a Haar measure to endow all the representations with an invariant inner product and then deduce from the naturality, that all the components u_V are unitary operators with respect to that inner product.

Next we define the general concept of representative function. Assume, that G is an abstract group and take $\mathbb{C}$ as the base field.

Definition 2.3. A function $f : G \to \mathbb{C}$ is said to be a representative function, if for all $x \in G$, the set of left translates $\{x \cdot f : G \to \mathbb{C} : \forall\, x \in G\}$ spans a finite dimensional space in the vector space of all functions from G into $\mathbb{C}$. Recall that in the above context, one defines the left and right translations of a given function by the formulas: $(x \cdot f)(y) = f(yx)$, $(f \cdot x)(y) = f(xy)$.

One easily sees that if the finiteness condition holds for the left translates, it also holds for the right translates and even for the two sided translates. It is clear that the set of all representative functions of G forms a commutative $\mathbb{C}$–subalgebra of the algebra of all functions, and that it is closed by conjugation. It will be denoted as $\mathcal{R}(G)$.

Even if, it was never explicitly displayed in the early references, it is clear –and nowadays well known– that $\mathcal{R}(G)$ has a natural Hopf algebra structure over the base field[18] . We spell out this viewpoint in order to show how deeply embedded the Hopf algebra viewpoint was in Hochschild's early work, even if it was only years later that became more explicit.

The basic finiteness property of a representative function, guarantees that for $f \in \mathcal{R}(G)$, $x \in G$, one can find $f_i, g_i \in \mathcal{R}(G)$ such that $x \cdot f = \Sigma f_i(x) g_i$, and the morphism $\Delta : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$ defined as $\Delta(f) = \Sigma f_i \otimes g_i$ is a coproduct in $\mathcal{R}(G)$, compatible with the product. We will adopt Sweedler's notation and write $\Delta(f) = \Sigma f_1 \otimes f_2$. It is easy to show that the map $\mathcal{S}(f)(x) = f(x^{-1})$ defines an antipode, and that the evaluation at the identity of the group defines a counit. Similarly, to an arbitrary representation V of G, we associate an $\mathcal{R}(G)$ comodule structure $\chi_V : V \to V \otimes \mathcal{R}(G)$ by the formula $\chi_V(v) = \Sigma v_0 \otimes v_1$, if and only if for all $x \in G$, $v \in V$, $x \cdot v = \Sigma v_0\, v_1(x)$.

In case that the group G has additional structure, it is customary to ask the representative functions to preserve that additional structure, for example for a topological group, one asks the functions to be continuous, i.e. $\mathcal{R}(G) \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$, etc.

We concentrate from now on in the case of a toplogical group G, and in this situation $\mathcal{R}(G)$ is a closed by conjugation subalgebra of $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ that has a natural Hopf algebra structure.

The famous Peter–Weyl theorem, asserts that if G is a compact topological group then $\mathcal{R}(G) \subset \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ is a dense subalgebra with respect to the uniform topology.

It is usual to consider for an arbitrary group G the property of having sufficiently many representations. The group G has sufficiently many representations if for all $1 \neq x \in G$, there exists a finite dimensional G–module V , such that $\rho_V(x) \neq \mathrm{id}$. In other words, in V there is an element $v \in V$ such that $x \cdot v \neq v$. It is easy to prove that G has sufficiently many representations if and only if $\mathcal{R}(G)$ separates the points of G. Using Peter–Weyl theorem, it can be shown that a compact group has sufficiently many representations.

Definition 2.4. Assume that $X \subset {}_G\mathcal{M}$ is a family of representations. We say that $\mathcal{X}$ is closed if it is closed under: isomorphisms, subrepresentations, direct sums, tensor products, conjugation, and $\mathbb{C} \in \mathcal{X}$.

For any family of objects $\mathcal{Y} \subset {}_G\mathcal{M}$, we call $\mathcal{R}(\mathcal{Y})$ the family of representative functions corresponding to the elements of $\mathcal{Y}$. In particular $\mathcal{R}({}_G\mathcal{M}) = \mathcal{R}(G)$.

The proof of the assertion that follows is not short and requires the use of the orthogonality relations. It is written down in [6], Chapter VI.

Theorem 2.5. *Assume that G is compact and that $\mathcal{X}$ is a closed family of representations with the following property, for every $x \neq 1 \in G$, there exists $V \in \mathcal{X}$ and $v \in V$ such that $x \cdot v \neq v$, then $\mathcal{R}(\mathcal{X}) = \mathcal{R}(G)$.*

We have all the machinery ready to illustrate the proof of the theorem of Tannaka–Krein following Chevalley's methods.

18 In the interview to P. Cartier that appears in [14], he mentions that it was in their 1958 meeting at Urbana, that he probably suggested the importance of Hopf algebra theory in relation with the representative functions, introducing Gerhard to that notion.

Theorem 2.6. *Assume that G is a compact topological group, then $\pi : G \to B(G)$ is an isomorphism.*

We proceed as follows: there is a natural restriction functor $\pi^* : {}_{B(G)}\mathcal{M} \to {}_G\mathcal{M}$ and a natural extension functor $e : {}_G\mathcal{M} \to {}_{B(G)}\mathcal{M}$, that given $V \in {}_G\mathcal{M}$ sends it into the representation of $B(G)$, that sends $u \in B(G)$ into $u_V : V \to V$. One easily shows that e preserves sums, tensor products, conjugate representations, irreducibility and neutral element. This guarantees that the image of e is closed as a family of representations of $B(G)$. Now, if $1 \neq u \in B(G)$, for some representation V of G, $u_V \neq \mathrm{id}_V$ and then there is an element $v \in V$ such that $u \cdot v = u_V(v) \neq v$. Hence $\mathcal{X}$ has all the representations of $B(G)$ and then e and π^* are equivalences. It follows easily from the above that the morphism $\pi^* : \mathcal{R}(B(G)) \to \mathcal{R}(G)$ is an algebra isomorphism.

To finish the proof of Tannaka–Krein we observe first that π is injective. It follows from the Theorem of Peter–Weyl that for any $1 \neq x \in G$, there is a representation V of G and an element $v \in V$ such that $x \cdot v \neq v$. That means that $\pi(x) = 1$. The surjectivity of π is slightly more laborious and one has to use in an appropriate manner, the orthogonality relations and trace formula.

Introducing the ideas of Tannaka reconstruction –that we do not explain here– one can go one step further and prove that the real spectrum of $\mathcal{R}(G)$ is isomorphic to G, when G is compact. We call $\mathrm{Spect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}(G)) \subset \mathcal{R}(G)^*$ the set of elements of the dual that are multiplicative and commute with conjugation.

We start by defining the *generalized Fourier transform*, that is a morphism $\mathcal{F} : \mathcal{R}(G)^* \to \mathcal{E}(U)$, given for $\alpha \in \mathcal{R}(G)^*$ as: $\mathcal{F}(\alpha)_V : V \to V$, $\mathcal{F}(\alpha)_V = (\mathrm{id} \otimes \alpha)\chi_V$. It is clear that if we call $\mathrm{ev} : G \to \mathcal{R}(G)^*$ the natural evaluation morphism, one has that the triangle below commutes.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R}(G)^* \arrow[dr, "\mathcal{F}"] & \\ G \arrow[ur, "ev"] \arrow[rr, "\pi"'] & & \mathcal{E}(U). \end{tikzcd} \tag{1}$$

It can be proved –by describing the inverse of $\mathcal{F}$ a map that is sometimes called the Fourier cotransform– that: $\mathcal{F}(\mathit{Spect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}(G)) = B(G)$, and that with adequate topologies $\mathcal{F}$ is in fact an isomorphism of topological groups.

In that case we have a diagram as below, where all the arrows are isomorphisms:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R}(G)^* \arrow[dr, "\mathcal{F}"] & \\ G \arrow[ur, "ev"] \arrow[rr, "\pi"'] & & \mathcal{E}(U). \end{tikzcd} \tag{2}$$

More information can be obtained if the group G can be faithfully represented. Next lemma shows that the compact groups that can be faithfully represented verify that $\mathcal{R}(G)$ is finitely generated, in fact it is an affine algebra.

Lemma 2.7. *Assume that G is compact and admits a faithful finite dimensional representation V. Then $\mathcal{R}(G)$ is generated by the matrix coefficients of V and the inverse of the determinant function on V.*

Call $\mathcal{A}$ the subalgebra of $\mathcal{R}(G)$ generated by the matrix coefficients of V and the inverse of the determinant and call $\mathcal{X}$ the collection of all representations whose coefficients belong to $\mathcal{A}$. One proves that $\mathcal{X}$ is a closed family and as V is faithful we can apply Theorem 2.5 and conclude that $\mathcal{X} = {}_G\mathcal{M}$ and then that $\mathcal{A} = \mathcal{R}(G)$.

Theorem 2.8. *If G is a compact Lie group, then G is real algebraic.*

This result follows by putting together the facts proved above: the well known fact that a compact Lie group admits a faithful representation and Lemma 2.7 guarantee the finite generation of $\mathcal{R}(G)$, then by the fact that the map ev appearing in diagram (2) is an isomorphism, we conclude that the G is indeed real algebraic.

The above slightly surprising Theorem 2.8, was the ultimate reason that led the group of mathematicians that were working around Chevalley in the theory of Lie groups, to start switching their attention to the study of algebraic groups.

As we mentioned before, at the end of the 1940s, Chevalley himself started to work in the foundational basis of the theory of linear groups[19]. In the second and third books of the series *Theory of Lie groups, I,II,III*, see [6, 7, 8], he concentrated more fully on algebraic groups. In the second, he dealt with algebraic groups over arbitrary fields, defining them as subgroups of a general linear group. Seen from today's viewpoint, the foundational principles and language he adopts does not seem to be the more efficient and effective, for example, it is not easy to define adequately the notion of homogeneous space or even of quotient group. Moreover, the main results are established in characteristic zero, and this restriction is forced because of his systematic use of the formal exponential, a device that only makes sense in that case. But, in any case he manages to develop many the essential foundational ingredients: for example at the end of the book he presents a proof of the existence and uniqueness of the multiplicative Jordan decomposition of the elements of the group (called sometimes today the Jordan–Chevalley decomposition). The third book of the series, [8], is a mixture of Lie and algebraic group theory. He concentrates in the study of Lie algebras and in particular establishes the main results on the conjugacy of Cartan subalgebras and defines the concept of Cartan subgroup. The proof that a compact Lie group is real algebraic that we mentioned above, and that is hinted in the first book, is explicitly developed here. We extracted the above considerations from [3], where a thorough and authoritive description of the process mentioned above is presented.

Let us briefly describe the first three of Hochschild's papers with Mostow on representative functions, see [31, 33, 34].

The first of these papers was written while both were at the Princeton Institute during the year 1956/57, and in the second and third Gerhard gives as address, University of Illinois and University of California, respectively.

The authors build upon the foundations laid out by Tannaka in [57] and Chevalley in [6], but with certain important modifications, that allowed them to work with much more flexibility.

First of all, while in the original constructions Chevalley worked with the "characters" of the algebra $\mathcal{R}(G)$, i.e. with the maximal spectrum, Hochschild and Mostow choose to work with the proper automorphisms, i.e. the algebra morphisms of $\mathcal{R}(G)$ that commute with the right translations. Of course, both families of maps are in bijective correspondence but, the algebraic structures on the set of automorphisms are more natural. In modern lenguage and given the comultiplication $\Delta : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$, and the counit ε, to a character $\sigma : \mathcal{R}(G) \to \mathbb{C}$ one associates the proper automorphism $X_\sigma = (\mathrm{id} \otimes \sigma)\Delta : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G)$. Conversely given a proper automorphism $X : R(G) \to R(G)$ it has an associated

19 Some of the other mathematicians that were working in this theory at that time were: Barsotti, Borel, Cartier, Chow, Dieudonné, Freudental, Gotô, Grothendieck, Harish–Chandra, Kolchin, Lang, Matsushima, Rosenlicht, Serre, Springer, Tits, Weil, etc.

character $\sigma_X = \varepsilon X : \mathcal{R}(G) \to \mathbb{C}$. We only need an algorithmic manipulation to prove that these correspondences are inverses of each other.

In this situation, and adapting the notations already introduced, we call now –as the authors do– $A(G)$ the group of proper automorphisms, and $B(G)$ the group of proper automorphisms that commute with complex conjugation. The fact that these groups correspond to the ones previously defined via natural transformations was explained above, and the identification is given by the Fourier transform. In this context, it is clear that the morphism $\pi : G \to A(G)$ considered before is simply the left translation on $\mathcal{R}(G)$.

Another crucial ingredient that [31] brings to the theory, is the clarification of the role of the base field, and this is achieved via the concept of universal complexification. If G is an arbitrary real Lie group, they define a complex Lie group G^+, called the universal complexification of G that comes equipped with a canonical morphism $\imath : G \to G^+$ and its basic property being that there is a bijective correspondence between the complex representations of G and the complex representations of G^+ . If ρ is a complex representation of G and we call ρ^+ the associated complex representation of G^+, then $\rho = \rho^+\imath$. In particular it is clear that $\pi : G \to A(G)$ extends to $\pi^+ : G^+ \to A(G)$.

One needs at this point –for deep reasons that have to do with the fact that contrary to the complex case, in the real situation an irreducible real algebraic group need not be connected– to impose a hypothesis of “almost connectedness”, i.e. we assume that G has only a finite number of connected components.

Many of the results of the paper [31], can be summarized in the assertion displayed below that is valid under the hypothesis of the finiteness of the connected components mentioned above.

The following are equivalent: a) $\mathcal{R}(G)$is finitely generated; b) $\pi^+(G^+)= A(G)$; c) if we call K the clausure of the commutator subgroup of the connected component of the identity G_1, then G/K is compact; d) if ρ is a representation of G, then $\rho^+(G^+)$ is an affine algebraic group; e) $\pi(G_1)$ is the identity component of $B(G)$.

Moreover, with respect to the natural structure of complex linear group of G^+ and assuming the validity of any of these additional hypothesis a)–d), the complex representations of G^+ become algebraic.

Concerning the second paper [33], that could be broadly described as an investigation on the validity of the equivalent conditions a)–e) listed above in more general situations, we will only mention the following very neat result.

Assume that $h : G \to \mathbb{C} \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C})$ is a continuous multiplicative–additive morphism of G, and consider $\exp(h)$: $G \to \mathbb{C}^\times$ its exponential, that clearly is a group like element of $\mathcal{R}(G)$. Then, the authors prove that $\pi^+(G^+)= \{\alpha \in A(G)\text{: } \alpha(\exp(h)) = \alpha(\exp(h)),\ \forall\ h \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C})\}$ or equivalently if we write $\alpha'(f)= \alpha(f)(1)$ for $\alpha \in A(G)$ and $f \in \mathcal{R}(G)$), then $\pi^+(G^+)= \{\alpha \in A(G)\text{: } \alpha'(\exp(h)) = \exp(\alpha'(h)),\ \forall\ h \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C})\}$. It is clear that this condition is a generalization of the fact that condition c) above, implies condition b).

In [34] that is the third paper of the series, the authors concentrate in the complex situation.

They define the concept of reductive complex analytic group: a group is reductive if it has a faithful complex analytic representation and morever, all complex analytical representations are semisimple.

In this paper the authors prove the analogous of the main theorem of the first paper.

Assuming that G has a faithful complex analytic representation, then the following conditions are equivalent: a) The algebra of representative functions is finitely generated; b) $\pi(G)= A(G)$; c) The quotient of G by its commutator subgroup is reductive; d) G is the semidirect product of the radical of the commutator subgroup of G and a reductive complex analytic group; e) G can be identified with a complex linear group, where the complex analytic representations become the rational representations.

2.2. **Representation and cohomology theory of groups with additional structure.** There was another direction of his early work that also led Hochschild to pay an increasing interest to the study of algebraic groups.

Once that the homological techniques that permitted to have a certain degree of control of the category of representations of finite groups were well established, it was natural to apply the already developed methods to the study of representations of groups with additional structure.

After his foundational work in homological algebra in general and in discrete group cohomology and its applications in particular, and armed with the techniques he had developed in his work in Lie and algebraic groups, Hochschild –usually with Mostow– started to pay attention to this kind of situations.

We start by commenting three papers –Hochschild was the coauthor of two of them, where the authors discuss the problem of *the extension of representations* in the situation of Lie groups and algebraic groups.

The first two: [32] and [53] deal with the following problem in the category of Lie groups.

Definition 2.9. Assume that $K \subset G$ is an inclusion in the category of Lie groups –or finite, analytic, affine algebraic, etc. A representation V of K extends to a representation W of G, if $V \subset W$ as K modules.

The basic questions the authors try to solve in both papers is if for an arbitrary pair of a group and a subgroup, every finite dimensional representation of K admits a finite dimensional extension.

In the case of finite groups, the problem has an obvious positive answer, given a representation V of K we cant take $W = \mathrm{Ind}_K^G(V)$, to be the corresponding induced G–module.

In the case of Lie groups the situation is much more akward, considering that the natural construction given by induction even if it were available, it is not expected to produce a finite dimensional result. The authors only obtain positive answers under the hypothesis that K is normal in G and with additional restrictions. For example, the main result of [32] reads as follows.

Let $K \subset G$ be as above, with K normal. Assume that there is an analytic subgroup H of G such that: $G = HK$, $H \cap K$ is compact, there is a finite dimensional representation of H that is faithful on $H \cap K$. Let ρ be a representation of K, then ρ can be extended to a representation of G if and only if $\rho'([rad(K),G]) = 1$, where the bracket represents the commutator subgroup, $rad(K)$ is the radical of K and ρ' is the semisimple representation associated to ρ. Even though the formulation of the theorem is rather restrictive, it turns out to be very useful to simplify the proofs of some theorems concerning the existence of faithful representations due to E. Cartan, Gotô, Malcev, etc. Part of the paper under consideration is devoted to present those proofs.

The situation treated in [53], is similar and refers to the case of an analytic group G and a closed, normal subgroup K. The obtained results are also similar, the main difference being methodological as the author uses in a systematic way some of his own results in the theory of affine linear groups concerning linearly reductive subgroups and what is now called Mostow decomposition. This decomposition theorem guarantees that a connected affine algebraic group in characteristic zero, is the semidirect product of its unipotent radical and a linearly reductive group, see for example [15] for a proof.

Once the methods of the theory of affine algebraic groups were used to deal with the situation of analytic groups, it was clear that there were good perspectives that a reasonable theory of extensions could be developed in the algebraic environment.

This line of work started with the publication of the joint paper with Bialynicki–Birula and Mostow entitled: *Extensions of representations of algebraic linear groups*, see [2].

Assume that G is an affine algebraic group and K a closed subgroup and that we are working over an algebraically closed field of arbitrary characteristic.

Definition 2.10. (1) The subgroup K is said to be observable in G if the extension problem has a solution for all finite dimensional representations of K.

(2) A character $\gamma : K \to \mathbb{K}$ is said to be extendible, if there exists a non zero regular function $f \in K[G]$ with the property that for all $x \in K$ we have that $x \cdot f = \gamma(x)f$.

The main result proved in the paper can be summarized as follows.

Theorem 2.11. *In the situation above the following are equivalent: a) The subgroup K is observable in G; b) the homogeneous space is a quasi–affine variety; c) All the characters of K are extendible to G.*

Even though Hochschild never published further in this direction, immediately after the publication of [2], the concept of observability started to be researched and rich applications were found; one specially remarkable is the application to invariant theory in the work of Grosshans and others. Recently, the concept of observable subgroup was generalized to the concept of observable action.

The concept of extension of a representation considered above, has also been strengthened.

In the notations above, a representation V of K is said to be strongly extendable if it is extendable and it has an extension W with the additional property that the G–fixed part of W coincides with the K–fixed part of V.

In the 1970s, Cline, Parshall and Scott, defined the subgroup K to be strongly observable in G if all its representations are strongly extendable. It was proved that a subgroup K is strongly observable if and only if it is exact –in the sense that the induction functor is exact– and this is also equivalent to the property that the homogeneous space G/K is an affine variety.

Moreover, the above mentioned authors prove that in the case that K is exact in G, then $K[G]$ is a rationally injective K–module and conversely. This result settles for arbitrary characteristic the question of finding conditions that guaranteed that $K[G]$ is cohomologically trivial as a K–module, that Hochschild asked in [40] and that he solved in this paper for characteristic zero –Theorem 3.1 of [40]. The question is important because its positive answer permits to have the machinery of the Hochschild–Serre spectral sequences, in working conditions.

Next we consider Hochschild's work in the cohomology theory of affine algebraic groups.

In the introduction to the paper Cohomology of algebraic linear groups, published in 1961 –see [36]– the author writes: *"The theory of rational representations of* *algebraic linear groups over fields of characteristic zero has, for some time, been in a sufficiently well developed state to call for an adaptation of homological algebra to the requisite category of 'rational modules'".*

In the intent of reproducing all the machinery of homological algebra to the context of the rational representations of an affine algebraic group, some important adaptations should be implemented.

One crucial point –that was noticed by Mostow in his paper *Cohomology of topological groups and solvmanifolds*, see [54], and developed in the paper we are considering– is the following: contrary to the usual situation of discrete groups where the projective part of the machinery can be applied and it is somewhat more natural, in the case of Lie or algebraic groups one has to restrict the attention to injective resolutions. The point being that the categories under consideration have enough injectives but they need not have enough projectives.

Once this machinery is available, one can define the rational cohomology groups of the affine algebraic group G with coefficients in a rational representation M. We denote this family as: $\{H^i(G, M): i \geq 0\}$ and it can be defined explicitly in terms of the same cochain complex that is used to define group cohomology but with the additional restriction that all the functions are polynomial.

If we call $\mathfrak{g}$ the Lie algebra of G and $E(G)$ the complex of differential forms based on the representative functions, i.e. on $\mathbb{K}[G]$, the main result proved in this paper is the following:

$$H^{\bullet}(\mathfrak{g},M) = H^{\bullet}(E(G)) \otimes H^{\bullet}(G, M).$$

This isomorphism comes from the identification the different elements of a particular instance of the Hochschild–Serre spectral sequence for Lie algebras as follows.

Call G_u the unipotent radical of G, and $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{n}$ the Lie algebras of G and G_u respectively and assume that M is a rational G–module.

From the spectral sequence for $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ and $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ and the fact that the last written Lie algebra is semisimple, one can prove the existence of an isomorphism $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, M)= H^{\bullet}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathbb{K}) \otimes H^{\bullet}(\mathfrak{n}, M)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}$. By a direct identification of the right terms of the above isomorphism, the authors deduce the mentioned result. It is important to mention that for the identification of $H^{\bullet}(E(G))$ with $H^{\bullet}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathbb{K})$ that comes from an extension of the dual of the canonical map $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ it is needed as a crucial ingredient the existence of Mostow semidirect product decomposition of $G = G_u \rtimes L$ for a linearly reductive L that is only valid in characteristic zero. One interesting consequence of the study of the cohomology or differential forms $H^{\bullet}(E(G))$ and the identification used above is the following: the differential form cohomology of the ring $\mathbb{K}[G]$ of polynomials in G is trivial, if and only if $\mathbb{K}[G]$ is a polynomial ring.

The line of work started in the paper just considered continues naturally with the joint paper with B. Kostant: *Differential forms and Lie algebra cohomology for algebraic linear groups*, that appeared one year later in 1962, see [39]. The purpose of this paper is to extend the results on differential forms to the situation of a homogeneous space of the form G/H with H a linearly reductive group –in characteristic zero. We use the same notation than before and call h the Lie algebra of H. The isomorphism $H^{\bullet}(\mathfrak{g},M)= H^{\bullet}(E(G)) \otimes H^{\bullet}(G, M)$ now becomes $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, M)^H = H^{\bullet}(E(G/G_u \rtimes H)) \otimes H^{\bullet}(G, M)$, where the left terms indicates the relative Lie algebra cohomology.

Moreover, the results just described were used in a later paper to produce an interesting cohomological characterization of the maximality of a linearly reductive subgroup of G, see [43].

Along the way it is proved that for complex reductive homogeneous spaces the de Rham cohomology can be computed using only holomorphic differential forms, a result that was later vastly generalized by A. Grothendieck.

In a 1967 paper jointly written with Mostow and dedicated to Nakayama, this line of research is continued with the comparison of the rational cohomology with the holomorphic cohomology in case that G is a complex analytic linear group, the basic result being –as expressed in the paper by the authors– that: *"the usual abundantly used connections between complex analytic representations of complex analytic groups and rational representations of algebraic groups extend[s] fully to the superestructure of cohomology"*. In fact they prove that the cohomology using holomorphic cochains is naturally isomorphic to the rational cohomology defined using polynomial cochains as in [36].

Tracing our steps back a little, we say some words about the important paper [37] published in 1962 jointly with Mostow and called: *Cohomology of Lie groups.*

This paper has the intention to compare for a Lie group G and a finite dimensional G–module V, the different kind of cohomology groups with coefficients in V that could be defined using: continuous, differentiable or representable cochains –and eventually if the group is algebraic using polynomial cochains.

The case of an affine algebraic group has been analyzed in [36] and the case of representative cochains appears in this paper. The continuous cohomology appeared in [54] but some parts of the theory developed there need to be reconsidered in order to adapt it to the machinery of injective resolutions –that as we mentioned before is the only way to work in the case of a group with superestructure. In all of the three cases mentioned above, one of the main achievements of the theory, is to link the global cohomology to the local cohomology of the Lie algebras. The two main theorems are the following: if G is a real linear algebraic group, G_u its unipotent radical and V a rational G–module, then there is an isomorphism $H^{\bullet}_{\mathrm{rac}}(G, V) \otimes H^{\bullet}_{\mathrm{rep}}(G/G_u, \mathbb{R}) \cong H^{\bullet}_{\mathrm{rep}}(G, V)$, and there is an analogous result for linear groups but one has to change, the representative cohomology by continuous cohomology and the rational cohomology by representative cohomology.

2.3. **Unipotent groups in invariant theory**. We will now describe the article appearing in 1973 written together with Mostow, see [47]. Even though it is his only article dealing with "hard core" invariant theory, it represents a very important contribution as it was a breakthrough in a classical problem in the hardest case of the invariants of unipotent groups. It opened up what is today an active area of research with important open problems in train of being solved.

The problem of the finite generation of rings of invariants, famously known as Hilbert's 14th problem, can be formulated as follows.

Let V be a finite dimensional vector space and $H \subset$ GL(V) a subgroup acting on $\mathbb{K}[V]$ with the induced linear action. Is the algebra of invariants $\mathbb{K}[V]^H$ finitely generated?

As the condition of being an invariant is Zariski closed, one can take H to be a closed subgroup of the linear group and then the problem can be attacked using the standard tools of the theory of affine algebraic groups.

The important geometric meaning of the finite generation of the rings of invariants is clear.

Indeed, if we have an affine algebraic group H acting on an affine variety with ring of polynomials R, as one expects that the invariant polynomials R^H separate the geometric orbits –at least generically– to have a finite number of algebra generators of R^H, will produce a finite criteria to decide whether two points of the variety are in the same orbit or not. In other words, the corresponding classification problem of the points of the variety can be solved in a finite number of steps by evaluation of a finite number of functions.

The search for groups with the above finiteness condition on invariants *for all actions* (in other words that are always adequate for taking quotients by them), culminated around mid 1970s thanks to the efforts of Haboush, Mumford, Nagata and Popov –to name those who in the opinion of this author were the main contributors, who showed that the only class of groups that guarantee the finiteness of the invariants, is the class of reductive groups.

In 1958, Nagata constructed a counterexample to Hilbert's problem, that consisted of a unipotent group of dimension 13 acting linearly on a space of dimension 32. Later, many counterexamples of smaller size have been found. This counterexample played a crucial role in the results of Haboush–Mumford–Nagata–Popov mentioned above.

Moreover, once we know that the invariants of reductive groups on finitely generated algebras are finitely generated –another result of Nagata– it is clear that the generic obstruction to finite generation is in the case of actions of unipotent groups.

For that reason, the paper *Unipotent groups in invariant theory*, published in the Proceedings of the National Academy of Sciences, see [47], dealing with the finite generation of the invariants of unipotent groups in G–module algebras, was considered extremely important.

More precisely, the authors prove the following main result.

Theorem 2.12. *Let K be an algebraically closed field of characteristic zero, G a connected reductive group and R a commutative finitely generated rational G–module algebra. If U is a maximal unipotent subgroup of G, then the subalgebra $R^U = \{r \in R : u \cdot r = r, \forall\, u \in U\} \subset R$ is finitely generated.*

This theorem is one of the first general results dealing with invariants of unipotent groups, and can be interpreted as a generalization of the so called Weitzenbock's theorem[20] that guarantees the finite generation of the invariants of the additive group of a field acting linearly on a vector space. In that case G is the special two by two linear group.

A particular case of Theorem 2.12 had been proved before by Dz. Hadziev in [20]. It is proved for groups over the complex numbers and assumes that the commutative algebra R is graded, and that the action of G is homogeneous[21].

Soon afterwords, F. Grosshans wrote a paper introducing an interesting viewpoing in invariant theory, that is related to the ideas of [47]. Building on the idea of observable subgroup and with a view of generalizing the situation treated by Maurer–Weitzenbock in dealing with invariants of the additive group of the field, the author defines $H \subset G$ to be what was later called a *Grosshans subgroup*, see [17], and gives a very nice geometric characterization in terms of dimensions of the orbits of the action of the group G on a certain representation.

Definition 2.13. Let G be an affine algebraic group and $H \subset G$ a closed subgroup. The pair (H, G) is called

20 In accordance to A. Borel in [3], Weitzenbock's theorem should better be called Maurer's theorem.

21 The reader should take into account that to pass from the graded to the non graded case is not easy if we are not dealing with invariants of reductive groups.

a Grosshans pair if: (1) H is observable in G; (2) $\mathbb{K}[G]^H$ is a finitely generated algebra.

The observability condition is not too restrictive as we can always substitute the group H by its observable closure in G –see for example Chapter 12, Section 4, Lemma 5.2 of [15].

The following isomorphism called "the transfer principle"[22] clarifies some problems related to invariants and justifies the above definition.

Assume that $H \subset G$ is a pair of affine algebraic groups and that V is a rational G–module. Then there is a natural ismorphism between $(\mathbb{K}[G]^H \otimes N)^G \cong N^H$ Applying the transfer principle to the situation of Hilbert's problem and recalling that $\mathrm{GL}(V)$ is reductive, we deduce that that if $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(V)]^H$ is finitely generated, then $\mathbb{K}[V]^{\mathrm{H}}$ is also finitely generated.

More generally, if (H, G) is a Grosshans pair and G is reductive, we deduce that the H–invariants of a rational affine G–module algebra are finitely generated.

The main theorem of [47] can be formulated as follows: if the base field has characteristic zero, G is a reductive group and U a maximal unipotent subgroup, then (U, G) is a Grosshans pair.

A far ranging conjecture that as far as the author knows is still open, and that in case it is true is an ample generalization of the seminal result by Hochschild and Mostow is the following.

Conjecture of Popov–Pommerening: If G is a reductive group and $U \subset G$ is a unipotent subgroup normalized by a maximal torus, then (U, G) is a Grosshans pair.

A typical Hochschild landscape.

22 It is also known as Grosshans principle, even if it was already known in particular cases to classical invariant theorists like Capelli or Roberts that used yet another name: *"adjunction principle"*.

REFERENCES

[1] ADO, I. D. *Note on the representation of finite continuous groups by means of linear substitutions.* Izv. Fiz.-Mat. Obsch. (Kazan') 7 (1935), pp. 1–43.

[2] BIALYNICKI–BIRULA, A.; HOCHSCHILD, G. AND MOSTOW, G. D. *Extensions of representations of algebraic linear groups.* Amer. J. Math. 85 (1963), 131–144.

[3] BOREL, A. *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups,* History of mathematics, 21, A.M.S. Providence, RI, 2001.

[4] CARTIER, P. *Dualité de Tannaka des groupes et des algèbres de Lie.* C.R. Acad. Sci. Paris, 242 (1956), 322–325.

[5] CARTAN, H. AND EILENBERG, S. *Homological algebra*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1956).

[6] CHEVALLEY, C. *Theory of Lie groups.* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1951).

[7] CHEVALLEY, C. *Théorie des groupes de Lie II, Groupes Algébriques,* Hermann, Paris (1951).

[8] CHEVALLEY, C. *Théorie des groupes de Lie III, Groupes Algébriques,* Hermann, Paris (1954).

[9] CHEVALLEY, C. *Classification des groupes de Lie algébriques,* 2 vols, Notes polycopiées, Inst. H. Poincaré, 1956/58.

[10] CHEVALLEY, C. *Fondements de la géométrie algébrique*, Paris, Secrétariat Mathem´atique, 1958.

[11] CHEVALLEY, C. (CARTIER, P., GROTHENDIECK A., LAZARD, M.) *The classification of semisimple algebraic groups. Collected works.* Vol. 3. Text revised by P. Cartier. Springer-Verlag, New York-Berlin, 2005.

[12] EILENBERG, S. AND MAC LANE, S. *Relations between homology and homotopy groups*. Proc. Nat. Acad. Sci. 29 (1943), 155–158.

[13] EILENBERG, S. AND MAC LANE, S. *Cohomology theory in abstract groups.* I, Ann. of Math. 48 (1947), 51–78.

[14] FERRER SANTOS, W. AND MOSKOWITZ, M. EDS. *Gerhard Hochschild (1915–2010)*, to appear in the Bulletin of the AMS, 2011. With contributions by: P. Bateman, G. Bergman, P. Cartier, M. Gerstenhaber, B. Kostant, A. Magid, C. Moore, G.D. Mostow, M. Mostowski, N. Nahlus, J. Tate, J.-P. Serre, J. Schwartz.

[15] FERRER SANTOS, W. AND RITTATORE, A. *Actions and invariants of algebraic groups.* CRC Press, Boca Raton, London, New York, Singapore (2005).

[16] GOTÔ, M. *On algebraic Lie algebras.* J. Math. Soc. Japan, 1 (1948), 29–45.

[17] GROSSHANS, F. *Observable groups and Hilbert's fourteenth problem.* Amer. J. Math. 95 (1973), 229–253.

[18] HARISH-CHANDRA, *Faithful representations of Lie algebras.* Ann. Math.50 (1949), 68–76

[19] HARISH-CHANDRA, *Lie algebras and the Tannaka duality theorem*. Ann. Math. 51 (1950),91–107.

[20] HAZDIEV, D. *Some questions in the theory of vector invariants*. Math. USSR Sbornik, 1 (1967), 383–396.

[21] HOCHSCHILD, G. *Semi-simple algebras and generalized derivations.* Amer. J. Math. 64 (1942), 677–694.

[22] HOCHSCHILD, G. *On the cohomology groups of an associative algebra*. Ann. of Math. 46 (1945), 58–67.

[23] HOCHSCHILD, G. *On the cohomology theory for associative algebras.* Ann. of Math. 47 (1946), 568–579.

[24] HOCHSCHILD, G. *Local class field theory*. Ann. of Math. 51 (1950), 331–347.

[25] HOCHSCHILD, G. *Note on Artin's reciprocity law.* Ann. of Math. 52 (1950), 694–701.

[26] HOCHSCHILD, G. *Group extensions of Lie groups.* Ann. of Math. 54 (1951), 96–109.

[27] HOCHSCHILD, G. *Group extensions of Lie groups.* II. Ann. of Math. 54 (1951), 537–551.

[28] HOCHSCHILD, G. AND NAKAYAMA, T. *Cohomology in class field theory.* Ann. of Math. 55 (1952), 348–366.

[29] HOCHSCHILD, G. AND SERRE, J.-P. *Cohomology of group extensions.* Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 110–134.

[30] HOCHSCHILD, G. AND SERRE, J.-P. *Cohomology of Lie algebras.* Ann. of Math. 57 (1953), 591–603.

[31] HOCHSCHILD, G. AND MOSTOW, G. D. *Representations and representative functions of Lie groups.* Ann. of Math. 66, (1957), 495–542.

[32] HOCHSCHILD, G. AND MOSTOW, G. D. *Extensions of representations of Lie groups and Lie algebras.* I. Amer. J. Math. 79 (1957), 924–942.

[33] HOCHSCHILD, G. AND MOSTOW, G. D. *Representations and representative functions of Lie groups.* II. Ann. of Math. 68, (1958), 295–313.

[34] HOCHSCHILD, G. AND MOSTOW, G. D. *Representations and representative functions of Lie groups.* III. Ann. of Math. 70, (1959), 85–100.

[35] HOCHSCHILD, G. *Algebraic Lie algebras and representative functions.* Illinois J. Math. 3 (1959), 499–523.

[36] HOCHSCHILD, G. *Cohomology of algebraic linear groups*. Illinois J. Math. 5 (1961), 492–519.

[37] HOCHSCHILD, G.; MOSTOW, G. D. *Cohomology of Lie groups.* Illinois J. Math. 6 (1962), 367–401.

[38] HOCHSCHILD, G.; KOSTANT, B.; ROSENBERG, A. *Differential forms on regular affine algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 383–408.

[39] HOCHSCHILD, G. AND KOSTANT, B. *Differential forms and Lie algebra cohomology for algebraic linear groups.* Illinois J. Math. 6 (1962), 264–281.

[40] HOCHSCHILD, G. *Rationally injective modules for algebraic linear groups.* Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 88–883.

[41] HOCHSCHILD, G. *An addition to Ado's theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 531–533.

[42] HOCHSCHILD, G. AND MOSTOW, G. D. *Holomorphic cohomology of complex analytic linear groups.* Nagoya Math. J. 27 (1966), 531–542.

[43] HOCHSCHILD, G. *Cohomology of affine algebraic homogeneous spaces.* Illinois J. Math. 11 (1967), 635–643.

[44] HOCHSCHILD, G. *Algebraic groups and Hopf algebras.* Illinois J. Math. 14 (1970), 52–65.

[45] HOCHSCHILD, G. *Note on algebraic Lie algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 10–16.

[46] HOCHSCHILD, G. I*ntroduction to affine algebraic groups.* Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-Cambridge-Amsterdam 1971.

[47] HOCHSCHILD, G. AND MOSTOW, G.D. *Unipotent groups in invariant theory.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 70 (1973), 646–648.

[48] HOCHSCHILD, G. *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras.* Graduate Texts in Mathematics, 75. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[49] HUMPHREYS, J., Mathscinet, MR0277535 (43) 3268). AMS, 1972.

[50] IWASAWA, K. *On the representation of Lie algebras.* Japanese Journal of Mathematics, 19 (1948), pp. 405–426

[51] JOYAL, A. AND STREET, R. *An introduction to Tannaka duality and quantum groups.* in Part II of *Category Theory, Proceedings, Como 1990.* eds. Carboni, A. et al. Lecture Notes in Mathematics 1488, Springer, Berlin, (1991) pp 411–492.

[52] MOORE, C.C. *Mathematics at Berkeley: A History.* A K Peters, Ltd. Wellesley, MA, 2007.

[53] MOSTOW, G.D. *Extension of Representations of Lie Groups,* II. Amer. J. of Math. 80, No. 2 (1958), pp. 331–347

[54] MOSTOW, G.D. *Cohomology of topological groups and solvmanifolds.* Ann. of Math. 73 (1961), 20–48.

[55] SERRE, J.-P. *Cohomologie des extensions de groupes.* C.R. Acad. Sci. Paris, 231 (1950), 643–646.

[56] STROUS, R. *Extermination of the Jewish mentally-ill during the Nazi era–the "doubly cursed".* Isr. J. Psychiatry Relat Sci. 45, 4(2008), 247–256.

[57] TANNAKA, T. *Uber den Dualit¨atssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen.* Tˆohoku Math. J. 45 (1939) 1–12.

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)
TOMO XV, AGOSTO DE 2012

POINCARÉ ET L'ESTHÉTIQUE DES MATHÉMATIQUES CADRE MÉTAPHYSIQUE ET MÉTHODOLOGIQUE

CAROLINE JULLIEN

Université de Nancy – LPHS- Archives Henri Poincaré Nancy.
Email: caroline.jullien@univ-nancy2.fr.

CONCEPTION POINCARÉENNE DE L'ESTHÉTIQUE EN MATHÉMATIQUES

Mots clés: mathématiques, esthétique, beauté, Poincaré / mathematics, aesthetic, beauty, Poincaré.

SYNOPSIS

En ce qui concerne le rôle et la signification de l'esthétique en mathématique, Poincaré fait figure d'autorité. Une grande majorité des travaux qui portent sur cette question mentionne une référence explicite à la conception poincaréenne de la beauté en mathématique ; de la même façon, de nombreux mathématiciens en appellent à Poincaré lorsqu'il s'agit de défendre le rôle de l'esthétique dans leur science. L'objet de cet article est de montrer que la thèse de Poincaré, si elle est cohérente et argumentée, n'en repose pas moins sur des présupposés métaphysique et méthodologique dont il faut tenir compte pour pouvoir l'adopter.

CONCEPCIÓN POINCAREANA DE LA ESTÉTICA EN MATEMÁTICAS: MARCO METAFÍSICO Y METODOLÓGICO

CONCEPCIÓN POINCAREANA DE LA ESTÉTICA EN MATEMÁTICAS

Palabras clave: matemáticas, estética, belleza, Poincaré.

SINOPSIS

En cuanto al papel y la importancia de la estética de la matemática, Poincaré es una de las principales autoridades. En numerosos trabajos que tratan este tema se menciona explícitamente al diseño poincareano de la belleza en las matemáticas; de la misma manera, muchos matemáticos apelan a Poincaré en la defensa del papel de la estética en su ciencia. El propósito de este trabajo es mostrar los supuestos metafísicos y la metodología que deben ser considerados con el fin de adoptar la teoría de Poincaré, para que sea coherente y bien argumentada.

INTRODUCTION

Poincaré est bien connu pour sa sensibilité à la beauté des mathématiques; il considère non seulement que la dimension esthétique des mathématiques est fondamentale dans le développement de cette science mais il affirme de surcroît que la beauté constitue l'un des buts des mathématiques: «Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.» [Poincaré1905, 104]

Face à cette affirmation, il y a, de façon très schématique, deux types de positions: la première consiste à ne considérer cela que comme une «façon de parler»: la beauté ne peut pas être «sérieusement» le but des mathématiques! L'autre réaction tout aussi tranchée, consiste à se placer sous l'autorité de Poincaré et à s'approprier cette vision dès qu'il s'agit de défendre le rôle de la beauté en mathématiques. Mon objectif est de montrer que la conception de Poincaré quant aux relations entre l'esthétique et les mathématiques n'est pas un simple point de vue, ni une façon de parler mais que c'est bien une véritable thèse argumentée. Il s'agit donc en particulier de réfuter les deux réactions schématiques soulignées à l'instant: d'une part la beauté des mathématiques peut tout à fait sérieusement constituer un but mais d'autre part, en tant que thèse philosophique, l'adoption de cette conclusion nécessite que l'on se place dans un cadre défini par des présupposés sur lesquels reposent l'argumentation de cette thèse.

Mon objectif n'est pas d'interpréter la position philosophique de Poincaré par rapport à l'esthétique mais il est de reconstruire cette dernière à partir d'une lecture méthodique de ses écrits. A ce titre, la première partie de mon exposé est, justement, un *exposé* et non une interprétation de la conception poincaréenne de la beauté en mathématiques. Dans la seconde partie, je montrerai comment l'attribution d'un but esthétique aux mathématiques ne dessert pas le rôle que l'on est légitimement en droit d'attendre de cette science: celui de fournir un outil performant aux sciences physiques.

I. CONCEPTION POINCARÉENNE DE LA BEAUTÉ

La conception de la beauté chez Poincaré apparaît à mi-chemin entre une conception platonicienne et une conception aristotélicienne. Plus exactement, il est possible de dresser des parallèles significatifs entre ce que représente la beauté chez Platon et ce qu'elle représente pour Poincaré ainsi qu'entre les vertus cognitives des propriétés esthétiques chez Aristote et la caractéristique que donne Poincaré des manifestations de la beauté.

I.1Beauté intellectuelle

En établissant un parallèle entre Platon et Poincaré par rapport à la beauté, je ne fais aucune considération d'ordre ontologique. A ma connaissance, rien dans les textes de Poincaré n'indique qu'il ait une conception strictement réaliste de la beauté. Par contre, il attribue un rôle déterminant au sentiment esthétique, à l'appréhension de la beauté. Cela n'engage pas nécessairement d'attribuer à la beauté une existence indépendante de l'esprit.

Quoi qu'il en soit, il semble tout de même possible de fournir quelques précisions quant au statut d'existence de la beauté telle que la conçoit Poincaré. Pour ce dernier, la nature, entendue comme le monde des phénomènes naturels, est l'occasion de concevoir le modèle de toute beauté[1]. En ce sens, la beauté n'est pas une idée au sens platonicien, mais elle est une catégorie qui permet de préciser le plaisir des sens. Il n'y a donc pas lieu de s'inquiéter dans l'immédiat d'une friction ontologique entre la position de Poincaré vis-à-vis des mathématiques et vis-à-vis de la beauté. En revanche, cette première précision par rapport à la conception poincaréenne de la nature comme source de toute beauté permet de mettre en lumière l'un des présupposés dont il va falloir tenir compte pour examiner la cohérence de la thèse de Poincaré sur le rôle de la beauté en mathématiques.

En effet, on peut constater le rôle de cette conception particulière de la nature dès lors que Poincaré entreprend de discuter les raisons pour lesquels le savant étudie la nature; il ne le fait pas pour l'utilité directe que cela peut représenter mais pour le plaisir que cela procure: «(Le savant étudie) la nature parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.» [Poincaré 1908, 22]

En dernière instance, c'est la connaissance de la beauté qui seule apparait désirable aux yeux de Poincaré: «Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue. (…) la beauté intellectuelle se suffit à elle-même, et c'est pour elle, plus peut-être que pour le bien futur de l'humanité, que le savant se condamne à de longs et pénible travaux.» [Idem]

Il n'est pas difficile de mettre cette citation en parallèle avec l'assertion suivante de Platon: « Si la vie vaut jamais la peine d'être vécue, cher Socrate, dit l'étrangère de Mantinée, c'est à ce moment où l'homme contemple la beauté en soi.» [Le Banquet, 211b-212b]

Et cette beauté conçue comme seule connaissance désirable n'est naturellement pas ni pour Poincaré ni pour Platon une beauté physique, perçue par les sens mais il s'agit d'une beauté intellectuelle, accessible à l'intelligence. Poincaré le précise explicitement: «Je ne parle pas ici, bien entendu, de cette beauté qui frappe les sens, de la beauté des qualités et des apparences, (…), je veux parler de cette beauté plus intime qui vient de l'ordre harmonieux des parties, et qu'une intelligence pure peut saisir.» [Poincaré 1908,22] De la même façon, la beauté dont il est question dans la citation de Platon est du même ordre: «(…) le Beau lui-même, simple, pur, sans mélange, et contempler, au lieu d'une beauté chargée de chairs, de couleurs et de cent autres superfluités périssables, la beauté divine elle-même sous sa forme unique.» [Le Banquet, 211b-212b]

Enfin, pour Poincaré, la beauté des apparences est structurée par la beauté intellectuelle, elle-même suscitée par le plaisir: «C'est elle (la beauté intellectuelle) qui donne un corps, un squelette pour ainsi dire aux chatoyantes apparences qui flattent nos sens, et sans ce support, la beauté de ces rêves fugitifs ne serait qu'imparfaite parce qu'elle serait indécise et toujours fuyante.» [Poincaré 1908, 22]

Ce que l'on peut rapprocher à la théorie du Beau de Platon selon laquelle rien n'est beau que par le Beau. La différence est que dans l'approche de Poincaré, la beauté n'a pas besoin de se voir attribuer un statut réaliste, elle dépend de notre perception de la nature. Quelque chose est beau dès lors que l'on peut y reconnaître des caractéristiques fixées par l'observation de la nature.

En d'autres termes, Poincaré en présupposant la nature comme source de toute beauté, considère par suite que c'est elle, la nature, qui fournit les canons

1 A ce propos, on pourra consulter les travaux de Heinzmann sur l'occasionnalisme de Poincaré, en particulier [Heinzmann 2006] et l'article «L'occasionnalisme de Poincaré : l'élément unificateur de sa philosophie des sciences», disponible en ligne: http://www.univ-nancy2.fr/poincare/perso/heinzman/documents/talk2001-03-b.pdf.

esthétiques (la nature donne l'occasion de fixer les critères de la beauté). Cette caractérisation de la beauté va lui permettre de justifier l'obtention de résultats mathématiques probants en ayant visé un but esthétique, comme je le montrerai dans la deuxième partie.

I.2 Propriétés cognitives de la beauté

Après cette première mise au point sur la conception générale de la beauté (c'est-à-dire pas uniquement la beauté des mathématiques) chez Poincaré, je propose de m'attarder un instant sur les vertus cognitives que Poincaré accorde à la beauté. Cette fois, je me penche plus particulièrement sur la beauté des mathématiques.

Dans «l'invention mathématique», Poincaré explique ce qu'il entend par la beauté mathématique, et fournit une description de celle-ci:

«(…) quels sont les êtres mathématiques auxquels nous attribuons ce caractère de beauté et d'élégance, et qui sont susceptibles de développer en nous une sorte d'émotion esthétique? Ce sont ceux dont les éléments sont harmonieusement disposés, de façon que l'esprit puisse sans efforts en embrasser l'ensemble tout en pénétrant les détails. Cette harmonie est à la fois une satisfaction pour nos besoins esthétiques et une aide pour l'esprit qu'elle soutient et qu'elle guide.» [Poincaré 1908, 53]

La beauté en général, et celle des mathématiques en particulier, apparaît donc dans la conception que propose Poincaré, comme une propriété qui, au-delà de satisfaire une émotion esthétique, sert la cognition. Les critères esthétiques que décrit l'auteur ne s'appliquent pas seulement aux mathématiques; Poincaré transporte les mêmes exigences dans les domaines mathématiques que dans des domaines naturellement plus artistiques lorsque par exemple, il explique que: «Les édifices que nous admirons sont ceux où l'architecte a su proportionner les moyens au but, et où les colonnes semblent porter sans efforts et allègrement le poids qu'on leur a imposé, comme les gracieuses cariatides de l'Erechthéion.» [Poincaré 1908, 53]

On retrouve les mêmes exigences en matière de beauté que dans la conception aristotélicienne. En effet, Les critères établis par Aristote pour déterminer la beauté sont l'ordre, la symétrie ou encore le défini et c'est d'ailleurs dans le livre M de la métaphysique, consacré aux mathématiques, que l'on peut trouver ces critères:

«Les philosophes qui prétendent que les sciences mathématiques ne font aucune place ni au Beau, ni au Bien, sont assurément dans l'erreur: le Beau est, au contraire, l'objet principal du raisonnement de ces sciences et de leurs démonstrations. Ce n'est pas une raison parce qu'elles ne le nomment pas pour dire qu'elles n'en parlent pas, car elles en montrent les effets et les rapports. Les formes les plus hautes du beau sont l'ordre, la symétrie, le défini, et c'est là surtout ce que font apparaître les sciences mathématiques. Et puisque ces formes (je veux dire l'ordre et le défini) sont manifestement causes d'une multitude d'effets, il est clair que les mathématiciens doivent considérer comme cause d'une certaine manière, la cause dont nous parlons, le Beau en un mot.» [Métaphysique M 1078a 31b5]

Et l'on peut trouver dans la *Poétique* des justifications de ce choix à la fois par des exemples empiriques (ce que nous trouvons beau présente ces critères), et par des explications théoriques:

«(…) la beauté réside dans l'étendue et dans l'ordre et c'est pourquoi un animal ne saurait être beau s'il est très petit (la vision devient confuse lorsqu'elle ne s'exerce qu'un imperceptible instant) ni s'il est très grand (la vision d'ensemble en est empêchée, l'unité de la totalité échappe à la vue des spectateurs; comme si un animal mesurait dix mille stades…); il faut, de même que les corps et les animaux doivent avoir une étendue qui soit facile à embrasser du regard, que les intrigues aient une longueur telle que l'on s'en souvienne aisément.» [Poétique 1450b 40]

Les caractéristiques de la beauté sont donc des propriétés commodes qui permettent une perception optimale de l'objet auquel elles s'appliquent. Il semble alors que les exigences d'Aristote en matière de beauté ne sont somme toute que des exigences liées à la perception, qu'elles ne décrivent que les conditions de compréhension. L'homme comprend bien mieux ce qui est ordonné, mesuré et limité que ce qui est chaotique, sans fin apparente, etc. En d'autres termes, est beau ce que l'on peut comprendre dans sa totalité[2].

Dans une perspective aristotélicienne, à la différence d'un point de vue platonicien, l'intérêt fondamental de la beauté n'est pas de révéler la vérité mais de permettre la compréhension. En ce sens, la beauté, plus qu'une propriété esthétique, est une propriété cognitive.

Aristote établit un lien étroit et particulier entre les mathématiques et la beauté: les mathématiques sont elles-mêmes belles et elles fournissent de surcroît un modèle pour la beauté. Peut-être même plus, elles permettent, en l'exemplifiant, de comprendre le fonctionnement cognitif de la beauté. Si l'homme peut comprendre et développer les mathématiques c'est parce qu'elles sont belles au sens où l'on y trouve de l'ordre, de la mesure et de la limite[3].

A l'instar d'Aristote, Poincaré justifie les critères esthétiques en fonction de leur caractère utile à la cognition. Ces deux conceptions de la beauté en font une propriété cognitive, ou plus exactement, elles établissent une relation d'équivalence entre les propriétés qui servent la beauté et celles qui offrent une compréhension optimale.

II. La beauté, but des mathématiques?

Je vais montrer comment, en tenant compte des présupposés méthodologique et métaphysique initiaux et de la conception poincaréenne de la beauté, il est possible de construire une argumentation justifiant:

a) que fixer la beauté comme but des mathématiques ne dessert pas leur but physique,
b) que ce but esthétique, s'il est atteint, confère aux mathématiques leur utilité interne et externe.

Comme on l'a vu précédemment, pour Poincaré, la quête de la beauté constitue la motivation première et principale du mathématicien, du savant de façon générale. Mais elle n'est pas seulement une motivation, comme je l'ai mentionné en introduction, elle est explicitement considérée par Poincaré comme un but, à pro-

2 Dans l'article "Symmetry as an Aesthetic Factor", Osborne souligne la différence entre la *symmetria*, terme grec pour symétrie et la symétrie entendue selon son acception moderne. Il montre alors combien la *symmetria*, comme tous les critères esthétiques, ou les caractéristiques de la beauté en vigueur durant l'Antiquité grecque, est reliée à l'idée de compréhension et d'intelligibilité. Pour plus de détails à ce propos, cf. [Osborne, 1986].

3 Il faut toutefois noter que le lien ainsi établi entre mathématiques et beauté n'est sûrement pas interne aux mathématiques. En effet, on peut penser que lorsque Aristote écrit que les mathématiques parlent de la beauté et construisent des théorèmes à son propos, il est fait allusion aux lois mathématiques qui régissent les harmoniques musicales, ou encore aux règles de proportions qui sous-tendent diverses constructions architecturales par exemple. Dans le cadre de la théorie aristotélicienne, cette interprétation reste la plus probable. Elle permet en outre de comprendre en partie en quoi et comment les mathématiques nous parlent de la beauté. Elles le font en nous proposant de suivre des règles qui offrent ordre et mesure, et qui donc permettent d'introduire de la beauté dans différentes entreprises.

prement parler, pour les mathématiques. Plus précisément, Poincaré établit une relation d'interdépendance entre le but physique et le but esthétique des mathématiques. C'est ce lien qui va permettre de montrer comment, en visant la beauté, les critères de vérité comme adéquation structurelle au réel et d'utilité externe peuvent être atteints. Je précise aussitôt ce qu'il faut entendre par adéquation structurelle au réel: Poincaré adopte le présupposé méthodologique selon lequel les mathématiques sont le seul accès que nous ayons à l'harmonie universelle. Les mathématiques peuvent alors atteindre la vérité dans le sens où elles sont le seul instrument pour décrire l'harmonie (présupposée) de la nature. L'harmonie elle-même offre de saisir les relations entre les phénomènes réels et ces relations sont par ailleurs considérées par Poincaré comme les seuls objets existants. L'expression de vérité comme adéquation structurelle traduit donc le fait que les mathématiques rendent compte de la structure relationnelle de la réalité du monde et non qu'il existe une équivalence point par point entre la théorie et le phénomène.

Je reviens au lien entre le but physique et le but esthétique. Si Poincaré concède que le but physique et le but esthétique ne sont pas solidaires, il prétend toutefois qu'ils sont inséparables; ainsi explique-t-il que le meilleur moyen d'atteindre l'un, c'est de viser l'autre[4]. Pour justifier que la cause esthétique sert le but physique, Poincaré établit un parallèle avec l'art: «(…) les écrivains qui embellissent une langue, qui la traitent comme un objet d'art, en font en même temps un instrument plus souple, plus apte à rendre les nuances de la pensée. On comprend alors comment l'analyste qui poursuit un but purement esthétique, contribue par cela même à créer une langue plus propre à satisfaire le physicien.» [Poincaré 1905, 105]

Selon lui, les mathématiques sont nécessaires au physicien dans la mesure où elles sont la seule langue qu'il puisse parler[5]. Et, comme tout langage, elles seront d'autant plus performantes, utiles, qu'elles seront riches, nuancées et précises. Ainsi, travailler les mathématiques avec un but esthétique, c'est-à-dire en les considérant pour elles-mêmes, sans considérer leur utilité pratique, ni leurs applications, mais en tâchant de déceler les analogies, de mettre en valeur les symétries, contribue à enrichir le langage qu'elles sont pour le physicien et à le lui rendre plus opérant [6]. Cette interprétation est rendue possible par l'adoption du présupposé méthodologique selon lequel les mathématiques sont le seul accès que nous ayons à l'harmonie universelle.

4 Cf. [Poincaré 1905, 104]

5 Cf. [Poincaré 1905, 105]

6 Cette idée selon laquelle travailler les mathématiques dans un but esthétique élargit le champ de leur application est relativement fréquente; on peut citer par exemple Dirac : «La méthode la plus puissante que l'on puisse suggérer à présent en vue de progresser est d'employer toutes les ressources des mathématiques pures en cherchant à perfectionner et généraliser le formalisme mathématique qui constitue la base de la physique théorique, et après chaque succès dans cette direction, il s'agit d'essayer d'interpréter les nouveaux éléments mathématiques en termes d'entités physiques.» Cité selon Pais in [Pais 1998, 34] Lorsqu'il s'agit de parler de l'importance de la beauté des mathématique, Dirac est fréquemment cité pour avoir écrit: *"it is more important to have beauty in one's equations that to have them fit experiment."*. Il ne faut pas cependant en déduire que pour Dirac, la beauté d'un résultat mathématique l'emporte sur son aptitude à décrire le réel. En effet, ce n'est pas aux dépens de la vérité comme adéquation au réel qu'il faille sacrifier à la beauté, seulement Dirac considère que la beauté est un critère qui conduit à faire confiance aux résultats qui en sont parés: « Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important d'avoir de la beauté dans ses équations plutôt que de les faire correspondre à l'expérience. Si Schrödinger avait été plus confiant en ses travaux, il aurait pu les publier quelques mois plus tôt, et il aurait pu publier une équation plus précise [...]. Il semble que si l'on travaille en cherchant la beauté dans son équation, et en ayant vraiment une vision profonde, alors on est en bonne voie pour progresser. S'il n'y a pas un accord complet entre les résultats et l'expérience, on ne devrait pas trop se décourager, car la divergence peut très bien être due à des traits mineurs qui ne sont pas correctement pris en compte et elle pourra se résorber avec les développements ultérieurs de la théorie.» [Dirac 1963, 47]

De plus, Poincaré explique que seul l'esprit mathématique peut déceler les analogies véritables et fécondes:

> «Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine?
>
> C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure. C'est lui qui nous a enseigné à nommer du même nom des êtres qui ne diffèrent que par la matière (…)
>
> Voilà les services que le physicien doit attendre de l'analyse, mais pour que cette science puisse les lui rendre, il faut qu'elle soit cultivée de la façon la plus large, sans préoccupation immédiate d'utilité, il faut que le mathématicien ait travaillé en artiste.
>
> Ce que nous lui demandons, c'est de nous aider à voir, à discerner notre chemin dans le dédale qui s'offre à nous. Or, celui qui voit le mieux, c'est celui qui s'est élevé le plus haut.» [Poincaré 1905, 106]

Le service qu'attend le physicien des mathématiques est qu'elles lui fournissent les moyens de généraliser, d'établir des lois à partir d'expériences, de répertorier sous un même registre des phénomènes qui sans l'analyse purement mathématique n'auraient pu être rapprochés. L'injonction de Poincaré (il faut que le mathématicien travaille en artiste) correspond à la condition nécessaire pour rendre les mathématiques opérantes sur le plan de leurs applications externes. Il faut pour comprendre cela examiner ce que signifie pour l'auteur travailler en artiste, de même qu'il faut fournir une interprétation de ce que sont pour Poincaré les analogies véritables.

La métaphore du dédale utilisée dans cette citation permet de relier la directive en question (travailler en artiste) avec l'idée de s'élever à un ordre supérieur afin de dépasser un point de vue purement extensionnel et de retrouver l'unité sous la variété. Cette idée est récurrente dans les textes de Poincaré, on la retrouve notamment dans l'article «Nature du raisonnement mathématique»:

> «Pour qu'une construction puisse être utile, pour qu'elle ne soit pas une vaine fatigue de l'esprit, pour qu'elle puisse servir de marchepied à qui veut s'élever plus haut, il faut d'abord qu'elle possède une sorte d'unité, qui permette d'y voir autre chose que la juxtaposition de ses éléments.
>
> Ou plus exactement, il faut qu'on trouve quelque avantage à considérer la construction plutôt que ses éléments eux-mêmes.
>
> (…) Une construction devient donc intéressante que quand on peut la ranger à côté d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre.» [Poincaré 1902, 44]

Une construction n'est probante que dans la mesure où elle permet de mettre en lumière le schème qui la sous-tend (ce que l'on peut traduire en disant qu'il faut qu'elle réponde au principe de l'unité dans la variété). Travailler en artiste c'est découvrir le schème, ou la structure qui relie et unifie les différents éléments. Le mathématicien qui ne travaille pas en artiste reste à un niveau analytique, il calcule étape par étape sans se placer sous une perspective d'ordre. Or, ce qui est fécond dans les constructions mathématiques, c'est justement le schème. On comprend alors pourquoi pour Poincaré *il faut* travailler en artiste.

L'intérêt d'une construction est de pouvoir la ranger avec d'autres à partir d'une comparaison entre schèmes généraux, puisqu'il ne s'agit pas de considérer les éléments même de la construction. C'est donc le schème (la forme pure) qui offre de relier entre elles différentes constructions et par suite, des faits épars. J'en viens alors à l'idée d'analogie véritable: l'interprétation que je propose pour expliquer ce que signifie que d'être une analogie véritable est que Poincaré distingue par ce qualificatif les analogies qui portent sur les éléments d'une construction effective au niveau des objets (analogie simple, que l'œil peut distinguer) de celles qui portent sur le schème général, la forme ou la structure de la construction (analogie véritable et profonde, que seule la raison peut voir).

L'argumentation poincaréenne pour montrer que le but esthétique est solidaire du but physique se fait en deux temps:

1) viser la beauté (travailler en artiste) est ce qui permet de rendre les mathématiques plus fines, plus précises, et de mettre en valeur l'unité dans la variété de l'ensemble des constructions mathématiques;
2) viser la beauté c'est donc se donner les moyens de rendre à la physique les services qu'elle attend des mathématiques. Autrement dit, la démarche esthétique en mathématiques facilite l'obtention d'un but physique.

Ce raisonnement n'est valable que dans la limite de l'adoption des deux présupposés. J'ai déjà mentionné le rôle du présupposé méthodologique, qu'en est-il alors du rôle du présupposé métaphysique? Ce dernier intervient lorsqu'il s'agit de s'assurer que la recherche de la beauté ne détourne pas les mathématiques de leur rôle fondamental: celui de décrire l'harmonie de la nature (présupposée par Poincaré)[7]. En effet, le lien examiné jusqu'à présent entre le but esthétique et le but physique montre que le premier n'empêche pas les mathématiques de satisfaire à l'exigence d'utilité externe (but physique) mais au contraire que cette dernière lui est redevable. Dans la solution poincaréenne, qui adopte de surcroît le principe métaphysique suivant lequel c'est la nature qui fournit le modèle de toute beauté, il est aussi possible de montrer que fixer la beauté comme but des mathématiques ne nuit pas à l'exigence de vérité: «Il n'y a pas à craindre que cette préoccupation instinctive et inavouée (la recherche de la beauté) ne détourne le savant de la recherche de la vérité. On peut rêver un monde harmonieux, combien le monde réel le laissera loin derrière lui; les plus grands artistes qui furent jamais, les Grecs, s'étaient construits un ciel; qu'il est mesquin auprès du vrai ciel, du nôtre.» [Poincaré 1908, 23]

Le plaisir des sens que procure la nature nous fait voir le modèle mathématique, qui est, au niveau scientifique, l'expression de l'harmonie structurelle. Chez Poincaré, la beauté peut être sentie au niveau du plaisir (perception sensorielle) mais c'est seulement au niveau de la théorie qu'elle peut être décrite (perception intellectuelle).

On remarquera enfin que l'étape 1 (correspondant à l'injonction: il faut travailler en artiste) montre, en même temps que la cohérence entre la beauté et l'utili-

7 Dans l'article *"Aesthetics in Science and in Art"*, Engler défend la thèse suivant laquelle la confiance que mettent les scientifiques (en particulier ceux qui s'occupent de mathématiques appliquées) en la beauté de leurs théories exprime en fait la croyance suivant laquelle ce que l'esprit trouve beau doit avoir une application dans la nature :
«[...] Ces scientifiques expriment essentiellement la croyance dans le fait que ce que l'esprit perçoit comme beau trouve sa réalisation dans la nature, c'est-à-dire que la beauté d'une théorie scientifique implique sa vérité.»[Engler 1990, 24]
D'après l'auteur, cette confiance dans la beauté traduit un retour à une forme de pythagorisme :
«Il mérite d'être noté que ces scientifiques [ceux qui font confiance à la beauté mathématique] manifestent une attitude ancienne, comme l'a noté le philosophe Bertrand Russel: "la chose la plus étrange dans la science moderne est peut-être son retour au Pythagoricisme" En effet, la conception Pythagoricienne, qui est devenue depuis lors une pierre angulaire de la science, était que les problèmes en sciences de la nature cèdent souvent devant l'hypothèse selon laquelle le monde naturel a certaines caractéristiques esthétiques et formelles, et que les processus naturels possèdent par conséquent harmonie, symétrie et simplicité. Une autre caractéristique Pythagoricienne que ces scientifiques manifestent est leur perception de l'importance des mathématiques dans la description de la nature;[Idem]
Le point particulièrement intéressant de cet article est que l'auteur affirme qu'au-delà d'un retour à un point de vue pythagoricien, la foi en la beauté mathématique trahit surtout, d'après lui, une croyance métaphysique : la nature est belle. C'est cette croyance métaphysique qui est à la base du rôle attribué à la beauté mathématique (cf. [Engler1990, 31]).
Pour plus de détails, on pourra lire [Engler 1990, 24-34].

té externe des mathématiques, le rôle que joue l'attrait esthétique à un niveau plus formel, celui de l'utilité interne. Puisque Poincaré indique que seules les constructions possédant les critères esthétiques sont opérantes à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes, il s'ensuit que ce sont les combinaisons esthétiques qui offrent une utilité interne. Ce sont elles qui avant de rendre service à la physique, permettent les progrès des mathématiques. Ce dernier point suggère qu'au sein de la solution poincaréenne, la beauté n'est pas seulement une finalité mais aussi une méthode de travail.

CONCLUSION

A l'intérieur du cadre conceptuel délimité par l'adoption des deux présupposés, la solution de Poincaré est cohérente. Cependant, il faut souligner une tension entre la position non réaliste de Poincaré vis-à-vis des mathématiques et sa position réaliste classique quant à l'esthétique de la nature. Cette tension peut poser des problèmes notamment en ce qui concerne l'interprétation de la conception poincaréenne de la beauté. Kivy, par exemple, à cause du non réalisme de Poincaré, affirme que celui-ci, lors qu'il parle de beauté de la nature, parle en fait de la beauté des mathématiques:

«Poincaré parle de la beauté de la nature. Mais je pense que ce dont il est vraiment question est la beauté de la représentation scientifique de la nature. Il est bien sûr possible que quelqu'un puisse distinguer, dans un portrait par exemple, la beauté du modèle de la beauté de la représentation car l'on peut contempler le modèle aussi bien que sa représentation. Nous ne pouvons pas de manière similaire, contempler (par exemple) la théorie générale de la relativité puis, si le coeur nous en dit, contempler les aspects de la nature qui sont ses «modèles». Tout ce que nous avons du modèle est le modèle *tel qu'il est représenté* par la théorie. Ainsi lorsque, comme le dit Poincaré, l'intelligence scientifique saisie la beauté intime qui vient de l'ordre harmonieux de la nature, nous devons comprendre cela comme saisir la théorie qui représente cet ordre et nous le fait découvrir. En science nous pouvons seulement contempler la représentation de la belle nature, non la belle nature en elle-même. Dire que nous contemplons la nature revient à dire que nous contemplons la théorie.» [Kivy 1991, 189]

Pour Kivy, tout ce que nous pouvons dire ou apprendre de la nature, nous ne pouvons le dire ou l'apprendre qu'à propos de la nature représentée par une théorie. Par conséquent, l'appréciation esthétique de la nature est de fait l'appréciation esthétique du modèle scientifique représentant la nature. Si ce dernier point s'avère intéressant, il semble par contre trahir les propos de Poincaré. En effet, Poincaré ne suggère nullement que le mérite esthétique d'une théorie puisse être autre chose que celui de la nature, cédé par une sorte de procuration. Si les mathématiques ont une valeur esthétique, ce n'est que parce qu'elles offrent la description de l'harmonie structurelle de la nature (elle-même présupposée par Poincaré).

Néanmoins, la problématique impliquée par cette citation est la suivante: fait-il sens de parler d'une esthétique non formelle (d'une esthétique du contenu) des mathématiques dans la mesure où leur contenu (leur signification) est lui-même contenu dans les mathématiques, au sens où il est entièrement dépendant des mathématiques elles-mêmes?[8]

En effet, dans le cas de la solution poincaréenne, il est légitime de parler d'une esthétique non formelle: ce

8 Pour beaucoup d'auteurs, l'esthétique des mathématiques ne peut être qu'une esthétique formelle, bien que la problématique en question ne soit pas évoquée (lire par exemple [Engler, 1994, 207]).

ne sont pas les traits formels, les aspects syntaxiques d'une théorie mathématique qui contribuent à son mérite esthétique mais c'est ce qu'elle représente, ce qu'elle permet de saisir de la réalité (l'harmonie de la nature), qui participe et accroît son potentiel esthétique. Une théorie mathématique, considérée sans sa signification vis-à-vis de la réalité physique a peu de chance de charmer Poincaré. Il explique que la nature est, pour le mathématicien comme pour le peintre, source d'inspiration. Plus encore, il écrit que le mathématicien ne peut se passer de cette source, au risque de voir sa créativité s'épuiser et de n'élaborer que des théories stériles et sans cohérence[9]. Cela ne signifie pas que Poincaré néglige ou suppose que l'on ne puisse se passer d'étudier les mathématiques pures, celles qui ne sont pas directement développées en vue des applications pratiques. Cela signifie que les mathématiques, en dehors de leur rapport à la réalité, ne portent pas en elles-mêmes les traits et les aspects qui leur confèrent et leur valeur intellectuelle et leur mérite esthétique.

Le problème est donc le suivant: peut-on parler d'esthétique du contenu dès lors que le contenu, disons le potentiel cognitif, est entièrement lié au média – ici la théorie mathématique ? Si l'on n'a pas d'autre moyen de rendre compte de la réalité physique, si le seul accès envisageable aujourd'hui est la mathématique, comme le conçoit Poincaré, comment être certain que la valeur esthétique d'une théorie ne soit pas la sienne propre, celle qui provient de sa symbolique et de l'interprétation que l'on en fait ? Puisque tout ce que l'on peut saisir de la réalité des phénomènes naturels, évidemment dans le cas où l'on se situe sous la perspective en question, passe par la lunette mathématique, que peut-on finalement connaître du modèle si ce n'est son interprétation mathématique ? La réalité, au sens de Poincaré, n'a donc de sens pour nous qu'au travers de son interprétation mathématique. Comment pouvons-nous alors savoir que la nature est belle (il ne s'agit pas dans ce contexte de la nature accessible à la perception quotidienne mais de la réalité du monde physique, des phénomènes naturels) si tout ce que nous savons d'elle, nous le savons par les mathématiques ? La difficulté s'évanouit si l'on tient compte du fait que Poincaré présuppose la beauté de la nature. La relation entre la beauté de la nature et celle des mathématiques est basée sur une double démarche occasionnaliste: l'expérience fournit l'occasion de fixer une théorie et d'appréhender les critères esthétiques. La confrontation de la théorie avec la réalité fournit en retour l'occasion de l'affiner, par une nouvelle expérience par exemple, ainsi que d'affiner les critères esthétiques. La théorie mathématique possède donc en propre les propriétés esthétiques, mais ces dernières ont été établies selon le modèle de beauté que fournit (par occasion) la nature (en inventant les mathématiques, on découvre les attributs de la beauté).

En présupposant la beauté de la nature, Poincaré évite l'écueil du cercle vicieux annoncé par Kivy.

Ainsi, dans le cas de la solution poincaréenne, ce n'est pas la beauté effective des mathématiques qui est transportée sur la nature, comme le dit Kivy, mais c'est la beauté présupposée de la nature qui est transportée sur les mathématiques.

9 Cf. [Poincaré 1905, 109]

BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE. *Métaphysique*. Traduction anglaise, introduction et commentaires par W. D. Ross, volume II, Oxford: Oxford University Press 1924.

ARISTOTE. *La Poétique*. Traduction française, introduction et notes par Barbara Gernez, Paris: les Belles Lettres 2001.

DIRAC, PAUL A. M. 1963. The Evolution of the Physicist's Picture of Nature, *Scientific American* 208: 45-53.

ENGLER, GIDEON A. 1990. Aesthetic in Science and in Art, *The British Journal of Aesthetic* 30 (1): 24-34.

ENGLER, GIDEON A. 1994. From Art and Science to Perception: the Role of Aesthetics, *Leonardo* 27: 207-209.

KIVY, PETER. 1976. *The Seventh Sense, A Study of Francis Hucheson's Aesthetics and its Influence in Eighteenth-Century Britain*, New York: Burt Franklin & Co. Inc. 1976.

KIVY, PETER. 1991. Science and Aesthetic Appreciation, *Midwest Studies in Philosophy*, XVI, 180-195.

OSBORNE, HAROLD. 1986. Symmetry as an Aesthetic Factor, *Computer and Mathematics with Applications* 12B (1/2): 77-82.

PAIS, ABRAHAM. 1998. Paul Dirac, Aspects of his Life and Work, in Pais A. Jacob m., Olive d. Atiyah M. *Paul Dirac, The Man and his Work*, Cambridge: Goddard 1998.

PLATON. *Le Banquet*, traduction française, notices et notes par Emile Chambry, Paris: Garnier-Flammarion 1964.

POINCARÉ, HENRI. 1902. *La Science et l'hypothèse*, Paris: Flammarion 1968.

POINCARÉ, HENRI. 1905. *La Valeur de la science*, Paris: Flammarion 1970.

POINCARÉ, HENRI. 1908. *Science et méthode*, Paris: Kimé 1999.

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)
TOMO XV, AGOSTO DE 2012

LE PROBLÈME MATHÉMATIQUE DES CARTES GÉOGRAPHIQUES AU 19e SIÈCLE

PHILIPPE NABONNAND*

Université de Nancy – Archives Henri Poincaré (UMR 7117 du CNRS).
Email: Philippe.Nabonnand@univ-nancy2.fr.

MATHÉMATIQUES ET CARTES GÉOGRAPHIQUES

Mots clés : Théorie mathématique des cartes géographiques, géométrie infinitésimale, Gauss, Liouville, Bonnet.

SYNOPSIS

Dans une première partie de cet article, on s'intéresse à l'article de Gauss, publié en 1822, sur la question de la projection conforme entre surfaces. Dans une seconde partie, la réception de cet article est étudiée à travers les travaux de Jacobi, Liouville et Bonnet.

EL PROBLEMA MATEMÁTICO DE LAS CARTAS GEOGRÁFICAS EN EL SIGLO XIX

MATEMÁTICA Y CARTAS GEOGRÁFICAS

Palabras clave: Teoría matemática de los mapas, geometría infinitesimal, Gauss, Liouville, Bonnet.

SINOPSIS

En la primera parte de este artículo, nos centramos en el texto de Gauss, publicado en 1822, sobre el tema de la proyección conforme entre superficies. La segunda parte esta dedicada a la recepción de este texto estudiada a través de los trabajos de Jacobi, Liouville y Bonnet.

* Je remercie le rapporteur anonyme dont les remarques et les suggestions ont permis d'améliorer une première version de ce travail.
* Je remercie Nicolas Andruskiewitsch et Dominique Flament de m'avoir invité à la deuxième école conceptuelle de mathématiques (23-27 novembre 2010 - Cordoba).

La théorie mathématique des cartes géographiques est présentée à la fin du 19e siècle comme un des problèmes structurants de la géométrie infinitésimale[1]. À la suite des travaux du 18e siècle[2], la question de représenter une surface sur une autre en conservant les angles ou ce qui est équivalent en assurant « la similitude des éléments infiniment petits qui se correspondent sur les deux surfaces[3] ». Par exemple, dans sa notice sur la vie et l'œuvre de Gaston Darboux, lue devant l'académie des sciences de Paris le 10 décembre 1917, Émile Picard signale l'intérêt de ce dernier pour le problème mathématique des cartes géographiques :

> Il [Darboux] voulait écrire un livre sur un problème qui a joué un grand rôle dans le développement de la géométrie infinitésimale, celui des cartes géographiques. Tout à la fois, l'élégance et l'importance pratique de cette question célèbre le séduisaient. [Picard 1922, 106]

En effet, dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Darboux évoque déjà le problème des cartes géographiques en l'associant à la question des systèmes orthogonaux et isothermes :

> La théorie des coordonnées symétriques et des systèmes isothermes, qu'on peut faire remonter au premier Mémoire de Gauss, publié en 1825, doit son origine à l'étude d'une belle question de Géométrie pratique, celle du tracé géographique d'une surface sur une autre, et plus particulièrement sur le plan. La théorie des Cartes géographiques avait été l'objet d'importants travaux de Lambert, d'Euler, de Lagrange. Comme il est impossible de représenter une portion de la sphère, ou de tout autre surface non développable sur le plan, de manière à conserver les longueurs des arcs, on s'était surtout attaché aux modes de représentation qui conservent les angles, tels que la projection stéréographique, la projection de Mercator. Ces modes de représentation ont la propriété fondamentale d'établir la similitude des éléments infinimet petits qui se correspondent sur les deux surfaces. [Darboux 1887, 214]

S'il n'oublie pas de citer les travaux initiaux de Lambert, Euler et Lagrange, Darboux donne pour origine à la théorie mathématique des cartes géographiques le mémoire publié par Carl Friedrich Gauss [1825] sur la représentation conforme d'une surface sur une autre. Cette opinion n'est pas nouvelle, puisque tout au long du 19e siècle, les géomètres qui reprennent cette question situent leurs travaux par rapport à cet article de Gauss qui apparait ainsi comme fondateur. Darboux insiste sur ce point dans sa conférence au congrès international des mathématiciens à Rome de 1908 :

> Cette belle question [la théorie mathématique des cartes géographiques] qui donna naissance à des recherches de Lambert lui-même, d'Euler et à deux Mémoires très importants de Lagrange, fut traitée pour la première fois par Gauss dans toute sa généralité. [Darboux 1908, 106-107]

Darboux poursuit sa conférence en signalant que la question des coordonnées orthogonales et isothermes fait dans le même temps l'objet de l'attention de l'école issue des travaux de Monge et des géomètres qui s'intéressent à la géométrie infinitésimale de l'ellipsoïde.

Si dans les discours présentant les résultats de la géométrie des surfaces, la question des cartes géographiques est souvent mise en exergue, elle n'est pas pour autant clairement identifiée dans les répertoires bibliographiques : par exemple, dans l'*index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques*[4], les contributions à ce problème sont dispersées dans les classes répertoriant la géométrie infinitésimale en

1 Voir par exemple l'article de Gaston Darboux [1908].
2 On peut, entre autres, citer les contributions de Lambert, Euler et Lagrange.
3 [Darboux 1887], 214.
4 Commission Permanente du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques, Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, Paris: Gauthier-Villars, 1893.
Pour plus de précisions sur le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, voir [Rollet & Nabonnand 2002].

général ou dans celles consacrées aux courbes sur l'espace ; quelques-unes seulement sont référenciées dans la classe « cartes géographiques » relevant de la géodésie. De même, dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, les différents travaux s'intéressant à cette question relèvent des classes concernant la théorie générale des surfaces, la représentation conforme ou la géodésie.

L'objet de cet article est de reconstruire les fils thématiques décrits par Darboux en insistant sur les manières dont les différents acteurs situent leurs contributions par rapport au champ qui se constitue de la géométrie infinitésimale et à la question des applications pratiques.

1. L'ARTICLE FONDATEUR DE GAUSS

Le problème de la projection conforme[5] d'une surface sur une autre intéresse Gauss depuis au moins 1816 puisqu'il suggère à son ami Heinrich Christian Schumacher de choisir ce problème comme question au prix de société des sciences de Copenhague.

> Das programm mit der Preisfrage Ihrer Societät ist mir noch nicht zu Gesichte gekommen. Mit Lindenau habe ich auch über eine Preisfrage conferirt, die in der neuen Zeitschrift mit dem Preisen von 100 Ducaten aufgegeben werden soll. Mir war eine interesante Aufgabe eingefallen, nämlich : « Allgemein eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projiciren (abzubilden), dass das Bild dem Original in den kleinsten Theilen ähnlich werde .»
>
> Ein specieller Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorische Projectionen particuläre Auflösungen. Man will aber die allgemeine Auflösung, worunter alle particulären begriffen sind, für jede Arten von Flächen. [Gauss, Lettre à Schumacher, 5 juillet 1816, *Werke* 8, 370]

La proposition de Gauss est retenue puisque le concours de 1822 reprend la question de « représenter les parties d'une surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original dans les parties infiniment petites ». Le lauréat en sera Gauss lui-même qui propose une solution générale qu'il applique ensuite à divers cas particulier. Gauss ne fait aucune allusion aux travaux de ces prédécesseurs qui certes ne s'intéressaient qu'à la projection conforme sur un plan.

Gauss désigne respectivement par $x(t, u), y(t, u), z(t, u)$ et $X(T, U), Y(T, U), Z(T, U)$ des paramétrages de la première surface et de la seconde surface. Les éléments linéaires respectifs des deux surfaces s'écrivent

$$(a^2 + b^2 + c^2)\, dt^2 + 2(aa' + bb' + cc')\, dtdu + (a'^2 + b'^2 + c'^2)\, du^2$$

et

$$(A^2 + B^2 + C^2)\, dT^2 + 2(AA' + BB' + CC')\, dTdU + (A'^2 + B'^2 + C'^2)\, dU^2$$

où l'on a posé $\begin{cases} dx = adt + a'du \\ dy = bdt + b'du \\ dz = cdt + c'du \\ dX = Adt + A'du \\ dY = Bdt + B'du \\ dZ = Cdt + C'du \end{cases}$

La condition que « la représentation soit semblable à l'original dans les parties les plus petites » se traduit par une condition de proportionnalité entre les coefficients des éléments linéaires des surfaces :

5 Dans le mémoire publié en 1825 dans le Journal astronomique de Schumacher, Gauss n'utilise pas le terme « conforme ». Il l'utilise dans un article tardif sur la pratique de la géodésie [Gauss 1844] dans lequel il déclare vouloir dénommer les applications qui conservent les angles « dans les parties infiniment petites » :
[…] j'appellerai celles-ci des représentations ou des applications conformes en même temps que je donne à cet adjectif vague une signification mathématiquement rigoureusement déterminée. [Gauss 1844, 262]

> La condition prescrite exige premièrement que toutes les lignes infiniment petites issues d'un point de la première surface et situées sur cette surface soient proportionnelles aux lignes correspondantes sur la deuxième surface, et deuxièmement que les premières lignes en question comprennent entre elles les mêmes angles que les secondes. [Gauss 1825, 3]

Ces deux conditions se traduisent par l'équation :

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{AA'+BB'+CC'}{aa'+bb'+cc'}=\frac{A'^2+B'^2+C'^2}{a'^2+b'^2+c'^2}=m^2 \quad (1)$$

où m est une fonction de t, u.

Gauss distingue alors trois problèmes : le problème général où m est « différent suivant les lieux », celui où m est constant et les surfaces semblables « même dans les parties finies » et celui où $m = 1$ et les surfaces applicables l'une sur l'autre.

Le problème général étant posé, Gauss s'intéresse au moyen de simplifier l'expression des métriques. Pour cela il raisonne de manière purement analytique et utilise la propriété selon laquelle l'équation différentielle

$$\omega = (a^2 + b^2 + c^2)\, dt^2 + 2(aa' + bb' + cc')\, dtdu + (a'^2 + b'^2 + c'^2)\, du^2 = 0$$

admet deux intégrales premières que l'on obtient en décomposant le « trinôme en deux facteurs linéaires par rapport à dt et du ». Il obtient deux équations conjuguées

$$(a^2+b^2+c^2)dt + \Big[(aa'+bb'+cc') + i\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2}\Big]du = 0$$

et

$$(a^2+b^2+c^2)dt + \Big[(aa'+bb'+cc') - i\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2}\Big]du = 0.$$

En posant $p + iq = C^{te}$ et $p - iq = C^{te}$ les deux intégrales premières de l'équation $\omega = 0$ qu'il obtient grâce à la décomposition ci-dessus, Gauss montre que la métrique s'écrit avec le nouveau paramétrage :

$$\omega = n(dp^2 + dq^2) \qquad (2)$$

où n est une fonction de t et u.

De même, la métrique Ω de la seconde surface peut s'écrire sous la forme

$$\Omega = N(dP^2 + dQ^2) \qquad (2)$$

où N est une fonction de T et U. L'équation (1) du problème s'écrit alors :

$$\frac{(dP+idQ)(dP-idQ)}{(dp+idq)(dp-idq)}=\frac{m^2n}{N} \qquad (3)$$

Gauss utilise alors un argument de type algébrique et affirme que le numérateur sera divisible par le dénominateur si les facteurs sont divisibles deux à deux, c'est-à-dire qu'à la condition que $dP + idQ$ soit divisible par $dp + idq$ et $dP - idQ$ par $dp - idq$ ou que $dP + idQ$ soit divisible par $dp - idq$ et $dP - idQ$ par $dp + idq$. Il en déduit en intégrant que dans le premier cas, $P + iQ$ est fonction de $p + iq$ et $P - iQ$ de $p - iq$, et que dans le second cas, $P + iQ$ est fonction de $p - iq$ et $P - iQ$ de $p + iq$.

Il termine son raisonnement en montrant que les fonctions qui apparaissent dans le calcul ci-dessus sont nécessairement conjuguées entre elles[6]. En effet, si

$$P + iQ = f(p + iq),\; P - iQ = f_1(p - iq)$$

alors f et f_1 sont conjuguées et donc P est la partie réelle d'une fonction f (holomorphe) arbitraire et iQ sa partie imaginaire. Il ajoute que tout changement de paramétrage donne d'autres solutions :

6 Gauss admet implicitement que les fonctions qu'il manipule sont analytiques.

Bien que la résolution du problème ne gagne rien ainsi en généralité, néanmoins il sera parfois plus commode dans les applications d'employer tantôt l'une, tantôt l'autre de ces formes. [Gauss 1825, 8]

Gauss différencie la question de la généralité d'une solution du point de vue des mathématiques et celle de la commodité d'une expression lors des applications[7].

Avec les notations précédentes et en posant

$$df(v) = \varphi(v)dv,\ df_1(v) = \varphi_1(v)dv,$$

la formule (3) s'écrit

$$\frac{m^2 n}{N} = \varphi(p+iq)\varphi_1(p-iq)$$

d'où une expression du coefficient d'agrandissement

$$m = \sqrt{\frac{dp^2+dq^2}{\omega}\,\frac{\Omega}{dP^2+dQ^2}\,\varphi(p+iq)\varphi_1(p-iq)}.$$

À ce stade, Gauss considère que la solution générale du problème est achevée et propose de la décliner en quelques exemples. Il suit de nouveau son propos de dialectique entre solution théorique et applications :

Nous allons maintenant éclaircir notre solution générale à l'aide de quelques exemples, aussi bien en vue de mettre en pleine lumière le mode d'application que de faire encore ressortir la nature de quelques faits qui se présentent. [Gauss 1925, 9]

Le premier exemple abordé par Gauss est celui deux plans que l'on applique l'un sur l'autre. Dans ce cas, en reprenant les mêmes notations et en repérant les plans avec des coordonnées orthonormées telles que

$$x = t, \qquad y = u, \qquad z = 0$$
$$X = T, \qquad Y = U, \qquad Z = 0$$

on obtient

$$dX + idY = \varphi(x+iy)(dx+idy) = (\xi + i\eta)(dx+idy)$$
$$dX - idY = \varphi(x-iy)(dx-idy) = (\xi - i\eta)(dx-idy) \quad (4)$$

Gauss décrit alors la multiplication par $\xi + i\eta$ comme représentant une similitude opérant sur des éléments linéaires. Pour cela, il pose

$$\xi = \sigma\cos\gamma, \qquad \eta = \sigma\sin\gamma,$$
$$dx = ds\,\sigma\cos g, \qquad dy = ds\,\sigma\sin g,$$
$$dX = dS\,\sigma\cos G, \qquad dY = dS\,\sigma\sin G.$$

ds représente un élément linéaire sur le premier plan, g son inclinaison sur l'axe des abscisses, dS l'élément linéaire correspondant sur le second plan et G son inclinaison sur les axes des abscisses. [Gauss 1825, 11]

Avec ces notations, la première des équations précédentes (4) peut s'écrire

$$dS\cos G = \sigma\,ds\cos(g+\gamma)$$
$$dS\sin G = \sigma\,ds\sin(g+\gamma)$$

d'où

$$dS = \sigma\,ds \qquad G = g + \gamma$$

Gauss fait apparaître aussi σ comme rapport de similitude et montre que les angles sont conservés :

On voit par conséquent que σ représente le rapport d'agrandissement de l'élément ds sur la représentation ds, et qu'il est, comme cela doit être, indépendant de g ; de même le fait que l'angle γ est indépendant de g montre que tous les éléments linéaires issus d'un point sur le premier plan seront représentés par des éléments sur le second plan, formant entre eux les mêmes angles que les premiers et, nous pouvons ajouter, *dans le même sens*. [Gauss 1825, 11]

7 Le *Nachlaß* de Gauss comporte des études pratiques (qui datent pour l'essentiel de cette époque) sur la projection d'un sphéroïde elliptique sur une sphère, sur la projection stéréographique de la sphère sur le plan, sur la projection de Mercator, sur la projection stéréographiqe du sphéroïde sur le plan. [Gauss, *Nachlaß*, 107-134]

Gauss précise que si l'on étudie la seconde équation on obtient la similitude[8] inverse. Il termine son article en prouvant que l'analyse de la démonstration du problème général montre que « dans une des solutions les parties de la représentation ont une position semblable à celle de l'original, et qu'au contraire dans l'autre elles sont placées inversement » à condition bien sûr de choisir une orientation de l'espace.

Gauss termine l'étude en montrant que les seules fonctions pour lesquelles ce résultat est global, autrement dit celles pour lesquelles le rapport de similitude est constant, sont les fonctions affines à coefficients complexes. Il ajoute qu'en utilisant une interpolation, on obtient facilement une fonction qui assignent à certains points du premier plan leur représentation[9]. Ce résultat, précise-t-il peut avoir des applications concrètes :

> On peut appliquer utilement cette méthode dans la géodésie pour améliorer une carte faite sur des mesures médiocrement exactes, bonne dans les petits détails mais qui en grand est légèrement déformée, lorsqu'on connaît la position exacte d'un certain nombre de points. Il va sans dire que l'on ne peut guère sortir des régions qui entourent ces points. [Gauss 1825, 12]

Après avoir étudié le cas le simple, Gauss étudie alors plusieurs exemples plus généraux : les représentations d'un cône droit, d'une sphère, d'un ellipsoïde de révolution sur le plan, puis celle de la surface de l'ellipsoïde de révolution sur la sphère.

Pour chaque exemple, il calcule la métrique induite sur la surface et détermine deux intégrales de l'équation différentielle associée. Ainsi dans le cas de la projection d'une sphère sur le plan, à partir du paramétrage classique de la sphère

$$x = a \cos t \sin u$$
$$y = a \sin t \sin u$$
$$z = a \cos u,$$

Il en déduit l'expression de la métrique :

$$\omega = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + a^2 \, du^2.$$

La décomposition de l'équation $\omega = 0$ conduit à deux équations différentielles du premier ordre

$$dt \mp i \frac{du}{\sin u} = 0\,,$$

qui donnent lieu à deux intégrales :

$$t \pm i \log \text{ cotang} \frac{1}{2} u = \text{ Const.}$$

La solution générale de la question de projeter de manière conforme la sphère sur un plan consiste donc à prendre X comme la partie réelle et Y comme la partie imaginaire de

$$f\left(t + \pm i \log \text{ cotang} \frac{1}{2} u\right)$$

où f est une fonction arbitraire[10].

Si l'on choisit f linéaire ($f(x) = kx$), alors

$$X = dt, \qquad Y = k \log \text{cotang } \frac{1}{2} u$$

soit, en considérant que t représente la longitude et $90° - u$ la latitude, Gauss retrouve la projection de Mercator. Lorsque l'on choisit f sous la forme d'une exponentielle imaginaire[11] ($f(x) = ke^{ix}$), la solution s'écrit

8 Gauss utilise le terme *« Aehnlichkeit »*.
9 Ossian Bonnet reprendra cette question.
10 *f* est bien entendu implicitement supposée dérivable.
11 Gauss utilise l'expression *« eine imaginäre Exponentialfunction »*.

$$X = k \tan \frac{1}{2} u \cos t, \quad Y = k \tan \frac{1}{2} u \sin t,$$

formules dans lesquelles on reconnaît la projection stéréographique.

Gauss étudie le cas plus général dans lequel la fonction est de la forme $f(x) = ke^{i\lambda x}$ et donc

$$X = k \tan^{\lambda} \frac{1}{2} u \cos t, \quad Y = k \tan^{\lambda} \frac{1}{2} u \sin t.$$

Si Gauss utilise des techniques purement analytiques, il prend néanmoins le soin de donner des descriptions géométriques des projections qu'il obtient et d'en souligner l'intérêt pratique :

> On voit qu'ici la représentation de tous les points pour lesquels u est constant se fait le long d'une circonférence, et la représentation de tous les points pour lesquels t est constant le long d'une droite, et, de plus, que les circonférences correspondent à toutes les différentes valeurs de u sont concentriques. Ceci fournit pour les cartes une projection très utile lorsqu'il ne s'agit que de représenter une partie de la sphère, et ce qu'il y a alors de mieux à faire c'est de choisir λ tel que le rapport d'agrandissement soit le même pour les valeurs extrêmes de u, de telle sorte qu'il prend ainsi sa plus petite valeur vers le milieu[12]. [Gauss 1825, 17]

Gauss termine son article en évoquant un exemple « d'une utilité extrême en géodésie supérieure », celui de la représentation d'un ellipsoïde de révolution sur une sphère[13]. Si l'on écrit les équations de l'ellipsoïde sous la forme

$$x = a \cos t \sin u$$
$$y = a \sin t \sin u$$
$$z = a \cos u,$$

et celles de la sphère sous la forme

$$X = A \cos T \sin U$$
$$Y = A \sin T \sin U$$
$$Z = A \cos U,$$

l'application de la méthode générale conduit à « poser T égal à la partie réelle et

$$i \log \operatorname{cotang} \frac{1}{2} \omega \left(\frac{1 - \varepsilon \cos \omega}{1 + \varepsilon \cos \omega} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

à la partie imaginaire de

$$f\left(t + i \log \left[\operatorname{cotang} \frac{1}{2} \omega \left(\frac{1 - \varepsilon \cos \omega}{1 + \varepsilon \cos \omega} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right] \right) \text{ ».}$$

Le cas où l'on choisit $f(x) = x$ est utilisé en géodésie pour obtenir une représentation sphérique de la surface de l'ellipsoïde. L'intérêt pratique est qu'« à un système de triangles relativement petits [et ce seront toujours ceux-là qui pourront servir aux mesures effectives] formés sur la surface du sphéroïde par des lignes géodésiques, correspond sur la surface de la sphère un système de triangles dont les angles sont exactement égaux aux angles correspondants sur le sphéroïde et dont les côtés diffèrent si peu d'arcs de grands cercles que, dans la plupart des cas où la précision la plus rigoureuse n'est pas exigée, l'on pourra les regarder comme tels ; du reste, lorsque la plus grande exactitude est nécessaire, l'écart avec l'arc de grand cercle peut être facilement évalué avec toute la précision nécessaire, à l'aide de formules simples[14] ».

La plupart des contributions qui suivront s'inscriront dans la lignée de cet article de Gauss. Les mathématiciens qui reprendront la question des cartes géo-

12 Gauss poursuit en notant que son collègue à Göttingen, Karl Ludwig Harding a utilisé ces techniques pour construire certaines de ses cartes célestes [Harding 1822].

13 Le *Nachlaß* de Gauss comporte entre autre une étude plus particulière sur la représentation du sphéroïde elliptique sur la sphère. Après avoir donné les formules de la projection (dans le cas où f est l'identité), il établit que les segments géodésiques du sphéroïde se projettent sur des petits cercles dont il donne le rayon. Il ajoute des calculs explicites correspondant à la latitude et au coefficient d'aplatissement de Göttingen. [Gauss 107-116]

14 [Gauss 1825, 22].

graphiques rappellent souvent, à la différence de Gauss, les travaux de Lambert, Euler, Lagrange mais ils situent leur travail par rapport à la solution générale du problème proposée par Gauss dans cet article.

2. LE CAS PARTICULIER DE L'ELLIPSOÏDE

L'intention première de Jacobi était de trouver des coordonnées dans lesquelles l'équation des géodésiques s'écrivent sous une forme intégrable en terme de fonctions abéliennes. Pour cela, il introduit la notion de coordonnées elliptiques en repérant les points de l'ellipsoïde comme « intersection de l'ellipsoïde et des deux hyperboloïdes qui passent par le même point et dont les sections principales [en ce point] ont les mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde » ; cela se traduit analytiquement en choisissant φ et ψ de telle manière que

$$x=\sqrt{\frac{a}{c-a}}\sin\varphi\sqrt{b\cos^2\psi+c\sin^2\psi-a}\ ,$$
$$y=\sqrt{b}\cos\varphi\sin\psi\ ,$$
$$z=\sqrt{\frac{c}{c-a}}\cos\psi\sqrt{c-a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi}$$

où

$$a<b<c$$

et

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

est l'équation de l'ellipsoïde. Après avoir montré que grâce à ce paramétrage, l'équation des géodésiques s'exprime sous une forme intégrable sans trop de difficultés, Jacobi signale que ce même paramétrage permet de résoudre le « problème de figurer la surface de l'ellipsoïde sur une carte, de manière que les parties infiniment petites demeurent semblables[15] ». Il évoque la genèse du problème en se référant aux travaux de Lambert, Lagrange et Gauss :

> C'est ainsi que Lambert, dans ses Mémoires, a traité le problème des cartes-projections ; et Lagrange a donné, dans les Mémoires de cette Académie, la solution générale pour toutes les surfaces de révolution, solution que M. Gauss a étendue à toutes les surfaces, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague et imprimé dans le *Journal astronomique* de Schumacher. [Jacobi 1839, 270]

Il rappelle la méthode de Gauss de décomposition de la métrique en deux facteurs qui conduit à la résolution d'une équation différentielle du type $Pdt+\left(Q+\sqrt{R}\right)du=0$ et il montre que si l'ellipsoïde est de révolution, on retrouve les résultats de Lagrange. Jacobi signale que « le problème pour la surface générale du second ordre présente néanmoins des obstacles insurmontables par le choix ordinaire des variables, à cause de la forme compliquée de l'équation différentielle à intégrer[16] ». Si l'on choisit le système de coordonnées qu'il propose, les équations différentielles se résolvent sans problème puisque les variables se séparent naturellement[17].

3. LA REPRISE DU PROBLÈME GÉNÉRAL PAR LIOUVILLE

En 1850, Joseph Liouville publie un ouvrage composé du texte sur l'application de l'analyse à la géométrie de Gaspard Monge, des *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss et d'une série de notes personnelles[18] « dont la lecture pourra être utile aux jeunes géomètres ».

15 [Jacobi 1839, 269-270].
16 [Jacobi 1839, 271].
17 [Jacobi 1832].
Dans un article paru de manière posthume en 1861, Jacobi développe précisément les calculs.
18 [Monge 1850].

Dans la quatrième note consacrée à la courbure de Gauss, Liouville revient sur l'expression de la métrique. Après avoir rappelé le caractère intrinsèque du produit des courbures principales, il en souligne la difficulté de l'expression et les simplifications que l'on peut obtenir en considérant des expressions particulières de la métrique[19] :

> La valeur générale de RR_1 dont nous parlons est très-compliquée ; [...] mais on la simplifie beaucoup quand on suppose l'expression de ds^2 réduite à la forme
>
> $$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$
>
> et, à plus forte raison, quand on prend
>
> $$ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$
>
> ou
>
> $$ds^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$
>
> ce qu'on peut faire, comme on sait, pour toute surface, en choisissant un système de coordonnées convenables. [Liouville 1850a, 588]

Dans la cinquième note, Liouville reprend le problème de Gauss en s'inscrivant d'abord dans la tradition des *Disquisitiones* de Gauss, c'est-à-dire en exprimant la condition en terme de triangles infinitésimaux :

> En d'autres termes : on demande que tout triangle infinitésimal, tracé sur la première surface, soit semblable au triangle infinitésimal correspondant sur l'autre surface ; ou bien encore on veut qu'entre tout élément mm_1 ou ds partant du point fixe mais quelconque m, et aboutissant à un point m_1, voisin de m, et l'élément correspondant $m'm'_1$ ou ds', il y ait un rapport indépendant de la position du m_1, bien que susceptible de varier suivant le lieu où l'on prend le point m. [Liouville 1850b, 601]

Liouville explique que ce problème a été posé par Lambert, Lagrange et Gauss, Lambert donnant des cas particuliers pour lesquels cette condition est vérifiée, Lagrange produisant une solution pour les projections vérifiant cette condition d'une surface sur un plan. Gauss est présenté comme l'auteur d'une solution générale :

> Enfin, M. Gauss a fait voir que pour deux surfaces A et A' quelconques, le problème dépend de la décomposition en facteurs imaginaires des carrés ds^2, ds_1^2, et de l'intégration des équations différentielles obtenues en égalant ces facteurs à zéro. [Liouville 1850, 601]

Le point essentiel de la démonstration de Gauss que Liouville met en lumière est associé à la possibilité d'exprimer les métriques des deux surfaces sous la forme $ds^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$. Liouville avait déjà insisté dans les notes précédentes sur l'importance d'écrire les métriques sous des formes simplifiées. Ici, le problème des cartes géographiques est en quelque sorte subordonné à celui de déterminer des coordonnées dans lesquelles les métriques s'écrivent sous des formes particulières[20] :

> Peu de mots nous suffirons en effet pour montrer que quand on a réussi à trouver, pour la surface A, des variables α, β qui donnent
>
> $$ds^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$
>
> et , pour la surface A', des variables α, β qui donnent
>
> $$ds'^2 = \lambda'\,(d\alpha'^2 + d\beta'^2)$$
>
> le problème du tracé géographique de ces deux surfaces l'une sur l'autre se résout de suite dans toute sa généralité. [Liouville 1850b, 601-602]

Le problème revient donc à traiter une équation du type

$$d\alpha'^2 + d\beta'^2 = l(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

19 Liouville traite de la question des « expressions diverses de la distance de deux points infiniment voisins » dès la seconde note en rappelant la forme réduite utilisée par Gauss dans les *Disquisitiones* ($ds^2 = du^2 + G\,dv^2$) et en proposant une nouvelle forme réduite qu'il utilisera pour simplifier l'équation des géodésiques dans la note 3 ($ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2)$).

20 Liouville étudie les systèmes de coordonnées pour lesquelles la métrique s'écrit sous la forme $ds^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$ dans la note II du même volume [Liouville 1850] consacrée aux expressions diverses de la distance de deux points infininiment voisins.

Liouville ne traite pas cette équation comme Gauss. Il la décompose et se ramène à la considération de deux équations :

$$\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha}\right)^2=\left(\frac{d\alpha'}{d\beta}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{d\beta}\right)^2$$

et

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\alpha'}{d\beta}+\frac{d\beta'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\beta}=0.$$

En posant

$$\frac{d\beta'}{d\alpha}=w\frac{d\alpha'}{d\alpha}$$

la seconde équation permet d'écrire

$$\frac{d\beta'}{d\beta}=-\frac{1}{w}\frac{d\alpha'}{d\beta}$$

d'où en reportant dans la première équation

$$\left(\frac{d\alpha'}{d\beta}\right)^2=w^2\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2$$

soit

$$\frac{d\alpha'}{d\beta}=\mp w\frac{d\alpha'}{d\alpha}=\mp\frac{d\beta'}{d\alpha}$$

La seconde équation permet alors d'écrire

$$\frac{d\beta'}{d\beta}=\pm\frac{d\alpha'}{d\alpha}$$

et en combinant ces deux dernières équations, on obtient

$$\frac{d\alpha'+\beta'\sqrt{-1}}{d\beta}=\pm\sqrt{-1}\,\frac{d\alpha'+\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha}$$

soit en intégrant

$$\alpha'+\beta'\sqrt{-1}=\Pi\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)$$

où Π est une « fonction arbitraire ». Liouville retrouve alors la solution générale de Gauss :

> Ainsi le problème du tracé géographique se résoudra pour nos deux surfaces A et A' en prenant, pour α', la partie réelle de $\Pi\left(\alpha_1\beta\sqrt{-1}\right)$, et pour β' le coefficient de racine $\sqrt{-1}$, dans cette même expression, réduite à la forme $P+Q\sqrt{-1}$. [Liouville 1850b, 603]

Liouville déplace le. champ du problème des cartes géographiques vers la géométrie infinitésimale. Il en souligne l'importance géométrique en notant que la « considération du tracé géographique permet d'étendre en quelque sorte, à des surfaces quelconques, la plupart des propriétés des figures planes ». Par contre, il ne donne pas d'exemples proposant en guise d'exercices « aux jeunes géomètres » les exemples classiques d'un plan sur un plan, d'une sphère sur un plan, d'un ellipsoïde sur un plan, sur une sphère ou sur un autre ellipsoïde. La seule indication donnée par Liouville est de ramener le problème à trouver des coordonnées dans lesquelles la métrique s'écrit sous la forme $ds'^2=\lambda'(d\alpha'^2+d\beta'^2)$. Par ailleurs, il rappelle le résultat de Jacobi pour le cas de l'ellipsoïde[21].

Liouville signale que la question de trouver des coordonnées orthonormées sur une surface se généralise au cas de l'espace :

> Il y a pour le cas des trois dimensions un problème analogue qui mène à l'équation
>
> $$d\alpha'^2+d\beta'^2+d\gamma'^2=l(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2),$$
>
> et dont j'ai obtenu, en profitant d'une sorte de hasard, la solution complète. [Jacobi 1850b, 608]

Liouville propose d'étudier la forme générale d'un changement conforme de coordonnées de l'espace. Pour cela, il considère une correspondance générale entre les points de l'espace :

21 [Jacobi 1839].
Liouville est le rédacteur en chef du Journal de mathématiques pures et appliquées. Il a publié en 1841 une traduction d'un article de Jacobi sur l'équation des géodésiques des ellipsoïdes.

> Concevez dans l'espace des points en nombre infini composant, ou plutôt remplissant une figure quelconque, et représentez-vous autour d'un de ces points pris à volonté, et que vous nommerez m, les points infiniment voisins m_1, m_2, ..., que vous joindrez entre eux et au point m par des droites. Vous aurez ainsi un petit solide, et la figure entière sera formée d'une infinité de tels petits corps. Cela posé, on demande de faire correspondre aux points m, m_1, m_2, ..., chacun à chacun, des points m', m'_1, m'_2, ..., tels que, dans les deux figures m, m_1, m_2, ... et m', m'_1, m'_2, ..., deux parties élémentaires ou infiniment petites correspondantes soient toujours semblables, le rapport de similitude pouvant être variable d'un lieu à un autre. [Liouville 1850c, 609]

Liouville rapporte les deux systèmes de points à deux systèmes de coordonnées orthonormés (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ pour obtenir l'équation

$$d\alpha'^2 + d\beta'^2 + d\gamma'^2 = l(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) \qquad (5)$$

dans laquelle l est fonction de (α, β, γ).

Liouville étudie d'abord le cas $l = 1$ et obtient une caractérisation des correspondances orthogonales. Il ajoute que dans le cas l = constante, il suffit de multiplier par la racine carrée de cette constante les expressions de α', β', γ' obtenues dans le cas orthogonal. Liouville souligne le caractère géométrique de sa démonstration :

> J'observe, en passant, que ces valeurs de α', β', γ' qu'on vient d'obtenir par des considérations de géométrie, s'obtiendraient aisémanet aussi par l'analyse ; mais la démonstration précédente me semble mériter, par sa simplicité, la préférence. [Liouville 1850c, 610]

Il déduit de l'étude du cas particulier orthogonal (l = 1) que deux solutions du problème pour une fonction fixée diffèrent d'une correspondance orthogonale :

> Ainsi, à proprement parler, il ne peut y avoir, pour une valeur de l donnée, qu'une seule solution. Et si on parvenait à trouver la valeur de l la plus générale, et une solution propre à cette valeur, on pourrait dire que notre problème est complétement résolu. [Liouville 1850c, 611]

Liouville utilise alors une étude de l'inversion (transformation par rayons vecteurs réciproques) qu'il avait publiée en 1847. Il soulignait qu'« une propriété remarquable de ce genre de transformation consiste en ce que les deux triangles formés par trois points infiniment voisins quelconques de la figure primitive et les trois points correspondants de sa transformée sont semblables l'un à l'autre, en sorte que si deux lignes se coupent dans l'une des deux figures sous un certain angle, les lignes correspondantes de l'autre figure se couperont sous le même angle[22] ».

Une solution du problème sera donc donnée par

$$\alpha' = \pm\frac{k(\alpha - A)}{(\alpha - A)^2 + (\beta - B)^2 + (\gamma - C)^2}$$
$$\beta' = \pm\frac{k(\beta - B)}{(\alpha - A)^2 + (\beta - B)^2 + (\gamma - C)^2}$$
$$\gamma' = \pm\frac{k(\gamma - C)}{(\alpha - A)^2 + (\beta - B)^2 + (\gamma - C)^2}$$

avec

$$l = \frac{k^2}{(\alpha - A)^2 + (\beta - B)^2 + (\gamma - C)^2}$$

Liouville termine la résolution du problème en dimension 3 en montrant que la fonction l ci-dessus est la plus générale pour laquelle l'équation (5) ait une solution[23]. La démonstration de Liouville est purement analytique et utilise des résultats de Lamé sur les coordonnées curvilignes[24].

22 [Liouville 1847, 280].

23 Une généralisation de ce théorème est le théorème dit de Liouville selon lequel toute application d'un ouvert d'un espace euclidien de dimension $n > 3$ dans un autre est la restriction d'un produit d'inversions.

24 [Lamé 1840].
Liouville utilise sa charge de rédacteur en chef du *Journal de mathématiques pures et appliquées* pour constituer un répertoire d'outils analytiques au service de la géométrie infinitésimale.

4. LA THÈSE DE OSSIAN BONNET

En 1852, Ossian Bonnet consacre une de ses deux thèses à la question des cartes géographiques[25]. Il propose un historique de la question à partir des cartes astronomiques et marines élaborées au cours des siècles depuis celles de Ptolémée. La première étape de mathématisation du problème que Bonnet signale est l'analyse du problème par Lambert. :

> Enfin, Lambert envisagea la théorie des cartes géographiques sous un point de vue général extrêmement important. Il remarqua que le plus grand degré de perfection d'une carte était de reproduire la figure des différentes parties de la carte, de manière qu'il y eût constamment similitude entre une partie quelconque de la terre et la partie correspondante de la carte ; mais cette condition étant généralement impossible à remplir, à moins de supposer à la surface de la carte une forme particulière, Lambert se proposa de déterminer les lignes des méridiens et des parallèles par la condition que la similitude eût lieu seulement entre les éléments infiniment petits. Sans doute, de cette manière, une portion finie de la terre était déformée sur la carte, mais les angles faits sur la carte étaient toujours égaux aux angles correspondants sur la surface du globe, propriété importante que l'on avait reoconnu au système de représentation de Ptolémée. Lambert ne résolut pas d'une manière complète le problème général qu'il s'était posé. [Bonnet 1852, 301-302]

La problématique de Lambert est présentée par Bonnet comme une abstraction de certains critères liés à la pratique et à l'usage des cartes. Bonnet s'attachera au long de sa thèse à associer développement mathématique et applications. De plus, il désignera ce problème comme celui de Lambert.

Bonnet reprend l'analyse effectuée par Gauss et Liouville selon laquelle le problème se ramène à poser que le rapport des deux métriques est une fonction des coordonnées de la première surface. Il en déduit comme ses prédécesseurs qu'il faut, pour déduire une relation entre les coordonnées des deux surfaces, simplifier l'expression des métriques. Mais au lieu d'utiliser un système orthogonal et isotherme, il se propose de trouver des coordonnées de manière que la métrique s'écrive sous la forme :

$$\mu d\alpha\, d\beta$$

sans vraiment innover particulièrement techniquement puisqu'il montre d'abord que la métrique peut prendre la forme (en explicitant les arguments de Gauss)

$$M(dU^2+dV^2)$$

et qu'il suffit alors de poser $\alpha = U + V\sqrt{-1}$ et $\beta = U - V\sqrt{-1}$ pour obtenir la forme cherchée.

L'équation du problème s'écrit alors

$$\mu' d\alpha' d\beta' = n^2\, \mu d\alpha\, d\beta.$$

En écrivant

$$d\alpha' = \frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta} d\beta,\quad d\beta' = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\beta'}{\partial\beta} d\beta.$$

il vient

$$\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\right)d\alpha^2 + \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\right)d\beta^2$$
$$+\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\right)d\alpha d\beta = n^2\,\frac{N}{N'}\, d\alpha d\beta$$

25 La soutenance d'une thèse en France à l'époque est associée à la rédaction de deux mémoires, le premier consacré à un travail original et le second à un travail relevant plus de la compilation ou de la compréhension d'une question. La thèse de Bonnet sur la théorie mathématique des Cartes géographiques est la seconde thèse mais Bonnet apporte à la question quelques innovations :
Nous n'avons eu d'autre but que de simplifier les solutions des questions traitées avant nous par Lagrange, Euler, M. Gauss. [Bonnet 1852, 302]

d'où

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}=0, \qquad \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}=0$$

et donc

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}=0, \qquad \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}=0$$

ou

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}=0, \qquad \frac{\partial\beta'}{\partial\beta}=0$$

ce qui donne en intégrant

$$\alpha'=F(\alpha), \quad \beta'=F_1(\beta) \tag{6}$$

ou

$$\alpha'=F(\alpha), \quad \beta'=F_1(\beta) \tag{6'}$$

Bonnet conclut le développement de sa solution générale du problème en notant que l'on peut aussi résoudre le problème en considérant l'équation obtenue en posant que « l'angle de deux éléments quelconque de la surface S est toujours égal à l'angle des deux éléments correspondants de la surface S' ». Pour cela, il considère sur chaque surface un système de coordonnées « de manière que pour l'une et l'autre surface, les lignes coordonnées forment deux systèmes orthogonaux, divisant la surface en carrés ». Sur la première surface, il considère trois points infinitésimalement proches, m, m_1, m_2 respectivement de coordonnées (U, V), $(U+dU, V+dV)$, $(U+\delta U, V+\delta V)$. Les deux éléments de lignes mm_1 et mm_2 forment alors un angle dont le cosinus est égal (au signe près) à

$$\frac{dV\delta U-dU\delta V}{\sqrt{(dU^2+dV^2)(\delta U^2+\delta V^2)}}$$

Bonnet montre que les fonctions F, F_1 et Φ, Φ_1 sont nécessairement conjuguées. Il explique en même temps que les deux solutions obtenues se distinguent dans la mesure où l'une correspond à une similitude directe entre les éléments de ligne et l'autre à une similitude indirecte. Pour les distinguer, il considère qu'une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ partage l'espace en deux régions, « l'une, qu'on peut appeler extérieure à la surface pour laquelle $f(x, y, z)$ est positif ; l'autre, que l'on nomme région intérieure, pour laquelle $f(x, y, z)$ est négatif[26] ». Il discute de la manière d'orienter les surfaces selon que l'on place un observateur dans la région intérieure ou extérieure et montre que « la solution qui correspond à la similitude directe [...] dépend uniquement de la manière dont on se place par rapport aux surfaces ».

Bonnet rappelle que la seule difficulté est d'exhiber des systèmes de coordonnées pour les deux surfaces dans lesquelles la métrique puisse s'écrire

$$ds^2 = M(dU^2 + dV^2)$$

« ou, ce qui revient au même, de trouver pour ces deux surfaces deux systèmes de lignes orthogonales les divisant en carrés infiniment petits ». Si Bonnet reprend en grande partie la présentation de Gauss, il décrit celle-ci dans les termes de la géométrie infinitésimale. Le problème des cartes géographiques est devenu une question emblématique de la théorie des surfaces. Bonnet rappelle les surfaces pour lesquelles de tels systèmes de lignes sont connus : surfaces développables, de révolution, du second ordre, sphéroïdes mais aux yeux de Bonnet, l'étude de ces exemples n'a d'intérêt que « comme exercice de calcul ». La seule application que Bonnet propose de développer est le cas pratique des cartes de géographie dans lesquelles la surface de la terre est une surface de révolution et celle de la carte un plan.

Les équations paramétriques correspondant au système des parallèles et méridiens d'une surface de révolution s'écrivent

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u),$$

celles du plan peuvent s'écrire

$$x' = u', \quad y' = v', \quad z' = 0.$$

26 [Bonnet 1852, 308].

Les métriques correspondantes s'écrivent

$$ds = \sqrt{du^2\left[1+f'(u)^2\right]+u^2dv^2}, \quad ds' = \sqrt{du'^2+dv'^2}.$$

Dans ce cas particulier, les équations générales ou s'écrivent

$$x'+y'\sqrt{-1} = F\left(U+V\sqrt{-1}\right) = F\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right)$$

ou

$$x'+y'\sqrt{-1} = \Phi\left(U-V\sqrt{-1}\right) = \Phi\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du - v\sqrt{-1}\right)$$

$$x'-y'\sqrt{-1} = F_1\left(U+V\sqrt{-1}\right) = \Phi_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right)$$

en posant

$$U = \int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du, \quad V = v, \quad U' = u' = x', \quad V' = v' = y'$$

Les premières équations correspondent au cas où les similitudes sont directes et correspondent au cas pratique.

Bonnet déduit de ces équations quelques principes de réalisation des cartes de géographie. Lorsque l'on pose $V = 0$ dans ces équations, on obtient l'équation de l'image du méridien origine. Comme F est arbitraire, « on voit que le premier méridien peut être représenté par une courbe quelconque, et que la latitude peut varier sur ce méridien suivant une loi aussi quelconque[27] ». Cette propriété de condition initiale étant surtout intéressante mathématiquement et sans grand intérêt pratique, Bonnet préfère s'intéresser à des propriétés qui rendent la construction ou l'emploi de la carte plus facile. Dans un premier temps, il s'intéresse à la possibilité d'imposer à la carte d'être semblable à une partie finie de la terre, c'est-à-dire que le rapport d'agrandissement soit constant dans une partie de la carte. La conclusion des calculs menés par Bonnet n'est pas très intéressante d'un point de vue pratique puisque « ce n'est que dans le cas où l'on supposerait la terre cylindrique ou conique que le rapport d'agrandissement pourrait être constant[28] ». Il rappelle ensuite que des techniques d'interpolation permettraient d'assujettir certains points à occuper des positions déterminées de la carte. Bonnet montre en fait que la solution générale du problème est suffisamment souple pour admettre des conditions supplémentaires. Pour autant les applications que Bonnet étudie n'ont que peu à voir avec les questions pratiques posées à la même époque par les théoriciens des cartes géographiques[29].

Pour terminer, Bonnet reprend le problème posé par Lagrange, celui de « déterminer les fonctions arbitraires, de telle sorte qu'il en résulte pour les méridiens et pour les parallèles des courbes d'une nature donnée[30] ». Cette question a une importance réelle pour la construction des cartes car les cartes marines imposent souvent que les images des méridiens et des parallèles soient des cercles. Bonnet se met d'ailleurs dans ce cas car le cas général est trop difficile.

Il avait précédemment calculé la courbure géodésique d'une courbe de la carte en fonction de la courbure de la courbe originale et des paramètres de la projection, puis avait donné une démonstration originale dans le cas des méridiens et des parallèles. Partant de l'expression générale de la courbure d'une courbe plane dans des coordonnées orthogonales (x', y')

$$\frac{dy'd^2x' - dx'd^2y'}{\left(dx'^2+dy'^2\right)}$$

27 [Bonnet 1852, 320].

28 [Bonnet 1852, 322].
Bonnet traite en fait le cas global, à savoir la question de projeter de manière conforme une surface de révclution sur une surface plane. Il retrouve le résultat classique selon lequel il n'y a que les surfaces développables qui peuvent satisfaire cette condition. Pafnuty Tchebychef [1856] reprend ce problème et Darboux [1911] ramènera le problème de projeter une partie de la surface de révolution de manière conforme à un problème de Dirichlet.

29 Voir par exemple [Dienger 1852] ou [Tissot 1858].

30 [Bonnet 323].

et en écrivant $dx'=\alpha dU - \beta dV$, $dy' = \beta dU + \alpha dU$ où α et β sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la dérivée par rapport à U de la fonction F qui définit la projection[31], on obtient dans le cas des méridiens (où U est constant)

$$dx' = \alpha dU, \quad dy' = \beta du, \quad d^2x' = \frac{d\alpha}{dU}dU^2,\ d^2y' = \frac{d\beta}{dU}dU^2$$

et donc

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\beta\frac{d\alpha}{dU} - \alpha\frac{d\beta}{dU}}{(a^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}}{dV} = \frac{d\Omega}{dV}$$

en posant $\Omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

De même, il obtient

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\beta\frac{d\alpha}{dU} - \alpha\frac{d\beta}{dU}}{(a^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{dV} = \frac{d\Omega}{dU}$$

dans le cas des parallèles (où U est constant).

Pour que la courbe image d'un méridien soit un cercle, il faut que sa courbure ne soit fonction que de V et donc

$$\frac{d^2\Omega}{dUdV} = 0$$

ce qui montre que les parallèles seront aussi représentés par des cercles. Bonnet cherche alors quelles sont les fonctions qui vérifient cette condition et obtient des formules explicites qu'il simplifie en changeant plusieurs fois de coordonnées. Il en déduit des règles pour construire la représentation conforme de la sphère sur un plan de manière que les méridiens et les parallèles soient représentés par des cercles :

> Après avoir fixé la constante c, qui est, en quelque sorte l'exposant de la carte, on prend sur une horizontale les points A et A' où viennent se couper tous les méridiens, c'est-à-dire les pôles de la carte, en ayant soin de placer à droite le pôle boréal A ; on connaît ainsi le méridien AA' correespondant à $V=0$, et le parallèle BB', perpendiculaire au milieu de AA', à $U_1=0$. Ce méridien et ce parallèle peuvent se rapporter à un lieu quelconque du globe terrestre, qui devient alors le centre de la carte. [Bonnet 1852, 331]

Les applications pratiques de Bonnet restent malgré tout assez éloignées des préoccupations des cartographes qui s'intéressent plus à la question de déterminer « le mode de projection le mieux approprié à la représentation plane d'une contrée particulière[32] » :

> Dans la construction d'une carte à grande échelle destinées aux services publics, comme celle qui a été dressée en France par le Dépôt de la Guerre, la condition la plus importante à remplir est relative à la reproduction des angles. Il n'est pas nécessaire que le mode de projection les conserve rigoureusement, mais il ne doit les altérer que de quantités assez faibles pour que chaque feuille de la carte constitue un véritable levé topographique. Les distances étant inévitablement modifiées, l'échelle du dessin variera plus ou moins d'une feuille l'autre. Il faut rendre cette variation aussi petire que possible en réduisant à son minimum la plus grande altération de longueur. [Tissot 1879, 337]

Bonnet se sert du problème des cartes géographiques pour promouvoir les méthodes de la géométrie infinitésimale. L'insistance sur les applications concerne plus des exemples à caractère géométrique que des réponses aux problèmes des cartographes. La généralisation de la question des cartes géographiques à celui des cartes qui conservent les rapports d'aires est à cet égard emblématique[33].

31 Rappelons que F est holomorphe.

32 [Tissot 1876, 49].

33 Bonnet évoque à la fin de son mémoire une contribution à une autre question liée à une généralisation du problème des cartes géographiques, celui d'obtenir des cartes qui conservent les rapports d'aire. Il donne l'équation (sans la résoudre) d'une telle carte qui aurait de plus la propriété de représenter les méridiens et les parallèles par des cercles. Les mathématiciens de Saint Petersbourg, A. Korkine [1890] et D.-A. Gravé développent cette question. Codazzi [1858] traite aussi une forme de ce problème.

5. CONCLUSION

Les travaux des géomètres du 19e siècle posent l'article de Gauss de 1825 sur la représentation conforme d'une surface sur une autre comme l'article à partir duquel la théorie mathématique des cartes géographiques se développe. Ils font pour la plupart référence aux travaux des prédécesseurs de Gauss pour lier la question de la représentation conforme aux problèmes pratiques de la cartographie.

Néanmoins il faut différencier deux domaines, celui de la théorie mathématique des cartes géographiques qui est un problème bien particulier de la géométrie infinitésimale qui se constitue en domaine autonome et celui de la cartographie mathématique qui s'occupe d'appliquer des techniques d'analyse et de géométrie infinitésimale aux problèmes pratiques de la construction des cartes géographiques. Lorsque les géomètres du 19e siècle parlent d'application, ils poursuivent les anciens questionnements qui avaient motivé Lambert, Euler ou Lagrange au 18e siècle mais n'abordent que très rarement les problèmes pratiques des cartographes et des géodésiens.

La théorie mathématique des cartes géodésiques est reconnue par les géomètres de la fin du 19e siècle, en particulier Darboux, comme une des questions à partir desquelles la géométrie infinitésimale constitue son autonomie et comme emblématique du passage des applications de l'analyse à la géométrie à la géométrie infinitésimale. L'article de Gauss de 1825[34] est encore essentiellement consacré à appliquer des techniques analytiques à une question géométrique même si Gauss prend le soin d'interpréter géométriquement ses résultats. Ainsi la détermination de la forme de la métrique est obtenue à la suite de manipulations analytiques. Au contraire, Jacobi, Liouville et Bonnet posent le problème comme essentiellement lié à un choix adéquat de coordonnées curvilignes et insistent beaucoup sur le caractère géométrique du problème d'écrire la métrique sous une forme donnée.

Enfin, la question de la théorie mathématique des cartes géographiques est un des fils d'une histoire plus complexe ; d'une part, les questions d'uniformisation et de transformations conformes généralisent les techniques analytiques à l'œuvre à partir de l'article de Gauss. Comme Liouville et Bonnet le soulignent, cette théorie et ses développements sont intrinsèquement liés à celles des surfaces qui admettent une métrique donnée. Les questions des déformations des surfaces, des représentations géodésiques, des représentations qui conservent les rapports d'aires sont aussi des généralisations de la théorie mathématiques des cartes géographiques.

34 Au contraire de celui de 1828.

BIBLIOGRAPHIE :

[Bonnet 1852] Ossian Bonnet, Thèse d'Astronomie – Sur la théorie mathématique des cartes géographiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (1) 17 1852, 301-340.

[Codazzi 1858] Codazzi Delfino, Intorno alla questione : riportare in una superficie piana o sferica une figura situata in una superficie qualunque di revoluzione talmente che le parti dell'immagine e della figura abbiano le aree in rapporto constante, *Annali di matematica pura ed applicata*, 1 (1858), 89-109.

[Darboux 1887] Gaston Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces courbes* (t. 1), Paris : Gauthier, 1887.

[Darboux 1908] Gaston Darboux, Les origines, les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale, in *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, vol. 1, Roma : Tipografia della R. Accademia dei Lincei, 1909, 105-122.

[Darboux 1911] Gaston Darboux, Sur la construction des cartes géographiques, *Bulletin des sciences mathématiques*, (2) 35 (1911), 23-28.

[Dienger 1852] Joseph Dienger, Du tracé géographique des surfaces courbes les unes sur les autres, et application de ce tracé à la construction des cartes géographiques, *Nouvelles annales de mathématiques*, 11 (1852), 252-268.

[Gauss 1825] Carl Friedrich Gauss, Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer Andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, *Astronomische Abhandlungen herausgegeben von H. C. Schumacher*, 3 (1825) ; [*Werke*] IV, 193-216 ; cité d'après la trad. fr. par L. Laugel, *Solution générale de ce problème : réprésenter les parties d'une surface donnée sur une autre surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original dans les parties infiniments petites [Représentation conforme]*, Paris : Hermann, 1915.

[Gauss 1828] Carl Friederich Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Commentarii Societas Göttingensis,* 6 (1828), p. 99-146 ; Werke, 4, p. 217-258 ; 1ère trad. fr. Recherches générales sur les surfaces courbes, suivies de notes et d'études sur divers points de la théorie des surfaces et sur certaines classes de courbures, E. Roger, Grenoble (1855) ; 2e trad. fr. Recherches générales sur les surfaces courbes (T. Abadie), *Nouvelles annales de Mathématiques*, 11 (1862), p. 195-252 ; trad. angl. 1902, cité dans la rééd. 1979 (*Astérisque*, 62, p. 1-81).

[Gauss 1844] Carl Friederich Gauss, Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie (Erste Abhandlung), *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, II (1844) ; [*Werke*] IV, 259-300.

[Gauss 1847] Carl Friederich Gauss, Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie (Zweite Abhandlung), *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, III (1847) ; [*Werke*] IV, 301-333.

[Gauss *Nachlaß*] Carl Friederich Gauss, *Nachlaß* sur la géodésie, [*Werke*] IX, 117-204.

[Gravé 1896] Dimitri Alexandre Gravé, Sur la construction des cartes géographiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (5) 2 (1896), 317-362.

[Harding 1822] Karl Ludwig Harding, *Atlas novus cœlestis, XXVII tabulis continens stellas inter polum borealem et trigasimum gradum declinationis australis adhuc abservatas*, Göttingen, 1822.

[Jacobi 1832] Carl Gustav Jacob Jacobi, De transformatione integralis duplicis indefiniti in formam simpliciorem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 8 (1832), 253-279 & 321-357.

[Jacobi 1839] Carl Gustav Jacob Jacobi, Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 19 (1839), 309-313 ; cité d'après la trad. fr., De la ligne géodésique sur un ellipsoïde, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (1) 6 (1841), 267-273.

[Jacobi 1859] Carl Gustav Jacob Jacobi, Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben (rédigé par S. Cohn), *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 59 (1861), 74-88.

[Korkine 1890] Alexandre Korkine, Sur les cartes géographiques, *Mathematische Annalen*, 35 (1890), 588-604.

[Lamé 1840] Gabriel Lamé, Mémoire sur les coordonnées curvilignes, Journal de mathématiques pures et appliquées, (1) 5 (1840), 313-347.

[Liouville 1847] Joseph Liouville, Note au sujet de l'article précédent, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (1) 12, 265-290.

[Liouville 1847a] Joseph Liouville, Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (1) 12, 291-304.

[Liouville 1850] Joseph Liouville, Expressions diverses de la distance de deux points infiniment voisins et de la courbure géodésique des lignes sur une surface, *in* [Monge 1850], 569-576.

[Liouville 1850a] Joseph Liouville, Sur le théorème de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface, *in* [Monge 1850], 583-600.

[Liouville 1850b] Joseph Liouville, Du tracé géographique des surfaces les unes sur les autres, *in* [Monge 1850], 601-608.

[Liouville 1850c] Joseph Liouville, Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique, *in* [Monge 1850], 609-616.

[Monge 1850] Gaspard Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, cinquième édition revue, annotée, corrigée et annotée par M. Liouville, Paris : Bachelier, 1850.

[Nabonnand 1995] Contribution à l'Histoire de la théorie des Géodésiques au 19e siècle, *Revue d'histoire des mathématiques*, 1 (1995), 159-200.

[Picard 1922] Émile Picard, *Discours et mélanges*, Paris : Gauthier-Villars, 1922.

[Rollet & Nabonnand 2002, Laurent Rollet & Philippe Nabonnand, Une bibliographie mathématique idéale ? Le Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques, *La Gazette des mathématiciens*, 92 (2002), 11-25.

[Tchebychef 1856] Pafnuty Tchebychef, *Tracé des cartes géographiques*, St. Petersbourg, 1856 ; [Œuvres complètes], t. 1, 239-247.

[Tissot 1858], Auguste Tissot, Sur les altérations d'angles et de distances dans le développement modifié de Flamsteed, *Journal de l'École Polytechnique*,. 21 (1858), 217-225.

[Tissot 1876], Auguste Tissot, Sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques (I), *Nouvelles annales de mathématiques*, (2) 17 (1878), 49-55.

[Tissot 1879], Auguste Tissot, Sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques (IV), *Nouvelles annales de mathématiques*, (2) 18 (1879), 337-356.

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)
TOMO XV, AGOSTO DE 2012

MATEMÁTICAS MIXTAS, MÁQUINAS E INFINITESIMALES EN LA CONTROVERSIA ENTRE DENIS PAPIN Y G. W. LEIBNIZ, 1689 – 1707

Alberto Guillermo Ranea

Universidad Torcuato Di Tella. Miñones 2177. Buenos Aires, Argentina.
Email: granea@utdt.edu

LA CONTROVERSIA ENTRE LEIBNIZ Y PAPIN

Palabras clave: Leibniz. Papin. Dinámica. Máquinas. Acción motriz. Medición.

SINOPSIS

Entre 1689 y 1707, G. W. Leibniz (1646-1716) y D. Papin (1647-¿?) mantuvieron una intensa disputa acerca de cómo medir la acción motriz. Aunque Leibniz ya había desarrollado lo esencial de su cálculo de máximos y mínimos, y Papin había sido nombrado profesor de matemáticas en la Universidad de Marburg, la matemática jugó un papel secundario en el desarrollo de su controversia. En particular es interesante la ausencia de toda mención o uso de infinitesimales por parte de Leibniz. El contexto en el que se desarrolla la polémica, es decir, las llamadas matemáticas mixtas y el cálculo de la eficiencia de una máquina, podría ofrecer una explicación de este antecedente de la mecánica de Lazare Carnot.

MIXED MATHEMATICS, MACHINES, AND INFINITESIMALS IN THE CONTROVERSY BETWEEN DENIS PAPIN AND G. W. LEIBNIZ (1689-1707)

THE CONTROVERSY BETWEEN LEIBNIZ AND PAPIN

Key words: Leibniz. Papin. Dynamics. Machines. Motrice action. Measuring.

SYNOPSIS

Between 1689 and 1707 G. W. Leibniz (1646-1716) and D. Papin (1647-¿?) were engaged in an intense dispute over the right measurement of motive force. Although Leibniz already had developped the calculus, and Papin had been appointed Professor of Mathematics at the University of Marburg, Mathematics played a minor role in their controversy. Particularly intriguing is that Leibniz never uses or mentions infinitesimals in the letters and papers exchanged with Papin. The context of the controversy, the so-called Mixed Mathematics and the calculation of the efficiency of a machine, might provide an explanation of this intriguing antecedent of Lazare Carnot's Mechanics..

INTRODUCCIÓN

La correspondencia entre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y Denis Papin (1647-¿?) oculta el episodio menos conocido de la llamada controversia por las fuerzas vivas. Dos factores conspiraron para que ello fuera así hasta nuestros días. Uno de ellos es en apariencia accidental y externo: hasta el presente no hay una edición completa del epistolario entre Leibniz y Papin. Aun las más eruditas conclusiones acerca de su contenido se basan en un registro incompleto. Esta circunstancia está relacionada con el segundo de los factores, más íntimo al contenido del epistolario. A diferencia de otros episodios de la controversia por las fuerzas vivas, el contexto del debate entre Leibniz y Papin no es puramente conceptual o teórico sino eminentemente tecnológico – si se me permite tomar este término en forma vaga y general en el sentido de "ingenieril". En efecto, mientras Leibniz intenta denodadamente llevar la discusión al terreno de la fundamentación de los principios de la mecánica, Papin está preocupado por la manera en que la evaluación de la "fuerza motriz" pueda afectar el funcionamiento de las máquinas que inventa para su patrón, el Landgrave Karl von Hessen-Kassel (1654-1730), máquinas que solían fallar, algunas de ellas de manera estrepitosa y en presencia de toda la corte del Landgrave.

El extenso debate entre Leibniz y Papin acerca de la medición de la acción motriz es parte de la historia de los principios de la mecánica entre los siglos XVII y XIX. La querella en torno a la "verdadera medida de la fuerza", iniciada con la aparición de la "*Brevis demonstratio*", de G. W. Leibniz (Leibniz, 1686), es el primer acto de un drama de controversias que se continuó con la discusión acerca de la prioridad en la elaboración del principio de menor acción entre Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) y Johann Samuel König (1712-1757), y que culminó con el desarrollo del principio diferencial y del principio integral de menor acción por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y William Rowan Hamilton (1805-1865), respectivamente. Sin embargo, a pesar de ser la mecánica la rama más matemática de la física de los siglos XVIII y XIX, y dado el papel fundador que tuvo Leibniz en la creación del cálculo infinitesimal, resulta intrigante descubrir que en el debate con Denis Papin acerca de la evaluación cuantitativa de la acción motriz no se menciona ni se usa el cálculo leibniciano de máximos y mínimos. Si bien esta particularidad hace que la correspondencia entre Leibniz y Papin no constituya un episodio relevante para la historia conceptual de la matemática, ella nos permite acceder a una importante dimensión de la cultura matemática en Europa a finales del siglo XVII y comienzos del XVIII a la que llamaré "matemáticas mixtas". A esta dimensión se refieren Leibniz y Papin cuando intentan que el adversario no salga de los límites de lo que ellos llaman "una ciencia estrictamente matemática": una ciencia que no es puramente abstracta y formal pero tampoco una ciega aplicación a la invención de máquinas.

TEORÍA Y PRÁCTICA EN LA MATEMÁTICA MIXTA EN EL EPISTOLARIO ENTRE LEIBNIZ Y PAPIN (1702-1707)

La correspondencia entre Leibniz y Papin comenzó el 23 de enero de 1692, con una carta de Papin a Leibniz. Es difícil determinar a cuál de los dos se le ocurrió la idea de iniciar un epistolario. Sólo se sabe que un secretario del Landgrave Karl von Hessen, Johann Sebastian Haes, actuó como mediador entre ellos: "*Monsieur de Haes ayant eu la bonté de me faire scavoir que Vous seriez bien aise de voir ce que J'ay à respondre à vostre dernier ecrit touchant la maniere d'estimer les forces mouvantes*" (Leibniz, 2003, p. 246). Papin alude aquí a un escrito de Leibniz publicado en las *Acta Eruditorum* en enero de 1691 (Leibniz, 1691). En él, Leibniz criticaba los argumentos que Papin había esgrimido en su contra en un artículo anterior del mismo año (Papin, 1691). A su vez, en este trabajo Papin respondía a otro texto de Leibniz (Leibniz, 1690), en el que éste, a su vez, reaccionaba ante las críticas que Papin le dirigiera el año anterior (Papin, 1689a), todos ellos publicados por Otto Mencke en las *Acta Eruditorum* de Leipzig. Entre enero de 1692 y 1707, Leibniz y Papin intercambiaron cartas y borradores de ensayos con una notoria intensidad, solamente interrumpida entre abril de 1700 y diciembre de 1701, cuando Papin dejó temporariamente Kassel para radicarse en Amsterdam. La última carta que sobrevive de su epistolario es la que Denis Papin envió a Leibniz fechada en Kassel el 15 de septiembre de 1707, pocos días antes de partir para Inglaterra en un barco de su invención propulsado por ruedas. A partir de entonces, Leibniz perdió contacto con Papin, y trató de averiguar por diferentes medios el paradero de Papin en Inglaterra, donde desaparece sin dejar rastros luego de su última carta a Hans Sloane de diciembre de 1712. Hasta el presente se desconoce la fecha y el lugar de su muerte.

Ernst Gerland, un prestigioso y prolífico historiador de la física, publicó una edición incompleta de la correspondencia entre Leibniz y Papin (Gerland, 1881). Ella fue hasta hace poco la única fuente disponible para conocer aunque sea parcialmente el epistolario. El objetivo central de Gerland era subrayar la originalidad e importancia de Leibniz en la historia de las invenciones técnicas, en particular del motor a vapor. Por este motivo no publicó las cartas o fragmentos de cartas dedicadas a la controversia sobre la medición de la fuerza motriz, aproximadamente tres cuartos de los documentos de la correspondencia que han sobrevivido (Gerland, 1881, pp. 207, 214, 226, 230, 246; Ranea, 1989, 42). De acuerdo con Gerland, la controversia sobre la medición de la fuerza motriz carecía de toda conexión con las discusiones entre Leibniz y Papin acerca de máquinas y artefactos técnicos. A favor de la decisión de Gerland, hay que decir que Papin y Leibniz distinguen cuidadosamente en sus cartas los párrafos dedicados a su debate sobre la controversia teórica acerca de la “*force*” de aquellos en los que tratan temas técnicos tales como máquinas para extraer agua de las minas de carbón o armas de fuego. En realidad, no hacía falta tener habilidades editoriales sofisticadas para extirpar la controversia sobre la medición de la fuerza motriz y dejar solamente las partes de las cartas dedicadas a la invención de artefactos.

Sin embargo, Gerland no sigue al pie de la letra la separación que Leibniz y Papin practican en sus cartas entre el debate sobre las fuerzas motrices por un lado, y sus comentarios sobre invenciones técnicas. La controversia entre Leibniz y Papin acerca de la medición de la fuerza motriz, iniciada en enero de 1692, dura hasta un borrador de una carta que Leibniz redactó con toda probabilidad en abril de 1700 (LBr 714, ff. 306 + 308) y que hasta el presente sigue inédita. Se trata de su respuesta a la carta de Papin del 8 de abril de 1700, en la que le anuncia a Leibniz su próximo viaje a Amsterdam (LBr 714, f. 191r; Gerland, 1881, p. 256). Veinte meses más tarde, Papin reanuda la correspondencia con una breve carta fechada el 5 de diciembre de 1701 y enviada desde Kassel (LBr 714, f. 192; Gerland, 1881, p. 260). A partir de entonces, y hasta la última carta de Papin que se conserva, con fecha 15 de septiembre de 1707, trataron en sus cartas los más diversos temas, tales como nuevas invenciones, política, guerras, medicina e incluso asuntos personales. Lamentablemente faltan muchas cartas de este último tramo de su epistolario entre 1701 y 1707, pero en las que se conservan no se menciona la pasada controversia sobre las fuerzas motrices. Sin embargo, hay una excepción a este silencio, excepción que a pesar de haber sido publicada por Gerland en 1881, ha pasado inadvertida entre los especialistas.

En el borrador de una carta fechado en Berlín en diciembre de 1706, Leibniz le escribe a Papin: “*Je suis bien distrait icy, et cela m’empeche de considerer avec attention, ce que vous dites Monsieur, pag. 93. contre l’estime de la force des corps par la hauteur ou ils peu-*

vent monter. Mais je m'imagine que vous le prenés d'une maniere qui ne sera point contraire à ce que je crois avoir establi, et qui a esté assez debattu autresfois entre nous" (LBr 714, f. 283r). Este borrador no ha sido publicado aún[1]. Leibniz reprodujo sin cambios el texto de este párrafo en dos versiones posteriores del borrador de esta carta (LBr 714, ff. 279-280r, y LBr 714, ff. 281-282)[2]. En él Leibniz alude a una página del último libro que publicará Papin, *Ars nova ad aquam ignis adminiculo efficacissime elevandam*. Dos copias de este rarísimo libro se encuentran entre los manuscritos de la correspondencia entre Leibniz y Papin en el Lebniz-Archiv, en Hannover. Aunque uno aparece publicado en Kassel y el otro en Frankfurt am Main, se trata de dos ejemplares de la misma edición. En la tapa de uno de ellos leemos "Kassel A. C. MDCCVII" sin mencionar al editor (Papin, 1707b). En el otro ejemplar se ha pegado una tira de papel en la tapa con la inscripción "*Francofurti apud Matthiam Groot: 1707*" (Papin, 1707a). Es difícil determinar cuál de estos dos ejemplares fue enviado por Papin a Leibniz el 29 de noviembre de 1706 (LBr 714, f. 277r; Gerland, 1881, p. 371), y cuya lectura provocó la observación de Leibniz que acabo de mencionar. Es muy probable que Leibniz recibiera a finales de 1706, es decir, antes que el libro fuera puesto a la venta, la copia con la tira de papel pegada, dado que Leibniz escribió largas y muy interesantes notas marginales –muy difíciles de descifrar, por otra parte– en varias de sus páginas. Incluso Leibniz ha dibujado con correcciones y agregados el grabado original de la máquina inventada por Papin. En cambio, en el ejemplar de Kassel Leibniz se ha limitado a subrayar algunas oraciones. Una traducción francesa del libro (Papin, 1707c) no incluye las demostraciones del final del original latino, entre las que se cuenta el texto de Papin que provocó el comentario de Leibniz acerca de la pasada controversia. La mayoría, si no todas, de las ediciones posteriores se han hecho en base a la versión francesa, a la que, hasta lo que he podido indagar, Leibniz no menciona.

En este libro Papin describe su última invención, una máquina accionada por la presión del vapor de agua. Se trata de su último esfuerzo por convencer a su patrón, el Landgrave Karl von Hessen, de las ventajas de su invento a pesar del fracaso de las demostraciones públicas en junio de 1706 en la Corte del Landgraviato en Kassel. En la página del texto en latín a la que alude Leibniz, Papin escribió: "y con mayor evidencia se ve lo que afirmé en las Actas de Leipzig del año 1689, en página 186, que las fuerzas de los cuerpos que ascienden con un movimiento adquirido, no han de ser estimadas por la altura del ascenso" (Papin, 1707a y 1707b, p. 93)[3].

La reacción de Leibniz ante esta afirmación en 1706 está ampliamente justificada. En ella, Papin cita su "*De gravitatis causa et proprietatibus observationes*" (Papin, 1689), es decir el artículo en el que criticó las objeciones de Leibniz contra la identificación cartesiana de la fuerza motriz con la cantidad de movimiento, y que desencadenara la controversia entre ellos. En realidad, el ensayo de Papin era una suerte de preámbulo teórico a otro artículo, "*Ejusdem Dn. Papini Examen machinae Dn. Perrault*", publicado por Otto Mencke en las *Acta eruditorum* inmediatamente a continuación del anterior (Papin, 1689b). En este segundo artículo, Papin propone varias mejoras a una máquina para arrojar proyectiles inventada por Charles Perrault, cuya descripción aparecía en las últimas páginas de un libro de François Blondel (Blondel, 1683, pp. 443-444). Para sustentar su propuesta, Papin tenía que

1) Inédito. La transcripción me pertenece. En todas mis transcripciones he conservado la ortografía y la sintaxis del original manuscrito (A. G. Ranea).
2) El párrafo aludido aquí aparece en ff. 279v-280r y en f. 282v, respectivamente.
3) *"et evidentius elucescat quod in Actis Lipsiensibus, an. 1689. pag. 186 asserui Vires corporum, motu jam acquisito ascendentium, non ex altitudine ascensus esse aestimandas".*

enfrentar uno de los problemas más difíciles para un inventor en su tiempo: cómo justificar la eficiencia de una máquina antes e independientemente de su construcción, incluso a escala reducida. La mejora que propone Papin consistía en reemplazar la caída de un peso como fuerza motriz de la máquina por el descenso de un pistón en un cilindro al que se le ha extraído el aire. Papin basa sus cálculos sobre la hipótesis de la velocidad extremadamente grande de la materia que causa la gravedad (es decir, el peso) en comparación con la velocidad de cualquier caída de un cuerpo sobre la superficie de la tierra. Su punto de partida es lo que él llama "el primer principio" de la teoría de la gravedad de Christiaan Huygens: al tener la acción de la materia que causa la gravedad una velocidad infinita en comparación con cualquier cuerpo que cae en la tierra, ella imprimirá la misma cantidad de movimiento en cada unidad sucesiva de tiempo, independientemente de las distancias atravesadas por el cuerpo que cae (Papin, 1689, p. 184). En otras palabras, la *vis motrix* de la máquina tiene que ser medida por el tiempo que le toma a la acción de la gravedad para contrabalancear su acción.

La observación de Leibniz al texto del *Ars Nova* de Papin en noviembre de 1706 es una reacción tibia e incidental al silencio público de Papin en su libro acerca del punto de vista de Leibniz sobre el tema. La belicosidad de la controversia entre 1689 y 1700 ha desaparecido, lo cual es llamativo dado que Papin viola con su silencio en 1706 la condición básica que, según Leibniz afirmaba en 1692, debe regir en una controversia en matemáticas. En efecto, en el borrador de una carta, redactado entre el 27 de agosto y el 13 de agosto de 1692 Leibniz, esperanzado aún con un pronto desenlace de la disputa, escribe a Papin: "*La contestation ayant duré quelque temps dans les Actes de Leipzig, ces Messieurs, qui les ramassent, seront peutestre bien aises que nous achevions le different entre nous s'il se peut, à fin que le public apprenne un jour, à quoy il se doit tenir, et moy même j'aurois volontiers la curiosité de voir, si deux personnes, qui approfondissent une matiere, et qui paroissent bien intentionnées pour declarer sincerement, ce qui leur paroist veritable, ne pourroient pas venir à bout d'une dispute, sur tout en Mathematiques*" (Leibniz, 2003, p. 300). Leibniz y Papin repiten entre 1701 y 1707 la mayor parte de los argumentos sobre la medición de la fuerza motriz que encendieron la controversia entre ellos en 1689. Asimismo, en 1702 y en 1704, como en 1689, estos mismos temas aparecen con ocasión de un nuevo intento de Papin por mejorar la eficacia de la misma máquina de Perrault que analizara en 1689 (Papin, 1689a). Sin embargo, la combinación de circunstancias y argumentos similares no resultaron en el renacimiento de su controversia en esta segunda oportunidad.

Durante este último período de su relación epistolar, el interés de ambos está concentrado en asuntos más prácticos, en particular en diversos inventos de Papin. El debate sobre cuestiones abstractas como la cuestión de cómo fundamentar la medición de las fuerzas motrices parece dejado a un lado. El 13 de marzo de 1702, Papin escribió a Leibniz desde Kassel acerca de una nueva bomba de vacío de su invención "*que je crois la plus parfaitte qui se puisse faire tant pour la promptitude que pour l'exactitude de l'operation*" (LBr 714, f. 194r; Gerland, 1881, p. 262). Con una bomba de vacío de 5 pulgadas de diámetro y un pie de altura, Papin construyó una máquina que sería capaz de arrojar doscientas veces por hora un proyectil de 2 libras a 90 metros de distancia. De acuerdo con Papin, su nuevo invento superaba en eficiencia la máquina de Perrault "*qui fait par des contrepoids ce que Je fais par le poids de l'air*" (LBr 714, f. 198r; Gerland, 1881, p. 266). Papin pretende asimismo, en septiembre de 1702, que la exitosa exhibición pública ante el Landgrave Karl von Hessen y su corte prueba que él ha "*raisonné juste et sur de bons Principes*" (LBr 714, f. 197v; Gerland, 1881, p. 265). En su respuesta del 26 de septiembre de 1702, Leibniz le sugiere a Papin el uso de aire comprimido en lugar de aire rarificado. De acuerdo con Leibniz, se requeriría un pie cúbico de aire comprimido en una décima parte de espacio para elevar un peso de una libra a más de mil pies. En consecuencia, le pide a Papin que le diga "*à quelle hauteur Vous jettiés un poids avec vostre pompe, que combien loin*" porque prefiere expresar la fuerza motriz de ese modo (LBr 714, f. 199r-199v; Gerland, 1881, p. 268). Papin le responde que con un ángulo de inclinación de 45º, cuando la trayectoria del proyectil toma la forma de una parábola cuya amplitud es el doble de la altura "*d'ou le mobile devroit être dêcendu pour acquerir sa vitesse et a laquele, par consequent, il pourroit aussi remonter*", resulta irrelevante expresar la fuerza de las máquinas "*par la longueur ou par la hauteur de leur portée*" (LBr 714, f. 202r; Gerland, 1881, p. 273).

Ninguno de los ingredientes de la intensa y por momentos agria disputa por la medida de las fuerzas motrices, desarrollada entre 1692 y 1700, falta en estas cartas del período final de la correspondencia entre Leibniz y Papin, con excepción de la controversia misma. Gerland no consideró sin embargo que debía omitirlas en su edición como había hecho con las cartas dedicadas a la disputa por las fuerzas vivas. En las cartas entre 1701 y 1707, la línea divisoria entre la disputa teórica y abstracta y las consideraciones técnicas ha desaparecido. Vemos en ellas una estrecha vinculación entre teoría y sus aplicaciones que el fragor de la disputa anterior había ocultado. Por qué Gerland no advirtió que a pesar de haber terminado su controversia ellos siguieron exponiendo los mismos argumentos pero sin debatirlos, se escapa a mi conocimiento. Más relevante para mi propósito presente es que con su edición incompleta, Gerland ha dado muy buenos argumentos a favor de la imagen tradicionalmente difundida de Papin como un inventor sin capacidad ni interés por los aspectos teóricos de su actividad como inventor. Asimismo, Gerland ha ayudado a que permaneciera oculto el contexto en el que su controversia con Leibniz se desarrollara, es decir, la actividad e importancia de las matemáticas mixtas en la vida intelectual y política en la Europa de finales del siglo XVII y comienzos del XVIII. La controversia por las fuerzas vivas oculta algo más que una mera logomaquia extraviada acerca de irrealidades.

De acuerdo con una concepción muy difundida, Leibniz fue el típico pensador moderno con una poderosa tendencia a la abstracción matemática y filosófica, mientras que Papin habría encarnado al técnico e inventor sin interés alguno por cuestiones teóricas abstractas. Joachim Otto Fleckenstein ofrece una visión más perspicaz cuando, tras afirmar que el Barroco vio la realización del ideal renacentista del *uomo universale* en la unidad del científico, del filósofo y del técnico, escribió: "En casi todos los grandes investigadores de la época del barroco es posible verificar, en mayor o en menor medida, la voluntad no sólo de investigar los fundamentos metafísicos últimos de su ciencia sino también ilustrarla mediante aparatos técnicos" (Fleckenstein, 1965, p. 22). Leibniz, Descartes, Pascal, Galileo y Newton, son los personajes principales que, de acuerdo con Fleckenstein, "representan [...] la unidad de técnica, investigación y filosofía" en su tiempo (Fleckenstein, 1965, p. 19). No es mi intención objetar la exclusión de Papin de esa lista. Sin embargo, aunque Papin le expresa constantemente a Leibniz que no tiene tiempo para dedicarse a asuntos puramente teóricos, mantuvo durante más de una década una sostenida discusión sobre temas teóricos abstractos con Leibniz. Asimismo, Papin se refiere habitualmente en la correspondencia con Leibniz a sus "teorías", algo que éste no hace en ningún momento. A diferencia del *uomo universale* que Fleckenstein ve realizado en Leibniz, Papin no consideraba a sus inventos como meras ilustraciones de teorías filosóficas. Por el contrario, las especulaciones teóricas se vuelven en los escritos y cartas de Papin una *ancilla artis*. Para él, la construcción y funcionamiento exitosos de una máquina tiene siempre prioridad sobre cualquier consideración puramente abstracta.

Papin llama "teoría" en realidad a los cálculos que permiten prever el comportamiento y rendimiento de una máquina. Por diferentes motivos los cálculos pueden estar equivocados, pero para Papin la principal causa de error es haber elegido como fundamento ya sea un postulado o una definición que indiquen magnitudes erróneas como punto de partida de los cálculos. Sería injusto criticar a Papin por no haber encontrado nunca una aplicación completamente exitosa de sus teorías, es decir, de sus cálculos. Incluso los proyectos técnicos más celebrados de su tiempo, como el "*moulin à feu*" de Guillaume Amontons (1663-1705), no pudieron ser nunca construidos (Amontons, 1732). Por otra parte, la diferencia radical entre teoría y práctica y las dificultades para relacionarlas eran abiertamente aceptadas por la *Académie Royale des Sciences* de Paris. El 6 de marzo de 1704, Papin comenta a Leibniz: "*il ŷ a environ trante ans que J'ay eu cette pensée et que Je la proposay à Paris à M*^{rs}*. Huygens, Perrault et autres membres de l'Academie des sciences: l'invention fut fort approuvée pour la Theorie; mais on ne crut pas qu'on la pût mettre en execution: et ce n'a êté qu'à force de travailler à diverses choses, comme J'ay fait toute ma vie, que les pensées me sont venues l'une apres l'autre pour surmonter toutes les difficultez de la pratique*" (LBr 714, f. 209r; Gerland, 1881, p. 282). Papin adopta este mismo criterio con el propósito de evaluar la máquina de Amontons cuando el 22 de septiembre de 1704 le escribe a Leibniz: "*J'ŷ ay examiné le moulin à feu de Mons*^r*. Amontons dont Vous m'avez parlé autresfois: et ce que J'en puis dire [...] c'est qu'il ŷ paroît un genie inventif et penetrant pour decouvrir les circonstances qu'il faut examiner afin de determiner les avantages qu'on doit attendre d'une nouvelle invention: mais Je trouve aussi qu'il a peu de connoissance de la pratique. La machine de la grandeur qu'il la dêcrit est tout a fait impraticable*" (LBr 714, f. 243v; Gerland, 1881, p. 331).

Al igual que en 1689 (Papin, 1689a, 1689b), Papin se apoya en 1702 sobre la autoridad de François Blondel en cuyo libro aparece la descripción de la máquina de Perrault (Blondel, 1683). Dos años después del intercambio epistolar mencionado en el párrafo anterior, Papin vuelve a mencionar a Blondel en una carta del 19 de junio de 1704. No se trata de referencias incidentales a la descripción de la máquina. Papin encontró en el libro de Blondel una exposición detallada de cómo proceder en asuntos de matemáticas mixtas, en particular cuando se trata de la relación entre la teoría y sus aplicaciones. Blondel considera que los textos sobre balística fallan por dos razones, o bien por carecer de una fundamentación teórica, o bien por adoptar una teoría equivocada, como es el caso de Rivaut de Flurance, "*qui pretend demonstrer la plûpart des effets du Canon sur les principes de la Philosophie d'Aristote*" (Blondel, 1683, p. 33). Sin embargo, a pesar de la necesidad de una teoría correcta para lograr resultados precisos en artillería, Blondel considera conveniente comenzar con la enseñanza de prácticas de tiro basadas en mediciones precisas y cálculos exactos. En efecto, la teoría resulta muy difícil porque ella "*suppose des conoissances dont les Principes doivent être raportés de loin*" (Blondel, 1683, p. 59). Por este motivo en la enseñanza se debe comenzar con la práctica para luego pasar a la explicación de sus razones. De esta manera se evitará confundir a quienes quieren servirse de la teoría con alguna utilidad (Blondel, 1683, p. 60). Papin sigue al pie de la letra estas recomendaciones de Blondel en su carta del 19 junio de 1702 a Leibniz. En ella, Papin le comenta a Leibniz que la teoría sería suficiente para probar la utilidad de su invención "*aux personnes intelligentes*", pero que, dado que en la corte abundan los generales "*qui ne voudroient pas s'alembiquer l'esprit pour penetrer la Theorie sur quoy Je me suis fondé avant d'en venir à la Pratique, Je crois que le meilleur de mon affaire c'est l'experience qui fait voir que par le moien de ma machine, deux hommes peuvent en une heure de temps jetter quatre ou cinq cents grenades chacune de deux livres à 90 pas de distance et fort juste*" (LBr 714, 229v-230r; Gerland, 1881, 309).

Así como podemos conjeturar que Leibniz debió haber conocido a Papin en Paris en 1672, es altamente probable que Papin conociera personalmente a François Blondel, quien desde 1671 presidía la novedosa *Académie Royale d'Architecture*. Blondel, como Papin, es un ejemplo acabado del experto en matemáticas mixtas. En su *Cours d'Architecture* (Blondel, 1675), texto afamado y reimpreso en varias ocasiones, Blondel aplica a la formación de los arquitectos los mismos procedimientos que en el *Art de jetter les Bombes* (Blondel, 1683) dirige a la formación de artilleros. Blondel escribe en calidad de maestro y profesor de futuros artilleros y arquitectos. En el *Cours d'Architecture* la matemática, en particular la teoría de las proporciones, es el instrumento central para la construcción. Por otra parte, debemos recordar que, a pesar de una muy aclamada interpretación de la figura de Papin que hace de él un mero técnico de laboratorio, un asistente de Robert Boyle (Shapin, 1989), Papin había sido nombrado por el Landgrave Karl August von Hessen-Kassel como profesor de la cátedra de matemáticas de la Universidad de Marburg en 1687. Papin enseñó matemáticas en Marburg hasta 1695, cuando pasó a formar parte de la corte del Landgrave en Kassel pero manteniendo nominalmente el cargo de profesor. De toda su actividad a cargo de la cátedra sólo ha quedado su clase inaugural (Papin, 1695) y sus constantes lamentos por la falta de interés de los estudiantes por los temas enseñados. En la lección inaugural Papin señala que la importancia de las matemáticas en la vida humana se advierte en los usos "de la Geometría que sirve como fundamento a todas las otras partes al enseñarnos las propiedades de las magnitudes y las proporciones que guardan unas con otras" (Papin, 1695, p. 139). Gracias a ella es posible medir parcelas de campos, hacer planos, medir distancias. Asimismo "ella enseña a trabajar sobre cuerpos sólidos, el arte del corte de piedras y el de la medición de la solidez de las murallas" (Papin, 1695, p. 139) . Luego de mencionar a la aritmética, a la astronomía, a la microscopía, a la música, a la hidráulica y a la mecánica como partes de las matemáticas, Papin, como Blondel, sostiene que gracias a éstas y a su fundamento geométrico "se puede[n] superar las mayores dificultades en las tres especies de arquitectura" (Papin, 1695, p. 140-141). Blondel, en el tope del rango social y estético francés, profesor de matemáticas del *Dauphin* y favorito de Colbert, en nada difiere en sus actividades y convicciones de las que en su lección inaugural en Marburg expone el hugonote emigrado Denis Papin. La matemática reunía así a quienes la religión y la posición social habían separado.

En el contexto del epistolario entre Leibniz y Papin entre 1701 y 1707 el cálculo leibniciano de máximos y mínimos no parece necesario para resolver los problemas que las máquinas les planteaban. Aunque es imprudente conjeturar acerca de los verdaderos motivos del silencio de Leibniz, es tentador suponer que acepta evaluar el funcionamiento de las máquinas en términos exclusivamente de cálculos con números enteros. Leibniz y Papin anticipan en sus cartas entre 1702 y 1707 los objetivos que Lazare Carnot persiguió al elaborar su mecánica unas décadas más tarde (Carnot, 1786).

HIPÓTESIS GRAVITATORIA Y DEMOSTRACIÓN A PRIORI: EL CONCEPTO DE *ACTIO MOTRIX FORMALIS* Y LA FUNDAMENTACIÓN DE LOS PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA (1692-1700)

¿Por qué esos mismos temas que entretuvieron pacíficamente a Leibniz y Papin entre 1702 y 1707 causaron una controversia tan enconada entre 1689 y 1700? En estos años iniciales de su epistolario el tema central de sus cartas y ensayos es la fundamentación de los principios o axiomas de la mecánica. A diferencia de otros episodios posteriores de la disputa por las fuerzas vivas, las discusiones entre Leibniz y Papin muestran que no se trataba de una querella puramente teórica ni meramente semántica. El problema principal consistía en cómo justificar los cálculos sobre el rendimiento de máquinas que o bien no habían sido aún construidas o bien no funcionaban adecuadamente debido al *frottement*, un factor que se comenzaba a analizar en esos años en París y cuya naturaleza y medida se desconocía (Séris, 1989). El problema de los principios de la mecánica había sido planteado por Leibniz al criticar la medición de la fuerza motriz como "cantidad de movimiento" o producto de una magnitud llamada "cantidad de materia" por la velocidad entendida como una magnitud escalar. En su lugar, Leibniz propuso medirla como "fuerza viva", es decir, como el producto de la "cantidad de materia" con el cuadrado de la velocidad (Leibniz, 1686). A pocos años de haberse desatado el debate sobre la medición de la fuerza motriz en el universo, se advirtió que la controversia no sería zanjada en el plano meramente cuantitativo. Este giro de la controversia se debió a Papin (Papin, 1689a), quien trató de deducir la medición de la fuerza motriz como "cantidad de movimiento" a partir de premisas hipotéticas acerca del comportamiento de una forma invisible de materia que causa el peso en el mundo de los fenómenos. En la defensa de su crítica, Leibniz afirma que la fundamentación debe hacerse en términos exclusivamente de combinaciones de razones que excluyan toda conjetura acerca de entidades inobservables.

Papin presenta en "*De gravitatis causa*" (Papin, 1689a) su primera propuesta para mejorar el rendimiento de la máquina para arrojar proyectiles inventada por Charles Perrault. Con el propósito de aumentar la confiabilidad, o, como él dice, la "evidencia" de los cálculos que forman su teoría, Papin expone una explicación conjetural de la naturaleza y propiedades de la acción de la gravedad basada en lo que considera es la definición que Galileo da del movimiento uniformemente acelerado en los *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due Nuove Science*. En realidad, Papin ofrece una versión modificada de la definición galileana: "*gravi cadenti aequales velocitatis gradus aequalibus temporibus accrescant*" (Papin, 1689a, pp. 183-184). La primera diferencia es la inclusión de un sujeto del movimiento ("*gravi cadenti*"), cuando en la definición de Galileo el sujeto es el movimiento mismo sin referencia a ninguna entidad material en particular: "*Motum aequabiliter, seu uniformiter, acceleratum dicimus eum, qui, a quiete recedens, temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit*" (Galileo, 1898, p. 205). Asimismo, Papin ha reemplazado los *celeritatis momenta* del original por *gradus velocitatis*, una modificación que hubiera requerido una explicación que Papin no da (Ranea, 1989, p. 46).

Papin propone una demostración *a priori* de la definición galileana del movimiento uniformemente acelerado (Papin, 1689a, p. 184). Su intención es criticar la manera en que François Blondel, en su *L'Art de jetter les bombes* (Blondel, 1683), justifica la definición de Galileo mediante argumentos que Blondel llama *a posteriori*. En este contexto es importante evitar las sugerencias kantianas de "*a priori*" y "*a posteriori*" y entender que se refieren a "causas" y "efectos", respectivamente. Por otra parte, si se lee con atención el texto de Blondel encontraremos la fuente de la versión latina que Papin da de la definición galileana del movimiento acelerado en 1689. En efecto, así reproduce Blondel la definición de Galileo: "*le mobile acquiert en chacun des moments égaux de sa chute, des degrés égaux de vitesse*" (Blondel, 1683, p. 158). Blondel llama "fundamentación *a posteriori*" de dicha definición a las experiencias que Galileo incluye en el Escolio al Segundo Corolario del Teorema II del libro II de *Discorsi* (Galileo, 1898, pp. 214-219). A partir de esas experiencias, Blondel sostiene que Galileo "*conclud hardiment, par une espece de démonstration, que l'on appelle dans les Écoles a posteriori, que sa definition est veritable*" (Blondel, 1683, p. 387).

Papin rechaza este tipo de fundamentación de la definición galileana. Le reprocha a Blondel el hecho de haber aportado tantos argumentos *a posteriori* en favor de ella que sus lectores habrían terminado por convencerse de la imposibilidad de lograr una demostración *a priori*. Papin propone en este contexto una demostración *a priori* de la definición galileana del movimiento uniformemente acelerado. La demostración se basa en la teoría de la gravedad de su antiguo patrón y protector en París, Christiaan Huygens. De acuerdo con Papin, Huygens ha logrado demostrar la definición de Galileo "que muchos toman como un principio primero, partiendo Huygens de otra proposición, es decir que el poder de la acción de la materia que causa la gravedad tiene una velocidad infinita en comparación con las velocidades de los cuerpos que caen y que podemos observar". De aquí concluye Papin "dado este principio, la proposición de Galileo se infiere naturalmente" (Papin, 1689a, p. 184).

Una vez dado este paso, Papin afirma que la velocidad adquirida por cualquier cuerpo que cae sobre la superficie de la tierra será infinitamente lenta en comparación con la velocidad de la acción de la gravedad o *pesanteur*. Así, dado que un movimiento infinitamente lento no puede ser distinguido del reposo "*per ullum sensibilem effectum*", la acción de la materia gravífica ha de ser evaluada mediante la medición del tiempo en el que ella actúa, y no por la distancia vertical cubierta por la caída del cuerpo. De acuerdo con Papin, de esta manera se pueden resolver fácilmente muchas dificultades a primera vista insalvables, en particular las que Leibniz presenta en su *Brevis demonstratio* (Leibniz, 1686). Papin sostiene que la fuerza o potencia motriz ha de ser medida por la resistencia que debe superar, y dado que dicha resistencia nace de la acción de la *causa gravitatis* por unidad de tiempo, las fuerzas motrices han de estar en proporción al tiempo de la caída (Papin, 1689a, p. 186). En el texto, Papin anuncia una importante excepción a su criterio: elevar 4 libras a un pie equivale a elevar una libra a 4 pies solamente en las máquinas simples, en las que el tiempo disminuye uniformemente (*aequaliter*) tanto para la *potentia* como para la *resistentia*, de manera que puede ser ignorado. Papin acepta de este modo que sólo en movimientos uniformes en las máquinas simples existe una proporción directa entre las *vires motrices* y las distancias recorridas (Papin, 1689a, p. 187). Leibniz replica en *De causa gravitatis* que el único modo de relacionar la *potentia* con el tiempo es cuando la misma *potentia* es capaz de producir un efecto mayor si se ejerce por un tiempo mayor, de manera que una esfera con una velocidad dada tendría el poder de transferir su propio peso en el plano horizontal a lo largo de un espacio dado en un tiempo dado (Leibniz, 1690, p. 238). Pero Papin rechaza este giro del debate: no es posible medir una *potentia* por un efecto horizontal porque éste no es un efecto real de ninguna *potentia*, y no es posible por tanto determinar una unidad de medida apropiada (Papin, 1691, p. 7).

Luego del intenso intercambio de cartas y borradores de ensayos durante el año 1692, Papin y Leibniz dejan de escribirse en 1693 y 1694. En julio de 1695 la controversia renace con mayor intensidad cuando Papin publica en su *Fasciculus dissertationum de novis quibusdam Machinis* un resumen del debate entre ambos, "*Synopsis controversiae Authoris cum celeberrimo Viro Domino G. G. L. Circa legitimam rationem aestimandi vires motrices*" (Papin, 1695, pp. 94-111). Papin repite allí los fundamentos de su posición entre 1689 y 1692: si tratamos con cuerpos que son elevados a cierta altura por un movimiento que han adquirido en un descenso anterior, no podemos suponer que esas alturas sean proporcionales a las *vires motrices*, dado que las fuerzas disminuyen con las resistencias que deben superar, no por las distancias que deben recorrer. Este no es el caso, sin embargo, en el movimiento en un plano horizontal, en el que un móvil es capaz de recorrer cualquier distancia imaginable sin sufrir ninguna disminución de su capacidad motriz debido a que no encuentra ninguna resistencia en el plano horizontal (Papin, 1695, p. 95).

A partir de esta publicación, la controversia entre Leibniz y Papin girará en torno a cómo medir la fuerza motriz sin recurrir a hipótesis físicas acerca de la causa de la gravedad o peso. El problema central será cómo fijar la unidad de medida para el movimiento uniforme en un plano horizontal sin resistencia. La discusión se concentrará en la propuesta que Leibniz hace a Papin el 10 de agosto de 1696: "*parcourir une lieue dans une heure est faire le double (triple, etc.) en valeur de ce que le même mobile feroit en parcourant une lieue dans deux (trois, etc.) heures.*" Leibniz fija asimismo las condiciones en las que su criterio de medición tiene validez: "*Je suppose que chaque mouvement est uniforme, et que l'espace aussi bien que le mobile est le même, de sorte que la difference n'est que dans la longueur du temps. Je considere aussi un mobile sans pesanteur, or sans empechemens*" (LBr 714, f. 81v)[4].

Papin nunca aceptará este criterio. Leibniz insistirá en imponerlo en la controversia con Papin, en parte porque ha logrado que otros matemáticos lo aceptaran, entre ellos, principalmente, Johann Bernoulli (1667-1748), quien incluso no duda en llamarlo "un axioma" de la mecánica: "la acción de hacer lo mismo en menor tiempo es mayor" (Leibniz, 1849-1863, III, p. 298). El concepto de "acción formal", introducido en este contexto por Leibniz y que tanta importancia tendrá en el desarrollo posterior de la mecánica racional, comienza a adquirir así su carta de ciudadanía. Apoyado en el criterio del "axioma", Leibniz ensaya una justificación de su medición de la fuerza motriz en la que se hace completa abstracción de toda materia y peso. Leibniz la llama "prueba a priori". Si bien no se ha conservado el original que le enviara a Papin de esta prueba a priori, la reacción de éste justifica que se considere la siguiente versión manuscrita como un borrador fiel:

> *"sint in motibus uniformibus eiusdem corporis tempora, t; velocitates, v; spatia, s; actiones, a; potentia, p. Eruntque*
> *(1)* ***s ut tv****; seu spatia percursa sunt in ratione composita temporum impensorum, et velocitatum*
> *(2)* ***a ut sv****; seu actiones sunt in ratione composita spatiorum percursorum et velocitatum quibus sunt percursa*
> *(3) Ergo (in artic. 2, pro s substituendo tv ex artic. 1)* ***a ut vv****. Seu actiones sunt in ratione composita ex temporum simplice et velocitatum duplicata"* (LBr 714, f. 136v)[5]

Aun un conocimiento somero de la lengua latina permite advertir que en (2) Leibniz formaliza el "axioma" que le ha enviado a Johann Bernoulli y a Papin para obtener la fórmula del nuevo concepto de *actio motrix formalis*. Asimismo, a partir de la fórmula de la velocidad como cociente de la distancia recorrida y el tiempo empleado, obtiene en (1) la fórmula del espacio. El resultado es la evaluación de la actio mediante v^2 en (3). Leibniz presenta así una justificación en términos ideales del uso que hace de la fórmula de Huygens de la *vis viva* como medida de la fuerza motriz en el mundo fenoménico, es decir mv^2. De este modo Leibniz distingue dos planos diferentes en su teoría. Por un lado, el nivel fenoménico o empírico, en el cual rige la fórmula de la conservación de la misma cantidad de fuerza viva en el universo, mv^2. Por el otro, el plano de los principios o axiomas en el que gracias al concepto de *actio formalis* se puede justificar la validez *a priori* de la fórmula de las fuerzas vivas.

Papin rechaza el argumento *a priori* de Leibniz con razones contundentes. El 1 de noviembre de 1696 le escribe que no entiende en qué consiste la diferencia

4) Inédito. La transcripción me pertenece (A. G. Ranea).
5) Inédito. La transcripción me pertenece (A. G. Ranea). El énfasis con negritas agregado en la transcripción, no figura en el original manuscrito.

entre velocidad y *actio formalis* en el argumento *a priori* (LBr 714, f. 89r). El 11 de septiembre de 1696 Papin reafirma su crítica y rechaza el axioma que Johann Bernoulli había aceptado: hay mayor velocidad al recorrer una legua en una hora que al hacerlo en dos horas, pero de ninguna manera "más acción" (LBr 714, f. 179v). Leibniz por su parte defiende su axioma con el argumento que el cociente de la distancia sobre el tiempo no agota el significado de "velocidad" en su argumento. Es decir, el significado de la variable *v* de la fórmula del espacio en (1) no es el mismo que el de la *v* que aparece en la fórmula de la acción en (2). En ésta, sostiene Leibniz, la velocidad no es un cociente sino una magnitud intensiva que indica el grado de perfección de la acción. De esta manera, Leibniz introduce en la fundamentación de la dinámica las categorías de la física escolástica propia de los calculadores del siglo XIV (Maier, 1966, pp. 122-123; Ranea, 1988). "Un movimiento más rápido es más perfecto que uno más lento" carece de significado físico en la mecánica del siglo XVII; sin embargo, así es como lo expresa Leibniz a Papin el 14 de junio de 1699: "*Je diray seulement en passant, que le mouvement plus prompt est plus parfait encor intrinsequement et essentiellement, puisqu'il ne manque point de faire d'avantage sur les resistances externes et accidentelles, quelles quelles puissent estre*" (LBr 714, f. 178r) [6].

Leibniz ha llegado a un punto de su fundamentación de la dinámica en el que dos planos diferentes aparecen diferenciados con nitidez por el tipo de movimiento que rige en cada uno de ellos. En el primero, en el plano de los fenómenos singulares, el movimiento principal es el uniformemente acelerado, y las acciones son "acciones reales", es decir acciones que consumen las fuerzas que las han originado. Para Leibniz este plano no es el de la verdadera realidad; es un plano de "fenómenos bien fundados", es decir, inteligibles racionalmente pero cuyo fundamento no se encuentra en ellos mismos ni en sus interacciones. Aunque no lo menciona en sus cartas a Denis Papin, el cálculo de infinitesimales es el método más riguroso para estudiarlos. Esto se debe al valor heurístico de los infinitesimales a los que no se los debe tomar literalmente como reales, sino como ficciones bien fundadas (Costabel, 1988; Jesseph, 1998, pp. 31-32). Como escribe Leibniz a Pierre Varignon (1654-1722) el 2 de febrero de 1702, "*les infinis et infiniment petits sont tellement fondés que tout se fait dans la Geometrie, et même dans la nature, comme si c'estoient des parfaites realités*" (Leibniz, 1849-1863, IV, p. 93).

El otro plano es el de los fundamentos, de los principios de la mecánica. Aquí el movimiento es el uniforme, y las acciones son "acciones formales", es decir acciones que no consumen las fuerzas que las han originado. Es el nivel de la verdadera realidad cuya perfección se mide en términos de grados de intensidad como lo expresa el "axioma" con el que convence a Johann Bernoulli en 1696. Complejas consideraciones ontológicas que caen fuera del interés de este trabajo se combinan en los argumentos con los que Leibniz intenta convencer a Papin que la *actio formalis* es un ejercicio de la fuerza en el tiempo que no la agota pero tampoco la acrecienta. Para Papin este plano de los fundamentos ideales de la mecánica, tal como Leibniz lo presenta, es una flagrante violación del axioma "*omne agens agendo repatitur*". En efecto, ¿cómo puede haber acción donde no hay resistencia a vencer? (Ranea, 1989, pp. 56-62). Para Leibniz sin embargo, el argumento es de suma importancia porque con él se podría reemplazar el uso de las ficciones de los infinitesimales con una matemática que permita medir el grado de perfección de la realidad. En 1712, cinco años después del último contacto con Papin y el año de la desaparición de éste, Leibniz le escribe a Jakob

6) Inédito. La transcripción me pertenece (A. G. Ranea).

Hermann: *"Sed probationem altiorem habeo ex pincipiis metaphysicis, quam nempe desideras, ubi non est necesse procedi per elementa infinite parva, nec opus est adhibere effectum violentum aut suppositionem, qualis est gravitatis"* (Leibniz, 1849-1863, IV, pp. 378-379; Ranea, 1989, p. 61). Leibniz alude aquí al objetivo que perseguía con la demostración *a priori* que le envió en 1698 a Papin: evaluar el grado de perfección de la realidad sin las ficciones de los infinitesimales ni conjeturas físicas provisorias.

CONCLUSIONES

La correspondencia entre G. W. Leibniz y Denis Papin muestra el significado inicial que tuvo la controversia sobre la correcta medición de la fuerza motriz o controversia por las fuerzas vivas. Se trataba de evaluar la eficiencia de máquinas ideadas para drenar minas, transportar agua de riego o arrojar proyectiles. La fuerza motriz podía ser natural (humana o animal, acuática o eólica) o artificial (pólvora, presión de vapor de agua, compresión o dilatación de aire). Papin tiende a razonar con la máquina delante de sus ojos, ya sea construida o en un plano. Leibniz suele pensar en términos abstractos generales. Esto no quiere decir sin embargo que Papin no teorice o que Leibniz se desentienda de las máquinas reales. Papin tiende a recurrir a una matemática de números enteros que ofrece las herramientas para un cálculo de la evaluación de las máquinas en forma sencilla. Leibniz sugiere, aunque no la use, una matemática de potentes recursos heurísticos ideales, de difícil aplicación directa en su tiempo. Leibniz y Papin trabajan sin embargo dentro de la tradición de las matemáticas mixtas, en cuyo marco y con significado diferente sus posiciones lograron armonizarse mucho tiempo después, cuando la abstracción del cálculo infinitesimal y el análisis directo de la operatividad de las máquinas se reunieron en una misma disciplina.

BIBLIOGRAFÍA

AMONTONS, GUILLAUME (1732), "Moyen de substituer commodément l'action du feu à la force des homes et des chevaux pour mouvoir les machines. 20 juin 1699", en: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1699 ... Troisième édition ... Paris ..., pp. 112-126.

BLONDEL, FRANÇOIS (1675-1683). *Cours d'Architecture enseigné dans l'Académie royale d'architecture*. 3 tomes. Paris: P. Auboin et F. Clouzier.

BLONDEL, FRANÇOIS (1683). *L'art de jetter les bombes*. Paris: Chez l'Auteur.

CARNOT, LAZARE (1786). *Essai sur les machines en général*. Dijon, Deffay.

COSTABEL, PIERRE (1988). "Leibniz et la notion de fiction bien fondée". En: Albert Heinekamp (Hrsg.), *Leibniz. Tradition und Aktualität*. Hannover, Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Gesellschaft, pp. 174-180.

FLECKENSTEIN, JOACHIM OTTO (1965), "Die Einheit von Technik, Forschung und Philosophie im Wissenschaftsideal des Barock", *Technikgeschichte*, Bd. 32, 1/4, pp. 19-30.

GALILEI, GALILEO (1638; 1898). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. A Leyda, appresso gli Elsevirii,* 1638. En: *Le Opere*. Edizione Nazionale. Firenze. Vol. VIII, pp. 39-318.

GERLAND, ERNST (ED.) (1881), *Leibnizens und Huygens' Briefwechsel mit Papin*, Berlin: Königliche Akademie der Wissenschaften.

JESSEPH, DOUGLAS M. (1998). "Leibniz on the Foundations of the Calculus: The Question of the Reality of Infinitesimal Magnitudes". Perspectives on Science, 6, pp. 6-40.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1686). "Brevis demonstratio erroris Cartesii et aliorum circa legem naturalem ..." *Acta eruditorum*, Leipzig, 1686, pp. 161-163.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1690). "De causa gravitatis, et defensio sententiae suae de veris naturae legibus contra Cartesianos", *Acta Eruditorum*, Leipzig, pp. 228-239.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1691). "De legibus naturae et vera aestimatione virium motricium contra cartesianos, Responsio ad rationes a Dn. Papino mense Januarii proximo in Actis hisce propositas". *Acta eruditorum*, Leipzig, pp. 439-447.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1849-1863). *Leibnizens mathematischen Schriften*. Hrsg. Von C. I. Gerhardt. Berlin & Halle.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (2003). *Sämtliche Schriften und Briefe*. Dritte Reihe: *mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel*. Fünfter Band, *1691-1693*. Berlin: Akademie Verlag.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (2004). *Sämtliche Schriften und Briefe*. Dritte Reihe: *mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel*. Sechster Band, *1694-Juni 1696*. Berlin: Akademie Verlag.

MAIER, ANNELIESE (1966^2, 1949). *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert*. Roma: Edizioni di Storia e Letteratura.

NIEDERSÄSCHSISCHE LANDESBIBLIOTHEK HANNOVER (LBr 714). "Leibniz Briefwechsel mit Denis Papin". En: *Leibniz-Briefe. Handschriften*, Signatur LBr 714.

PAPIN, DENIS (1689a). "De gravitatis causa et proprietatibus observationes". *Acta eruditorum*, Leipzig, pp. 183-188.

PAPIN, DENIS (1689b). "Ejusdem Dn. Papini Examen machinae Dn. Perrault". *Acta eruditorum*, Leipzig, pp. 189-195.

PAPIN, DENIS (1691). "Mechanicorum de viribus motricibus sententia, asserta a D. Papino adversus G. G. L. objectiones". *Acta eruditorum*, Leipzig, pp. 6-13.

PAPIN, DENIS (1695). "Oratio inauguralis Authoris dum Professionem Mathematicam Marburgi susciperet". En: *Fasciculus dissertationum de novis quibusdam machinis atque aliis argumentis philosophicis quorum seriem versa pagina exhibet.* Marburgi Cattorum. Excudebant haered. Joh. Jodoci Kürsneri ... pro Jacob Estienne Bibliopola Cassellano. Anno M DC XCV., pp. 138-154.

PAPIN, DENIS (1707a). *Ars Nova ad Aquam Ignis Adminiculo Efficacissime Elevandam*, Authore Dyonisio Papin, Med. Doctore, Mathes. Profess. Publ. Marburgensi, Consiliario Hassiaco, ac Regiae Societatis Londinensis Socio. Frankfurt am Main. Matthias Groot.

PAPIN, DENIS (1707b). *Ars Nova ad Aquam Ignis Adminiculo Efficacissime Elevandam*, Authore Dyonisio Papin, Med. Doctore, Mathes. Profess. Publ. Marburgensi, Consiliario Hassiaco, ac Regiae Societatis Londinensis Socio. Kassel.

PAPIN, DENIS (1707c). *Nouvelle maniere pour lever l'eau par la force du feu. Mise en lumiere par Mr. D. Papin, Dr. en Med. Prof. Mathem. à Marbourg, conseiller de S.A.S. de Hesse et membre de la societé Royale de Londres*. A Cassell Pour Jacob Estienne Libraire de la cour. Par Jean Gaspard Voguel. M. DCC. VII.

RANEA, ALBERTO GUILLERMO (1988). "Calculationes, Galileo and the Misfortune of Leibniz' A Priori Demonstration". En: Albert Heinekamp (Hrsg.), *Leibniz. Tradition und Aktualität*. Hannover, Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Gesellschaft, pp. 785-793.

RANEA, ALBERTO GUILLERMO (1989). "The a priori Method and the actio Concept Revised". *Studia Leibnitiana*, XXI/1, pp. 42-68.

SÉRIS, JEAN-PIERRE (1987). *Machine et communication. Du théâtre des machines à la mécanique industrielle*. Paris. Librairie philosophique J. Vrin.

SHAPIN, MICHAEL (1989). "The invisible technician". *Scientific American*, 77, pp. 554-563.

SZABÓ, ISTVAN (1987). *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*. Dritte, korrigierte und erweiterte Auflage. Herausgegeben von P. Zimmermann und E. A. Fellmann. Basel & Boston & Stuttgart: Birkhäuser Verlag.

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)
TOMO XV, AGOSTO DE 2012

VLADIMIR I. ARNOLD. FACETS OF HIS MATHEMATICAL THOUGHT

Víctor Rodríguez

Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
gauchovrr@gmail.com

Key words: Mathematics. History. Russian Mathematics. Cultural contexts.

SYNOPSIS

Some aspects of the thought of the mathematician Vladimir I. Arnold are explored. It is intended to emphasize on his particular conception of the discipline and its close interaction with empirical science. The approach is sensitive both, to the history of mathematics, and to epistemological and cultural matters that influenced the thought and life of this great scientist.

VLADIMIR I. ARNOLD. FACETAS DE SU PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Palabras clave: Matemáticas. Historia. Matemática rusa. Contextos culturales.

SINOPSIS

Se exploran algunos aspectos del pensamiento del matemático Vladimir I. Arnold. Se intenta remarcar su particular concepción de la disciplina y su estrecha interacción con la ciencia empírica. El abordaje se realiza desde un enfoque sensible a la historia de la matemática, y a cuestiones epistemológicas y culturales que incidieron en el pensamiento y la vida de este gran científico.

"I followed one line from the very beginning and there was essentially one problem I was working on all my life" V.I.A. (1)

GENERAL CONSIDERATIONS:

The purpose of this article is to give an introductory approach, from an epistemological and historical point of view, to the thought of the mathematician Vladimir Arnold. There are several reasons for justifying this choice, as I will comment below. But in order to clarify the topic, it is convenient to contextualize some basic concepts used here as a framework. By "epistemology" I will consider only a rather narrow view of the subject. It will be related to the way in which mathematicians legitimate their propositions, via theorems or conjectures. I will also be concerned with the art of making inferences into these theoretical fields, through models, analogies, functional rules, or cognitive schemes. Even though it is not necessarily correct, speculative adventures about the scope and nature of mathematics will be accepted as part of this area of research. On the other side, the historical aspects will be considered in a sort of amateur style of analyzing the conceptual dynamics, the generation of concepts, and the evolution of the rules that associate analogies to formal procedures and abstract languages, both, into syntactic and semantic contexts. Usually, the historical approaches include also some pragmatic profiles coming from external considerations about the scientific activity. Moreover, both sides of the analysis are embedded into axiological matters: aesthetical, ethical, and anthropological values.

The main motivation for the choice of the theme comes from considering that it is an interesting case-study, because of the deep connections between mathematics, history, the teaching of mathematics, and philosophical views about the subject. A second reason has been a personal interest in the thought of this mathematician, connected to a brief interaction with him in Moscow a couple of decades ago. This was through an activity he was doing in the Academy of Sciences of Russia. He was teaching some technical ideas of mathematics to researchers of that place, included a small group of philosophers. A third reason has been the conviction that this mathematician represents an excellent instantiation of a style of mathematical practice: a close interconnection between very technical topics of the discipline, with deep philosophical ideas coming from different sources, particularly from physics. Arnold is one of the last representatives of a magnificent tradition of talents dedicated to the study of the many faces of classical mechanics and its mathematical consequences.

In this case, I will attend only a small set of topics. It is inevitable the feeling of intellectual limitation looking the turbulent and deep waters of contemporary mathematics. In addition, it is not always possible to follow the details of the arguments of people whose creativity impregnate most of his productions. Since a couple of centuries, it is well known that the mathematical landscape is full of *terra incognita* for outsiders. In any case, it is supposed here that there are common grounds between philosophy and mathematics for working in the conceptual basis of ideas cultivated by some prolific thinkers. In the case under consideration, there is another point of interest from the perspective of the philosophy of science: the existence of two "cultures" in mathematics, associated to problem-solving and theory building activities, as has been expressed by Timothy Gowers and others great contemporary mathematicians. Naturally, this global scenario will be limited to a small bunch of questions around Arnold's comments, under the supposition that they are representative of the tensions among important currents of thought in the discipline. Thus, the goal is very modest: just a leaf of a tree into the forest of contemporary mathematics.

Arnold is very well known around the world as mathematician. It is possible to see his main contributions to the discipline dispersed in different pages in the web. But his thoughts have also set foot in different areas of history and culture, exhibiting particularly a special view on the nature and dynamics of mathematics and its social faces.

It could be said that he has a singular style of thought, sensitive to the geographical and cultural contexts in which he lived. In order to follow an approach close to these contexts, it is convenient to take into account different styles of research in history of mathematics, in particular, the normal tensions between internal and external views on the subject. Historians have discovered in many cases dark zones between these views: there are thoughts and new ideas that have a complex genesis. Sometimes they come from inspiration and creativity of singular scientists, sometimes they are deeply immersed into cultural communities. An important point for historians is the analysis of the relative autonomy of thinkers and their products. Some styles emerge from cultural backgrounds and produce outputs with "family resemblance". In an interview to Arnold, to the question "Do you notice any difference in the way people from different cultures do mathematics?" he answered that he was unaware for years of the differences, but that they do exist. Trying to explain his remark, he expressed that the Russian attitude toward mathematics depends on the old traditions of the Russian *intelligentsiya*; a concept difficult to translate because involves a bunch of idiosyncratic notions; but in the case of mathematics, he illustrates through distinct modes of considering the discipline: according to him, Russian mathematicians tend to regard all of mathematics as a living organism. *"In the West it is quite possible to be an expert in mathematics modulo 5, knowing nothing about mathematics modulo 7. One breadth is regarded as negative in the West to the same extent as one's narrowness is regarded as unacceptable in Russia"*. (2). Clearly French culture was very important to him, a part of his life, so may be of interest to bring a comparison he has used in different situations. According to him, mathematical assertions can be expressed in two main ways: Russian and French. The first way consists in choosing the most simple and specific case so that nobody can simplify the presentation without altering the principal point. The other, the French, generalizes the mathematical proposition in a way that nobody can generalize it further (3).

There is another problem with the dark zones between the internal and external components of a specific mathematical thought. In cases like Arnold's work, the level of deepness forbids in many areas to comprehend the degree of originality. It is usually a matter reserved to the specialists in the subject. History of mathematics has shown that in certain cases even that is not enough. Some ideas have crossed imperceptibly through generations of mathematicians, as happened with Hermann Grassmann and his *Ausdehnungslehre* (1844), translated usually as "theory of extension" (4), whose mathematical ideas were reconsidered several times during the XX Century, just to mention an example. The technical language sometimes plays a role with a dual face; precision on the one side, and vagueness on the other. In the case of Arnold, the problem-solving language that he used was notably clear syntactically, but the originality is not always easy to grasp until people work very hard on the subject.

For historians of science there are also some methodological and conceptual troubles related to recent episodes, in particular, the last decades. The main problem comes from the origin and nature of the sources. In the case of a famous man, usually takes a long time to recollect the most important elements: letters, draft papers, interviews, courses dictated in different institutions, testimonies of close friends and relatives, archives of the institutions connected to his academic life. In this regard, brief "pictures", like this one, help in the best of the cases to stimulate a program for further researches. One line of exploration particularly interesting is to characterize the "context of discovery-invention", and the relation between biographical episodes and the social environment. It would be, for instance, an important topic to analyze the relation between Arnold and the Soviet mathematical community around him in distinct epochs of his life. It sounds very attractive to follow and understand the connections of people like Kolmogorov, Petrovskii, Pontriagin, Gelfand, Markov, Khinchin, Aleksandrov, Novikov, but also of the younger generation, with exceptional mathematicians like Manin, Sinai, Kirillov, Gromov, among others. As far as I was able to leaf through the literature, something of this has been made, but there are many gaps that suggest important areas of research. The problem-solving activity, for instance, shows a rich menu of anecdotes that are meaningful for historians. Arnold has mentioned in several occasions the style of Kolmogorov as teacher. In several occasions he has used the case of the Kolmogorov – Arnold – Moser theory of Hamiltonian systems as example. Kolmogorov used to give exercises to second-year undergraduate students. One case was precisely the analysis of some completely integrable systems. Observing quasi-periodic motion looked for kind of motions more complex in nonintegrable perturbed systems. That was the genesis of KAM theory (2). A conceptual topic that deserves special attention here is that for Arnold, the consequences of this approach are more important than the initial problem, including new methods and proofs with application in practical matters, like gyroscopes, planetary orbits, and the research on plasma and thermonuclear fusion.

Considering the problem-solving activity as one of the most relevant features of this mathematician, it is adequate here to mention his big book "*Arnold Problems*" (3), (5). It covers problems formulated by the author since 1956 to 2002. It is not possible to be unperturbed by these 772 problems in 640 pages of imagination, creativity, and skillful domain of technical mathematical tools. The amount of problems is really very impressive. In the Author's Preface to the First Edition, he comments that for Poincaré, questions that allow a yes/no answer are usually related to irrelevant problems. The most interesting are those that allow a permanent development. He learnt also from Petrovskii the importance of open questions. *"Further choice of the problem from the set of unsolved ones is made by the student himself. To select a problem for him is the same as to choose a bride for one's son."* The problems in the book vary in complexity and deepness, so there is not a simple way of analyzing them from an epistemological point of view. For instance, it shows aesthetical and sociological facets that deserve special attention. With regards to the first perspective, the aesthetical, he expresses in the Preface to the Second Edition that when simplicity and beauty are in conflict between them, he prefers beauty, because it has been the main force to the discoveries that have been later useful. Sometimes, usefulness takes centuries to appear. He mentions in this regard the case of conic sections in space navigation and Maxwell equations in TV and other applications. Considering the second perspective, the sociological, he has supervised more than forty students, and has influenced on the work of many more in a direct and indirect way, in spite of the fact that he was not allowed to supervise foreign students at Moscow University because he was not a member of the party. History of mathematics nourishes from several sources. Through it we can appreciate the scope of theorems and calculi, written into languages of great expressive richness. But the ideas and styles of research, both of individuals and communities, have played occasionally subtle roles in the scientific production. Even though it is risky to talk of regional idiosyncrasies in these areas, it seems reasonable to accept, at least as a hypothesis, the existence of schools and currents of thought that give a proper tone to prestigious institutions, especially when they have marked for decades trends in the academic world. Soviet mathematics is an example of this, with its qualities and defects.

Even though it was easy to appreciate the growing exodus of scientists from Russia in the decade of 1990, mathematics was still in good health there, and Moscow was a paradigm of it, in spite of the hard social and economical conditions of the moment. In the last decades of his life, Arnold has been a mathematician of enormous prestige into the Academy, as far as I was able recollect impressions from his colleagues there. But this is a late story. His life was not always accompanied by a harmonic social context, and this influenced in different ways his interaction with colleagues of other countries, especially in the West. This is a showy circumstance because he obtained a notable result when he was nineteenth years old, namely, the solution of the 13° Hilbert problem (6). As it is known, this problem is related to the question if there exists or not a solution for all 7^{th}-degree equations using functions of two arguments. Hilbert took the general seventh-degree equation $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$, then he asked whether its solution, x, a function of the three variables a, b and c, can be obtained through a finite number of two-variable functions. Generalizing the question we can ask if every continuous function of three variables can be expressed as a composition of finitely many continuous functions of two variables. Arnold answered this question. A lateral comment about this may be valid. Sometimes mathematicians do not arrive to the end of the road solving a big problem. Usually, it is the beginning of a new one. In the case of Arnold, in spite of the success of his answer, which changed his image in the mathematical community, he continued with this line of research (7). For a general context of the Hilbert's problems, see J. Gray (8).

Around 1956, when he solved the 13° Hilbert problem

THE MAN AND HIS CULTURAL CONTEXT:

Through his last writings it is possible to appreciate his Russian idiosyncrasy and part of his vast culture. The book *Yesterday and Long Ago* (9) is full of rich anecdotes about his life and cultural environment, but it is also a good testimony of the particular situation in which the soviet mathematicians were, during the hard times of the communist regime for liberal thinkers. There are many ways of presenting that, but it seems to me that an anecdote may illustrate adequately the point. Arnold received most of the important prices given to scientists of his field, such us Lenin Prize (1965), Crafoord Prize (1982), Lobachevsky Prize (1992), Harvey Prize (1994), World Prize in Mathematics (2001), Prize of the American Institute of Physics (2001), Wolf Prize (2001). There is also an asteroid with his name now: 10031 ***Vladarnolda***, of the main belt asteroids, discovered in the Crimean Astrophysical Observatory in 1981. But he was not awarded with the Fields Medal in mathematics, probably the most popular and important price given to mathematicians under the forty years. According to his description, he was a candidate for this award in 1974, but the representative of the USSR in the International Committee, L.S. Pontryagin, as representative of the Soviet regime, imposed the strong condition that if

Arnold received the award the USSR abandoned the International Mathematical Union (9).

Arnold was born in Odessa, now part of Ukraine, in 1937 and died in Paris in 2010. As a boy he learned French, but wrote in Russian. He grew in a family that talked in English, German and French, but he understood only French. It is well known the influence of French culture in that epoch in that part of the world. Arnold died when he was still partially working in the Paris Dauphine University. This proximity with the French culture may have played some role in his particular attitude towards the way some French mathematicians understood mathematics, especially the Bourbaki group. Arnold was a strong critic of this school of thought about mathematics, but undeniably he interacted with them in different forms during several decades. He also remembers the importance of the lessons that René Thom gave and he was able to attend. We can see the presence of French literature in his life, mixed with Pushkin and other classics of Russian literature. Thanks to connections of his family with the social environment, he was able, been very young, to interact with several distinguished scientists, like A. Lyapunov. He absorbed from this environment a feeling of deep unity of all sciences and all European culture. In his perception, these scientists were familiar to areas of knowledge so far as Greek theater and quantum mechanics (9).

From the point of view of mathematics, his family was also very special. His great-grandfather worked on mathematical economics, and influenced later on mathematicians as L. Kantorovich. The famous soviet physicist L.I. Mandel'shtam, which exerted a deep influence on the Russian school of physics, was brother of his grandmother. Several important scientists, like I.E.Tamm, G.Landsberg, N.Papaleksi, M.Leontovich, were friends of his parents when he was a boy. His father was a mathematician who had been a student of people like S. Shatunovsky and Emmy Noether. That is why he said that after many generations of ancestors with this formation, he became a mathematician. But the influence was not as direct as we could suppose at first sight. The following anecdote is representative of his conceptual autonomy, and also of his style of confronting problems in the rest of his life. Asking to his father why (-1).(-2) = (+2), he received as answer that numbers form a field such that the distributive law $(x + y)z = xz + yz$ holds. If the product of minus by minus had not been plus, this law would be broken. This was for him, then a ten years old boy, a very strong lesson against the axiomatic method, and the Cartesian and Bourbaki deductive style (9).

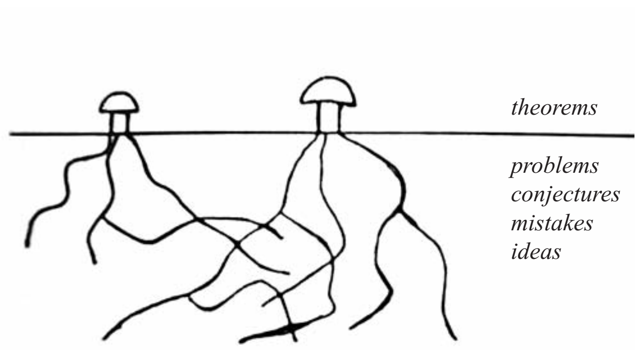
THE MATHEMATICIAN:

Arnold is known for his important contribution to many areas of mathematics: dynamical systems, differential equations, celestial mechanics, classical mechanics, algebraic geometry, symplectic geometry, hydrodynamics, theory of singularities, caustics and wavefronts. Some topics are directly associated with his name: the 13 ° Hilbert problem, the Kolmogorov-Arnold-Moser theory (KAM), Arnold's cat, Arnold diffusion, Trinities, A-D-E singularities, the gömböc: a peculiar convex three-dimensional homogeneous body which on a flat surface has one stable and one unstable point of equilibrium. Some of his books have been very popular among scientists for many years: *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (10), *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (11), *Ordinary Differential Equations* (12).

SOME OF HIS THOUGHTS:

This is one of Arnold's most picturesque views of mathematical activity:

"When you are collecting mushrooms, you only see the mushroom itself. But if you are a mycologist, you know that the real mushroom is in the earth. There's an enormous thing down there, and you just see the fruit, the body that you eat. In mathematics, the upper part of the mushroom corresponds to theorems that you see. But you don't see the things which are below, namely problems, conjectures, mistakes, ideas, and so on." (1).



The mathematical mushroom

His view of mathematics puts the discipline very close to physics, with a particular conception of the unity of the subject. But the empirical sources of it are so important for him that did not accept the game of abstraction by itself. He elaborated many arguments against the group Bourbaki, Hardy, and many others, and fought in a provocative mode with representatives of these other currents of thought.

With regard to the style of work in the discipline, he considered mathematics as a problem solving activity. He used to say that for him examples were much more important than general statements, and that he preferred induction to deduction. He was fond of Gromov's remark that you are never sure whether or not a problem is good unless you solve it. He also was a defender of the art of asking good questions; like G. Cantor, in his view, to ask the right question is harder than to answer it. In his conception of the mathematical activity, mistakes also play an important role. They are an instructive part of this activity, possibly as important as proofs. The mistakes are a source of new ideas and methods. In synthesis, mathematics is an adventure of ideas, with many concepts emerging as a result of problem solving activity. His respect for the empirical side of natural science oriented him to attend researches far from the algebra and similar abstract structures, like Mandel'shtam, Tamm, Novikov, Feinberg, Leontovich, and Gurvich, who tried to explain the ideas and non trivial facts of different scientific disciplines.

Arnold presents what can be considered as an extreme classification of mathematics. He divides all the discipline into three parts: cryptography, hydrodynamics, and celestial mechanics. In his conception, cryptography has generated number theory, algebraic geometry over finite fields, algebra, combinatorics and computers. Hydrodynamics has stimulated the development of complex analysis, partial differential equations, Lie groups and algebra theory, cohomology theory and scientific computing. Celestial mechanics allowed the development of dynamical systems, linear algebra, topology, variational calculus and symplectic geometry"(13). He adheres to a view shared with several important contemporary mathematicians, like Penrose, Atiyah, Smale, Novikov, Connes, and others, that the split of domains into drastic separated disciplines around mathematics and physics produced catastrophic consequences, with an increment of general ignorance and lack of opportunities of research for both sides (14). For him, a teacher of mathematics who has not followed courses on physics like those of Landau and Lifshitz, is out of the main currents of the subject today. In his view, mathematics is a part to physics, and because physics is an experimental science of nature, characterizes mathematics as the part of physics where experiments are cheap. An example is the Jacobi identity related to the fact that the heights of a triangle cross at one point. According to him, this is an experimental fact in the same way as that the Earth is round, that is, homeomorphic to a ball. It seems also interesting to mention that he has been indirectly considering other disciplines that deserve mathematical attention. In an occasion, remembering the Wigner *dictum* of the unreasonable effectiveness of math in natural science, he agrees with Gel'fand in extending it to the domain of biology (14).

The big motor of mathematical inspiration for Arnold is the existence of mysterious relations between distinct areas of the discipline, and this does not have a rational explanation for him. The development of mathematics was not due to technical progress, but to these strange relations. This is a meaningful lesson against the division of the subject. Here is a good example of this view, taken from his work. Caustics and wavefronts in systems of rays have been studied for long time, but only recently it was discovered that the singularities of systems of rays obey the group theory of Euclidean reflections and Weyl groups of simple Lie algebras. For Arnold this exhibits an unexpected and enigmatic relation between geometric optics, calculus of variations and the theory of optimal control, on the one side, and the theory of invariants of Lie groups and Lie algebras, algebraic topology and differential geometry, on the other. This contributed considerably to the development of the theory of wave propagation (15). He is the founder of the singularity and metamorphosis theory of caustics and wave fronts, based on a connection with the geometry of regular polyhedral and crystallographic symmetry groups.

Talking about the development of new trends in mathematics, called “chaos theory”, “nonlinear dynamics”, “catastrophe theory”, “bifurcation theory”, he emphasizes the central figures of Poincaré and Andronov. According to his view, Andronov, following Poincaré's ideas, applied this global theory to radio transmission systems, and because of that, the influence of this work arrived at areas like control theory and electronics. Laterally, this is for him another example of the French influence on Russian mathematics.

Several mathematicians are especially important for him, not only those close to natural sciences. The place of Abel, for instance, in his evaluation of mathematicians is relevant. In 1963 Arnold wrote his version of the Abel's proof of the non-solvability in terms of radicals of algebraic equations of degree 5 and higher using the topology of Riemann surfaces and groups of monodromy of the coverings. A singular anecdote on this is that he presented this result to schoolchildren in Moscow, and later one of them wrote a book on it. This is reference (16). For him, the only way of preserving the big mathematical culture elaborated during centuries is to return from complicated formulas to real thinking and simple ideas. This is the basis for new discoveries and applications. Arnold thinks that in mathematics beauty is a necessary external face of functionality and usefulness, and in this regard, a good guide to heuristic searches. He follows Poincaré's dictum that only non-interesting problems might be formulated unambiguously and solved completely. The important thing is to try to understand what may be changed in the problem formulation. He complements this view with the observation that there is no scientific distinction between pure and applied mathematics, just a social one (17).

As was mentioned above with other words, he criticizes what he calls “a self-destructive democratic principle” in mathematics that epistemologically equates different axiom systems and distracts mathematics from its contact with other sciences. His main criticism goes against bourbakists and their method to purify the discipline. This is one of the areas in which exhibits his most aggressive position (17). Axiology is present again in these contexts. Looking at these examples, he considers that most of contemporary mathematics does not satisfy the basic aesthetical requirements of a good work, neither will be of use (18).

There are many peculiarities related to special topics about which he has worked or thought. I want to attend a peculiar thinking related to the connection between mathematics and computation. Some of his works have influenced the mathematician S. Smale in his papers on computation, but he expresses his doubts about the division in two types of mathematics: one that contains hard problems, i.e., unsolvable without combinatorial search, and other that does not (17). Maybe this is just a superficial impression, or it may be a deep insight.

Closing this brief panorama of Arnold' style of thought, let me illustrate his view on proofs with a pleasant example. The title for this example could be his remark: *"the role of proof for mathematics is similar to that of orthography or even calligraphy for poetry"* (19). It is a problem he used to present in his lectures, and gives evidence about his consideration for the old school of mathematics. He asks to the audience to calculate this limit:

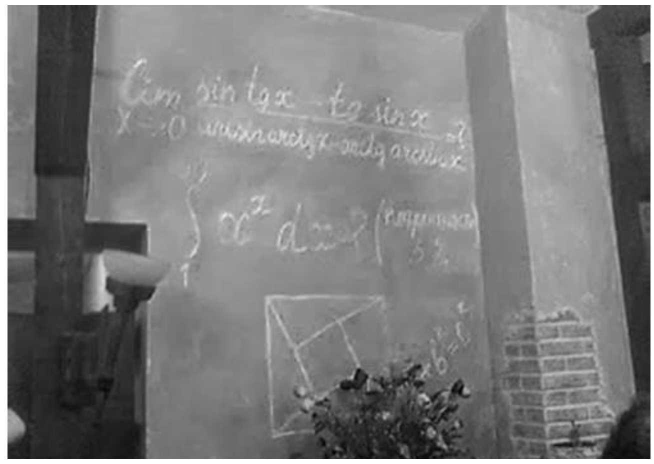
lim [**sin**(**tan** x) - **tan**(**sin** x)]/[**arcsin**(**arctan** x) - **arctan**(**arcsin** x)]

$x \to 0$

After presenting the problem, he usually mentioned in a provocative way that this problem would be solved in about a minute for people like Hooke or Newton, because they knew how to calculate. The legend says it was in Princeton that a famous mathematician solved immediately the problem, but usually this was not the case. This problem appears, for instance, first in a list of 100 problems he put in a special paper (20).

ON HISTORY OF MATHEMATICS

Arnold was not a professional researcher in history of mathematics, but he produced some notable results. There are many suggesting views on different episodes, from ancient times to recent mathematics.



This photography, taken into the coffee place of the Independent University of Moscow, illustrates the symbolic value of that formula for Arnold's students.

Let me introduce an example coming from ancient science. According to Arnold, mathematicians lack of a general culture on history of science. A case that he uses for illustrating this fact is a notable mathematician who lived in ancient Egypt: Thot, a land surveyor. This man discovered the natural series, in particular, that there is no maximal integer. He worked with the actual infinity. He discovered the first phonetic alphabet. Arnold mentions Plato's Phaedrus and a discussion of Ammon with Thot about the alphabet. Thot was arguing in favor of the ability to write down information and Ammon took the opposite position. Thot's alphabet derived in Jewish and Phoenician alphabets, and so on. But Thot, according to Arnold, also discovered geometry, inventing axioms, theorems, definitions, and drawings; even though not independent axioms. Arnold extends the example to the times of navigators and the measurement of the radius of the Earth (9).

He has written a beautiful book: *Huygens & Barrow, Newton & Hooke* (22). I will take from it a wonderful example of his work about Newton's *Principia*. Arnold finds in the *Principia* of Newton a remarkable theorem that had not been seen during almost 300 years. In a way is a modern topological proof of the transcendence of Abelian integrals hidden into the face of celestial mechanics. It is an eloquent example of Newton's deep thoughts, considerable ahead of the mean level of science of his time. According to Arnold, "Newton's proof is essentially based on the investigation of a certain equivalent of the Riemann surfaces of algebraic curves" (22, Chapter 5). For Arnold the fact that this was unnoticed is due to the style of thoughts of the mathematicians after Newton, because of the lack of training on multi-valued functions. See also (23).

Newton's Principia - Lemma XXVIII:

There is no oval figure whose area, cut off by right lines at pleasure, can be universally found by means of equations of any number of finite terms and dimensions. (21).

The history of this case is full of technical details. For instance, about self-intersecting closed curves that can be locally algebraically integrable, there are some letters between Huygens and Leibniz in 1691. In Cajori's revised edition of Principia (21), it is cited the work of Brougham and Routh (24) in which they consider that in the Lemma XXVIII Newton tried to prove that no figure oval, or no continuous curve limited to the finite part of a plane and returning to itself, is capable of definite quadrature.

"Newton's forgotten proof of algebraic non-integrability of ovals was the first "impossibility proof" in the mathematics of the new era – the prototype of future proofs of insolubility of algebraic equations in radicals (Abel) and the insolubility of differential equations in elementary functions or in quadratures (Liouville), and not without reason did Newton compare it with the proof of the irrationality of square roots of integer numbers in the "Elements" of Euclid." (22).

The astrophysicist S. Chandrasekhar, in a beautiful book on Newton's *Principia* (25), finishes a section related to this topic with a quotation from Arnold. Comparing the different epochs, he says: "*it is striking how Newton's original presentation is more modern, more understandable and richer in ideas than the translation due to commentators of his geometrical ideas into the formal language of the calculus of Leibniz"*. From this is easy to follow Arnold's remark that the interval between people like Huygens and Newton, and those like Riemann and Poincaré, is a mathematical desert in which you can only see calculations (18).

Epilogue

Arnold has elaborated an important cultural view on mathematical education (19). This is showed in many places in his work. For instance, in several occasions he has mentioned a course on Abel theorem at a high school in Moscow, under the suggestion of Kolmogorov. The surprising fact is the set of topics selected for this purpose: geometrical theory of complex numbers, topology of Riemannian surfaces, the fundamental group and monodromy of branched coverings, normal divisors taken as invariants, the description of groups of symmetries of regular polyhedral. Supposing that this narrative is true, the level of mathematics for that period of education is astonishing.

But there are many ways of learning mathematics. For him, the Seminar of René Thom at the Institut des Hautes Études Scientifiques in 1965, changed in a radical way his "mathematical universe". He enjoyed the way Thom discussed mathematics in an informal mode. On this episode, he expressed *"While I was never able to completely free myself from the strait-jacket of logic, I was forever poisoned by the dream of the irresponsible mathematical speculation with no exact meaning"* (2). But frequently these comments out of context are dangerous, because they may induce us to generalize opinions that have a limited scope. In his book *Catastrophe Theory* (26) express that some of the Thom's remarks were formulated in a way that it was impossible to decide whether they are true or false, concluding that it was a nice fact that the important mathematical discoveries of this man are independent of bad philosophy. As a personal anecdote, I mention that Thom was also difficult to follow even to philosophers, as I was able to see in a congress of philosophy of science in Uppsala in the early nineties in which he gave a conference.

It seems difficult to follow his style of research without considering that of Kolmogorov, his main adviser. In addition to his problem-solving attitude towards mathematics, it seems a nice complement to characterize his style of thought and work close to that of Poincaré, one of his idols among several others: Riemann, Minkowski, Weyl, Whitney, Smale, Milnor. For the Russians of the Academy of Science, Arnold was considered as the Russian Poincaré. He loved Poincaré geometrical mathematics. This is why I think it is adequate to finish this article with an additional remark of him about geometry. He considers that one of the halves of our brain is related to multiplication of polynomials and languages, and into the other half is processed the orientation of figures in space and the most important things in real life. From this he concludes that "*mathematics is geometry when you have to use both halves*" (2). He mentions Hilbert's remark that "*geometry is nothing more than a part of physics*"(27), but for him, the influence of Poincaré and Weyl has been deeper than the program of Hilbert in XX Century mathematics. He adheres to the angel of geometry, recalling the dictum of Hermann Weyl that the devil of abstract algebra and the angel of geometry are fighting for the soul of each mathematical theory. As was mentioned earlier, in his epistemological and ethical values, the bourbakists were in the doors of the hell.

Sergei Novikov's reminiscences help to clarify the context in Moscow, with the changes in the motivation for new areas of research; for instance, topological quantum field theory. Talking about Arnold's approach to classical mechanics, he says *"he found the book of Landau and Lifshitz…He told me that, after reading this book, he finally understood what mechanics was, and, after that, he understood how bad the book was"*. Admiring the book written later by Arnold on the subject, Novikov feels that it is a reconstruction of the same ideology. *"In Arnold's reconstruction, the mathematics is, of course, much better –it is a very good book for pure mathematicians-, but starting points for future research areas are missing. People who read Arnold's book arrive at an end-point."* (28).

There are many more topics to consider, but I esteem that the panorama presented is enough to give a picture of this special mathematician. I would like to end this article remarking again his compromise with his country and his sensibility for the state of mathematics in Russia, as it is well expressed in an article written in 1993 (29). His voice transcended the frontiers of his country and formed part of the concert of critics about some lines of research and teaching of mathematics in Europe and America.

BIBLIOGRAPHY

1. Arnold, V.I. *From Hilbert's Superposition Problem to Dynamical Systems*. In: Bolibruch A., Osipov Yu., Sinai Ya. (Eds.): *Mathematical Events of the Twentieth Century,* pp. 19-47. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
2. Lui, S.H. An Interview with Vladimir Arnol'd. *Notices of the AMS*, Vol. 44 (4), pp. 432- 438.
3. Arnold, V.I. *Arnold's Problems*. Springer-Verlag, Berlin, PHASIS Moscow, 2005.
4. Grassmann, H. *Teoría de la Extensión.* Espasa-Calpe Argentina S.A., Buenos Aires, 1947.
5. Tabachnikov, S. Review of Arnold's Problem. *The Math. Intelligencer* Vol. 29 (1), pp. 49-52, 2007.
6. Hilbert Problems: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html#prob13
7. Arnold, V.I. & Shimura, G. *Superposition of algebraic functions* (1976), in *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems*).
8. Gray, J. *The Hilbert Challenge*. Oxford U.P. 2000.
9. Arnold, V.I. *Yesterday and Long Ago*. Springer- Verlag, Berlin, 2007.
10. Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1989. *Mecánica Clásica. Métodos matemáticos*. Paraninfo, Madrid, 1983.
11. Arnold, V.I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, 2nd Ed. Springer-Verlag, Berlin 1988.
12. Arnold, V.I. *Ordinary Differential Equations*, The MIT Press 1978.
13. Arnold, V.I. *Polymathematics: Is Mathematics a Single Science or a Set of Arts?* In: Arnold V., Atiyah M., Lax P., Mazur B. (Eds.): *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, pp. 403– 416. IMU- AMS 1999.
14. Arnold, V.I. *On teaching mathematics*. Palais de Découverte, Paris, 7 March 1997. (translated by A. Goryunov).
15. Arnold, V.I. *Singularidades de cáusticas y frentes de ondas.* Rubiños-1860, S.A. Madrid, 2000.
16. Alekseev, V.B. "*Abel's theorem in problems and solutions*", Moscow, Nauka, 1976. English edition: Kluwer, 2004). P. 119.
17. Arnold, V.I. Will Mathematics Survive? Report on the Zurich Congress. *The Math. Intelligencer* Vol. 17 (3), pp. 6-10, 1995.
18. Zdravkovska, S. Conversation with Vladimir Igorevich Arnol'd. *The Math. Intelligencer* Vol. 9 (4), pp. 28- 32. 1987.
19. Arnold, V.I. *The antiscientifical revolution and mathematics*. Talk at the meeting of the Pontifician Academy at Vatican, 26 October 1998.
20. Arnold, V.I. A mathematical trivium. *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 46 (1), 1991. p. 271.
21. Newton, I. *Principia.* Vol. I. Univ. of California Press. Motte's Translation Revised by Cajori, pp. 110- 112).
22. Arnold, V.I. *Huygens & Barrow, Newton & Hooke*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
23. Arnold, V.I. & Vasil'ev, V.A. Newton's Principia Read 300 Years Later. *Notices of the AMS* 36(9), pp. 1148- 1154, 1989.
24. Brougham, H. & Routh, E. *Analytical view of Sir Isaac Newton's Principia*, London, 1855.
25. Chandrasekhar, S. *Newton's* Principia *for the Common Reader*. Clarendon Press, 1995.
26. Arnold, V.I. *Catastrophe Theory*. 3rd Ed. Springer- Verlag, Berlin 1992.
27. Hilbert, D. Naturerkennen und Logik, Naturwissenschaften, 1930, 959-963.

28 Novikov, S. *Role of Integrable Models in the Development of Mathematics*. In: Casacuberta C., Castellet M. (Eds.): *Mathematical Research Today and Tomorrow. Viewpoints of Seven Fields Medalists*, pp. 13- 28. Springer- Verlag Berlin, 1992.

29. Arnold, V.I. Will Russian Mathematics Survive? *Notices of the AMS.* Vol. 40 (2), 1993. p. 104. Special Issue on Mathematics in the Former Soviet Union.

APPENDIX I

BRIEF CURRICULUM VITAE OF VLADIMIR IGOREVICH ARNOLD

Place and date of birth: Odessa, USSR; 12 June 1937.

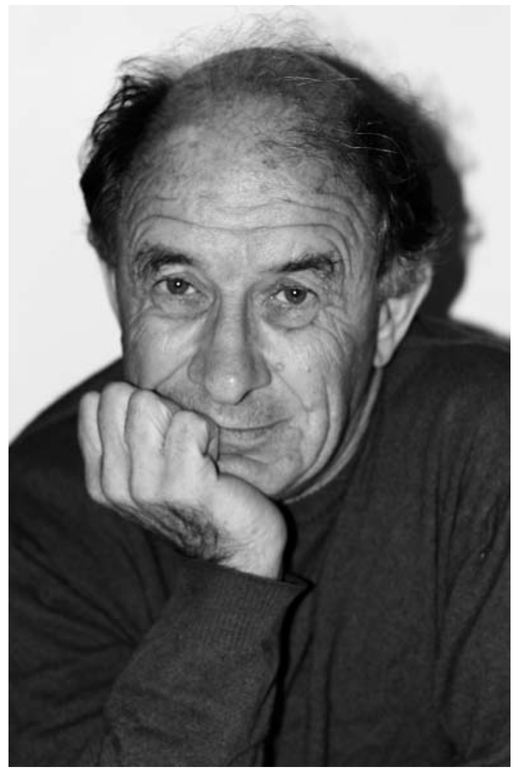
Education: 1954-1961 Faculty of Mathematics, Moscow State University, Moscow USSR.

MS Diploma work: “On mappings of circle to itself”; under supervision of Prof. A.N.Kolmogorov (1959).

PhD Thesis: “On the representation of continuous functions of 3 variables by the superpositions of continuous functions of 2 variables”; under supervision of prof. A.N.Kolmogorov; Jury - prof. A.G.Vitushkin and prof. L.V.Keldysh (1961).

ScD Thesis: “Small denominators and stability problems in classical and celestial mechanics”; profs. N.N.Bogoljubov, V.M.Volosov, G.N.Duboshin (1963).

Member of Academies: Honorary member of London Math. Soc. (1976), French Acad of Sc. (1983), National USA (1984), USSR corresponding member (1986), member (1990), Arts and Sciences USA (1987), Royal Soc. Lond. (1988), Acad. Lincei Roma (1988), American Philosoph. Soc. (1989), Russian Acad. of Natural Sciences (1991).



A photography of his last years.

Doctor Honoris causa: Univ. P. et M. Curie Paris (1979), Utrecht (1991), Warwick (Coventry) (1988), Bologna (1991).

Mathematical Prizes: Moscow Math. Soc. Prize for young mathematicians (1958), Lenin Prize (with Kolmogorov) (1965), Crafoord Prize of the Swedish Acad. (with L. Nirenberg) (1982).

Employment: 1961-1986, Moscow State University, Mech. Math. Faculty: assistent, dozent, professor, 1986-2010, Steklov Mathematical Inst., Moscow, 1993-2010, Universite’ Paris 9, France

APPENDIX II

The Arnold's Seminar in Moscow State University was an activity carried out during around 30 years. This is a manuscript of selected topics in 2009. Since 1993, there was a Parisian branch of the seminar at the same time in the Jussieu Mathematical Institute, formerly in Ecole Normale Superieure.

Curvature of classifying spaces for Brieskorn lattices
C. Hertling, C. Sevenheck: J. of Geom. & Phys 58 N11 (2008), 1591–1606

A law of large numbers for nearest neighbour statistics Proc Roy Soc A vol. 464 n° 2100 Dec. 2008, 3175–3192

Transversality in families of mappings. C T C Wall
Proc. London Math. Soc (3) 99 (2009) 67–99

Parking functions and vertex operators.
V. Dotsenko Selecta Math. New Series 14 (2008) 229–245

Combinatorics and topology of toric arrangements defined by root systems L. Moci
Rend. Lincei Mat. Appl. 19 N4 (2008), 293–308

Plücker formulae for curves in high dimension
CTC Wall, Rendiconti Lincei Mathem. and Appl. 20 N2 (2009) 159–178.

Diophantine approximation on non-degenerate curves with non-monotonic error function, N. Budarina & D. Dickinson
Bull. London Math. Soc. 41 N1 (2009) 137–146 <Мартин!>

The strong free will theorem J. Conway, S. Kochen
Notices AMS 56 N2 (Feb. 2009), 226–232

ВАК и наши журналы: Qui Prodest? О.В. Михайлов Вестник РАН 78 N12 2008 1075–1077

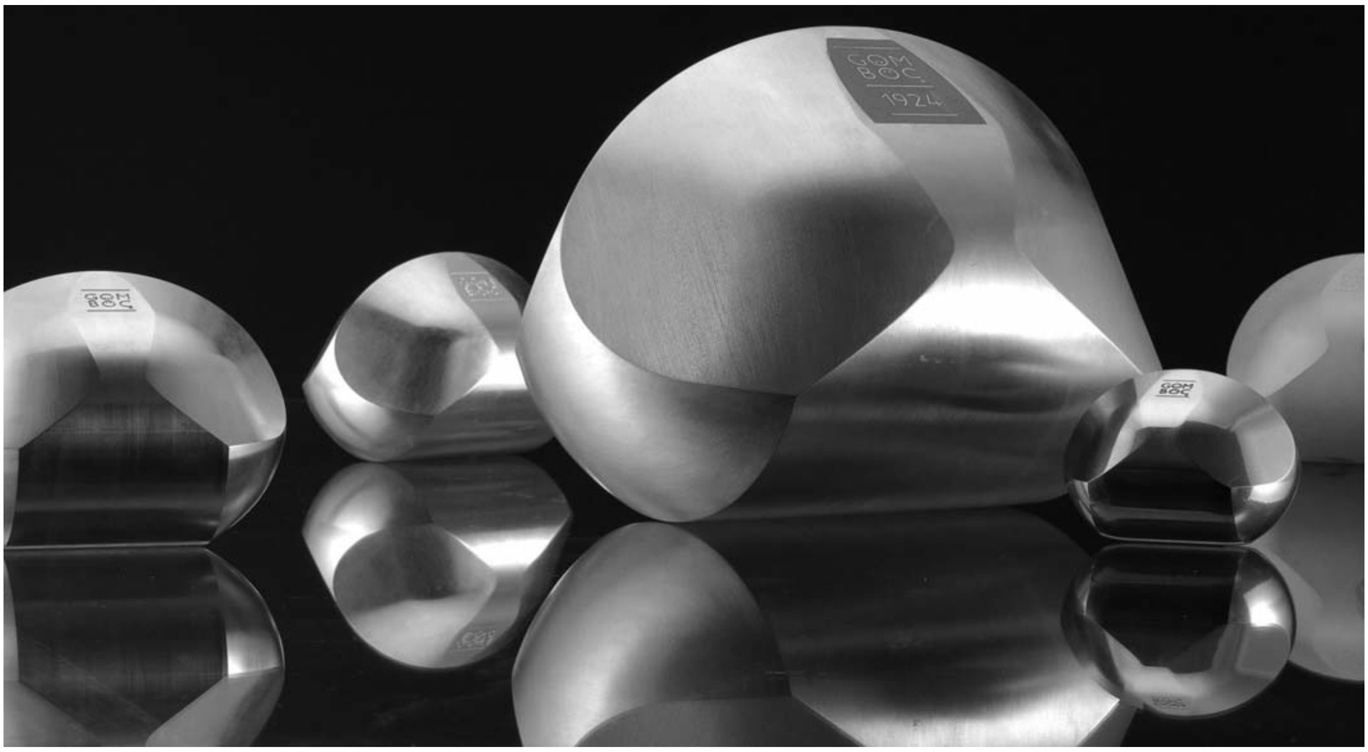
Multipartite entanglement in qubit systems, P. Facchi,
Rend. Lincei Mat. Appl. 20 N1 (2009), 25–67.

Small gaps between the products of 2 primes. Goldston/Graham/Pintz/Yildirim
Proc. London Math. Soc (3) 98 N3, 2009, 741–774.

Dynamo action in the presence of an imposed magnetic field, Hughes & Proctor
Proc. Roy. Soc. A, 465 (2105) 2009, 1599–1616

Computational Complexity with experiments as oracles. E. Beggs, J. Costa, B. Loff, J. Tucker
Proc. Roy Soc. A 465 (2105) 2009, 1453–1465

APPENDIX III



The Gömböc is the first known homogeneous object with only two equilibrium points, one stable and one unstable altogether. Arnold proposed in 1995 that a body like the Gömböc might exist. It was constructed by two Hungarians later.

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS. (CORDOBA, ARGENTINA)
TOMO XV, AGOSTO DE 2012

THE MATHEMATICAL PROPORTION AND ITS ROLE IN THE CARTESIAN GEOMETRY

Sandra Visokolskis

National University of Córdoba.
sandraviso@gmail.com

Key words: proportion, algebra, analytic geometry, Descartes.

SYNOPSIS

In the field of creativity in mathematics, it is interesting not only to highlight the deductive methods of cognitive contribution, but also rescue non-deductive procedures such as analogical reasoning, visual inferences and the use of metaphors, among others, which contribute in unsuspected ways in the expansion of this field of knowledge.

It is intended in this paper to account for the respectively proposed alternatives to deduction, via formalization in terms of a mathematical notion relegated and generally neglected, as it is the proportion. Indeed, in the history of this discipline, the concept of proportion has had a marginal account, contributing so overlapped on the formal establishment of various notions that marked the mainstream of mathematical knowledge.

In particular, this work will focus on the 17th century, when René Descartes marked a significant milestone in the transition which led the exclusive use of proportions for the understanding of geometric aspects towards the introduction of the algebra of equations, extracted from the Arabic tradition but at the same time transformed in an eastern mode as the mother of a mathematical standard basic everyday work tool.

We will hold that this transition from proportion to equation is one of the key historical moments for the understanding of a more sophisticated systematic science in clear direction towards the introduction of mathematical structures.

LA PROPORCIÓN MATEMÁTICA Y SU PAPEL EN LA GEOMETRÍA CARTESIANA

Palabras clave: proporción, álgebra, geometría analítica, Descartes.

SINOPSIS

En el campo de la creatividad en matemática, es interesante no sólo destacar los métodos deductivos de contribución cognitiva, sino también rescatar procedimientos no deductivos tales como el razonamiento analógico, inferencias visuales y el uso de metáforas, entre otros, que contribuyen de manera insospechada en la expansión de este campo del conocimiento. Se pretende en este trabajo dar cuenta de propuestas alternativas a la deducción, a través de la formalización de una noción matemática relegada y generalmente descuidada, como es la proporción. De hecho, en la historia de esta disciplina, el concepto de proporción ha tenido una historia marginal, contribuyendo así de manera solapada sobre el establecimiento formal de diversas nociones que marcaron la corriente principal del conocimiento matemático. En particular, este trabajo se centrará en el siglo XVII, cuando René Descartes marcó un hito importante en la transición que condujo el uso exclusivo de proporciones para la comprensión de los aspectos geométricos hacia la introducción del álgebra de las ecuaciones, extraída de la tradición árabe, pero al mismo tiempo transformada de un modo oriental como la madre de una herramienta de trabajo cotidiano básico estándar matemático. *Sostendremos que esta transición de la proporción a la ecuación es uno de los principales momentos históricos para la comprensión de una ciencia sistemática más sofisticada en clara orientación hacia la introducción de las estructuras matemáticas.*

1. INTRODUCTION

This paper focuses on the conceptual history of the mathematical proportion. The very rich and varied conceptual content of this notion has had and still today preserves a large and particularly controversial history. Has been shared by countless mathematicians, each under their own interpretation, and sometimes very dissimilar from each other, and curiously has not been exhaustively chronologized; among other things, by their participation overlapped in many historical cases, due to his theoretical marginality. Indeed, while central in a few authors, usually constitutes a tool for discovery and creativity, but not always has been recognized their relevance in a probative level of the results which contributes to its emergence.

After a brief introduction regarding the use of the proportion in Greek Antiquity, I will concentrate in the case of Descartes and his discovery of the Analytic Geometry, and I will try to show how the current notion of proportion in the Cartesian France from 17th century and his own philosophical of understanding mathematics, allowed him to arrive at its results based on historical textual supports.

2. THE PROPORTION IN ANCIENT GREECE

In the history of Western mathematics, the concept of proportion had a fluctuating history, sometimes a central one -especially in the Pythagoreans beginning- and others marginal, contributing in the latter cases as overlapped in the formal constitution of various notions that marked the mainstream of mathematical knowledge.

Our goal is to highlight the importance attributed to proportions in their history, with emphasis on an episode for which their contribution was prominent but not very highlighted developed by later historiography, evaluating their impact on the development of the Analytic Geometry in the hands of Descartes.

This will enable to enhance the role of the proportions as the basis for a new geometry in the 17th century, or in any case, the old geometry with new algebraic clothes, as central antecedent of the introduction of algebraic equations in the scope of this discipline.

Alongside Viète, Descartes is one of mathematicians that greater emphasis put on the transition from proportions to equations, and where appropriate, this led him to build a new type of procedure now also geometric: an algebraic analysis, as a result of a smart combination of ancient Greek geometry with the algebra of his time. This lead to postulate a unified common language, both for numeric quantities and geometric magnitudes, as part of a broader project inserted in a Mathesis Universalis.

All which is mentioned take us back to the emergence of proportion theory in ancient Greece, more precisely to the Pythagorean tradition. There the proportion becomes important for operating purposes into their mathematical sciences, that, since the Middle Ages were labeled and gathered in what Boethius called the Quadrivium, i.e. the combination of four disciplines: arithmetic, geometry - two strictly mathematical, as it would be today, and also music -harmony- and astronomy.

We can outline their uses and categories of analysis as follows:

	absolute	relative
pure mathematics	**Arithmetic**	**Geometry**
applied mathematics	**Astronomy**	**Music**

It should be noted that this scheme is not universally shared by all the authors of antiquity, but with small variants can manifest the issues discussed in these disciplines. For example, we can group arithmetic with astronomy if what we are studying are mathematical entities in themselves -absolute-; on the other hand geometry and music they refer to entities in relationship -relatives-.

Plato added stereometry to these four, i.e. three-dimensional geometry, while it was considered within the first Pythagoreans as part of the same geometry, probably in an effort to keep partitions of four elements in their discussions, given the value that itself was for them the number four.

In addition, in Plato, the criterion of disciplinar division was based on physical dimensions: while arithmetic operated with dimension one and geometry with dimension two, stereometry and astronomy operated with dimension three, one with static objects and the other with moving objects. On the other hand music was performed in terms of laws of earth harmony versus celestial harmony in the case of astronomy.

But other thinkers such as Proclus based on Theon of Smirna, took magnitude and movement as a criterion for disciplinar categorization. This led them to put arithmetic and music in the first place due to his lack of magnitude, i.e. the fact of being discrete and not continuous. But arithmetic is previous in his ordination because it deals only with numbers, while music adds to this the relations between them, what makes it relational and not absolute, as shown in the table above. And in terms of movement, geometry is previous to the spherical because the first deals of entities at rest while the second makes those dynamics.

From all the criteria once settled, here is interesting the continuous-discrete dichotomy. Concentrating now on arithmetic and geometry, according to as they were conceptualized in Greek Antiquity, the first one as a science of the discrete and the second as science of continuum, we see that the first, unlike the second has an operating analysis unit.

In fact, every number - that is, a positive integer, as was understood at the time- is obtained from the unit “one” a finite number of times. Unit fulfilled the role of generating each and every one of the elements in that discipline. But this was not the case with geometric quantities. And this will be the key to deal with the distinction between arithmetic and geometry for centuries, until we reach René Descartes, where this drastically changes.

For the Pythagoreans, arithmetic was not only the science of numbers, but that was the way to express it all, where everything was, in principle, reducible to number. It prevails in that context a perspective based on monads, reason why they established a one-to-one correspondence between arithmetic and geometry, understood the first in terms only of positive integers, biyectively partnering numbers with geometric points. Yet numbers were interpreted as collections of these points, becoming thus “figured“ numbers, and receiving names such as squares, triangular, hexagonal, among others, according to the form and geometric layout that they purchased.

This type of correspondence currently sounds familiar to us, given that since the late 19th century has been established in mathematics an equivalence between real numbers and points of a line, which then will be called the “real line”, due to such association. But we know that, while the Pythagoreans tried to extend this correspondence beyond natural numbers, they were unable to work with mutually incommensurable quantities, and thus failed the purpose of establishing a unit of measure in the geometry of continuum that would aloud that any other quantity would be commensurable with that unit.

This problem generated great changes in the mathematics of antiquity, beyond the historiographical dispute concerning what for some people would be a great revolution or not, a topic that we will not put under discussion here.

Then aside from this issue, we can assumed that it was produced an ontological transformation from a *theory based on Monads*, as the case of the Pythagorean, toward a *theory of measurement and measure*, already in Aristotelian-Euclidean times. This had to do, among other things with the problem of indivisibility or not of the chosen unit, since anything that is not subject to division will be considered to be "one" with respect to the reason why it is not divisible. And so, for Aristotle for example, the "one" is not a common property to all numbered things, but it is a measure: "the number is a measurable plurality by the one" (Aristotle, Met.X 6, 1057 a 3-4), problem that Plato, heir to the Pythagorean tradition's, don't think that concerns to arithmetic as such, but to "logistics" or arithmetic applied to daily issues, utilitarian, computational, commercial, material and not pure, origin of the idea of a "pure" mathematics.

Unlike the Pythagoreans, who consider the proportions the operating mathematical method par excellence, Plato puts the study of proportions in the area of logistics; no longer music will be the only discipline dealing with numerical relationships and proportions, but it will be a place for the sensitive material, although one minor, in a clearly pejorative attitude regarding their theoretical relevance. Because, for Plato, arithmetic, while dealing with ideal numbers, taken in themselves and not in relation to other matters external to them, passed to depend on a level of intellective purity concerning only great thinkers.

With this measure theory, and already in the Euclidean context, a new theory of proportions, extended from the Pythagorean one, presumably assignable to Eudoxus, expands to now be object of geometric work encompassing also the arithmetic.

In spite of this, Aristotle remains clinging to the Platonic tradition as regards their resentment of the widespread use of proportions. This dispute for the place that had or have not the theory of proportions had accompanied it from throughout its history, in spite of the schizophrenic attitude of multiple detractors that indiscriminately used it even without assigning a theoretical role consistent with its practical attitude, even in the Aristotelian case.

An important example of some accurate problems that dragged the theory of proportions arose in the case of the presence of negative numbers while with them, the inequalities that characterize a proportion according to the Euclidean definition, already are no more respected. Arnauld for example, in 1675 raises doubts regarding the rule of signs that allows that the multiplication of two negative numbers be a positive number. Why we can say, according to proportionality that 1 is to - 4 as - 5 is to 20, since 1 > - 4 but - 5 < 20?

What happens here, says Arnauld, while in all other proportions, if the first term is greater than the second, then the third must be greater than the fourth?" This issue leads Arnauld to postulate that the rule "minus times minus is plus" is a fiction! We may only use proportions in restrictive cases.

The stated historical sketch takes us to René Descartes, where to him, proportions have still a transcendental role, and will lead the natural transformation from proportions to equations, and ratios to fractions, and in general, from a mathematics based on ratios and proportions to algebra, first as art and methodology, for later in history be positioned as one theoretical discipline already in the 20th century.

3. INTUITION THROUGH THE EYES OF THE MIND

Now we will focus on the Cartesian approach. This leads us first to highlight a feature of his philosophy, namely his notion of intuition and their connection with the idea of deduction, central in mathematics.

Descartes says:

> By *intuition* I understand neither the fleeting testimony of the senses nor the deceptive judgment of the imagination with its false constructions, but a conception of a pure and attentive mind, so easy and so distinct, that no doubt at all remains about what we understand. Or, what comes to the same thing, intuition is the indubitable conception of a pure and attentive mind arising from the light of reason alone. (Rule III, AT 368)

Intuition is complemented by deduction, being both for Descartes the only two operations of our understanding that should be used to learn science. (Rule IX, AT 400) The role of intuition is to distinguish each thing "by small and subtle as they are", seeking to reach the most simple, pure, absolute, transparent and distinct "through a continuous and uninterrupted movement of thought".

According to Descartes, that leads us to be insightful, comprising each truth with a single act similar to that of *seeing*:

> We learn the manner in which mental intuition should be used by comparing it with vision. For whoever wishes to look at many objects at one time with a single glance, sees none of them distinctly; and similarly whoever is used to attending to many objects at the same time in a single act of thought, is confused in mind. (Rule IX, AT 401)

There is thus "two conditions to the intuition of the mind, namely: that the proposition is understood clearly and distinctly and in addition all at the same time and not consecutively". (Rule XI, 407)

All this said, intuition is a direct, immediate inspection that, according to Descartes, does not lead to error because it provides evidence and instant truth. Involves a type of lucidity like a sudden surprise, without a deliberate awareness of any eventual hidden rational process, and, inter alia allows us to capture mathematical ideas. And this will be done through representation with figures.

Actually, for Descartes, is by intuition that conception of ideas rises to relationships that already cannot be represented intuitively, and this will be the hop that he will make towards the algebraic symbolism.

Says Descartes in letter to Mersenne (July 1641, AT III 395):

> All [the mathematical] science[s], which could imply that depends mainly on what that brings imagination, since all, deal only with magnitudes, figures and movements, are not based on these figures of intuition, but only in clear and distinct notions from our mind. And that know them very well those who have only a little worked in deepening it. (Ariew, 2000)

But to reach algebraic equations, Descartes will make a way via the sensitive figures of the imagination.

4. REPRESENTATION WITH FIGURES: ICONIC REDUCTION

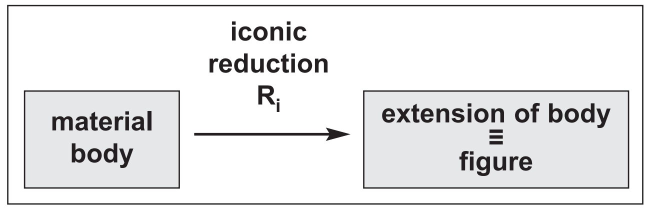
Although Descartes deals with general ideas -more related with mathematics- than with specific questions, he insists that

> If we wish to imagine something more here, and to make use, not of the pure intellect, but of the intellect aided by images depicted on the imagination we must note, finally, that *nothing* is said about magnitudes in general which cannot also be referred to someone in particular. (Rule XIV, AT X 440-441)

And here in this 14th rule is where Descartes explains how comes to recognize among all geometric figures that one that better adapts to generalize his idea of algebraic symbol which is still in nuce. This will be what we here call *figurative* or *iconic* reduction.

In the analysis, we have extensive material bodies. Descartes reduced the material from the matematizables objects. Once made abstraction of all property and accidental specification, bodies go, from being conceivable by the senses and the imagination, to be naked mathematical ideas in mind; extensions are conceived in a clear and distinct manner, and therefore are permeable to an infallible intellectual intuition, the only rational step that has to do in the decision of his mathematical reality.

It is the conscience of the mathematician who takes care of all the extensions that are represented in its scenario, given the evidence and certainty generated by and from its own mind, according to Descartes. And not only takes care of mental representations, but that is the consciousness which constitute the identity of their objects, since their expressions are reduced to the awareness that the subject has of them; and these mathematical ideas are identified and described independently of the external things that give them rise. The certainty of the mathematician sprouts of clarity and reflexive distinction, i.e. from the examination of these ideas making abstraction of what they represent. For Descartes is thus in the mathematician who is installed the supreme principle depending on what must be recognized the mathematical production throughout, first figurative and then symbolic production.



And states it as follows:

> Will not be of little benefit if we transfer those things which we understand is said from magnitudes in general to that magnitude you paint in our imagination easier and more distinctly than other species: now, that this is the actual extension of bodies abstracted from everything, except that it has a figure, it follows from what was said in Rule XII, where we understood that fantasy itself, with the ideas existing in it, is a true real body extensive and figurative. Which is also evident by itself, since that no other subject [rather than the figure] more distinctly displayed all the differences in the proportions. (Rule XIV, AT X 441)

This iconic reduction is driven as Descartes says, by a "cognitive force", which to this operational level consists of imagination[1], because for this author, extension is what is more easily perceived by the imagination. (Rule XIV, AT X 442)

This reduction does not let him still get a general idea, but it keeps within the scope of the particular. And that's where we operate with proportions. Newly in the next stage, the algebraic symbolization, is that Descartes would achieve the level of generalization that mathematics requires, and is where the equations legitimately enter.

It should be clarified then the difference that Descartes sets between figurative images and symbolic writing, which is that we here express in terms of the

1) In the context of the iconic reduction, this cognitive force is typical of the imagination, but is not always the case. Descartes will provide other functions to this force, all of which are associated with the ability to represent as present which is absent, and in general to have no intellectual representations, where his mode of thinking refers to the extensive bodies, where he presents the ideas of natural things. So, to imagine and to conceive can play separated roles in Descartes. Confront this with (Medit. II, AT VII, 28) and (Medit. VI, AT VII, 71/72/73).

duality icon-symbol. The iconic reduction displays a relationship between an object and a mental image conceived by a subject. Thus, what is activated in the mind is the extensional abstract concept of the body. The icons operate as visible "images" when sharing simple qualities with the thing (of which are images). This is what the relationship between bodies and figures is. But, on the other hand, in the Cartesian case, icons also play the role of "diagrams", since they represent the relationships of the parts of something (in this case of the dimensions of the figures, as we shall see below) through similar relationships between parts of the original body[2]. It is for this reason, because of their diagrammatic character that we can draw from these figures (qua *particularized magnitudes*) an isomorphic relationship with the algebraic symbols (being these last *generalized magnitudes*). This is what will enable in the next stage to a symbolic reduction.

But with this iconic reduction from bodies to its figured extensions, what is that wins the mathematician? Descartes says:

> In order to expose of what all them [figures] are going to help us here, you should know that all modes that may exist between entities of the same genus, should be referred to two main: *order or measure*. (Rule XIV, AT X 451, 5-8)

Thus, this iconic reduction allowed Descartes to find *two invariants*: *order and measure*. That is what is repeated as a pattern in all extensive figured quantities, abstracted from all sensitive and concrete qualities.

And these two invariant patterns are going to define the inherent feature of any mathematical science. Thus, to reach a mathematical level, a discipline has to exhaustively describe all its elements in terms of order and measure. Examples that Descartes said thereon are optics, mechanics, astronomy, harmonic music, and the obvious like geometry and arithmetic, among others.

The presence of these invariants will lead Descartes to postulate the existence of a widespread science encompassing all mathematical disciplines, which will be called *Mathesis Universalis*, continuing a tradition of his time in the search for the essential properties this general science must have.

But, in what sense the order and the measure unifies various mathematical sciences in a Mathesis Universalis? Because for example, already Aristotle had established a mode of generalized via his notion of abstraction, and this allowed him to highlight some disciplines at the expense of others, based on their ability to be more sweeping, until reaching a first philosophy on the cusp of all knowledge.

Indeed, Descartes, unlike the Aristotelian tradition, places in front the search for certainty and evidence inspired by a precise and rigorous *method*, rather than the objetual content that these sciences are made of, which do not divide and brings together the sciences based on ontological criteria as did Aristotle. While Aristotle puts the emphasis on the object, Descartes makes the method. And while Aristotle subordinates optics and mechanics to geometry, and music to arithmetic, depending on the causes of their knowledge, this does not imply that its abstraction release these sciences of his ontological ties, that it stands out before any methodological stance, as it is the Cartesian case. Thus Descartes does prevail two methodological guidelines mentioned above in the search for a unified mathematical discipline, namely: order and measure (*ordo et mesura*).

2) For a distinction between image and diagram, such as types of icons, confront (Peirce, CP, Book II, chapter 3).

Now, one wonders first what meant Descartes by “order” and “measure”, and in a second place, what are the areas of knowledge that fall under the pattern of “order and measure”. In order to answer the first question, Descartes considered two modes of existence of mathematical entities: either refer each other alone, and will be “absolute” entities, which come according to the order, or refer each other through a third party, and shall be “related” entities, proceed according to the measure. Examples of the first case are numbers, which operates in an orderly manner: we count them. Examples of the latter are geometric magnitudes, which are governed by the extent and purchasing entity to interact among themselves and by reference to a third body, the unit, which provides a common measurement between the two given. Of course here Descartes has taken a step further: succeeded in expressing a unit of measure for continuous magnitudes, as we shall see later, a key issue which differ his from the previous tradition as we have made clear in the first part of this work.

In response to the second question, Descartes began the development of the same in the second part of his *Discourse of the Method*, when he add at the end of it three appendices showing how it is feasible to apply his method to the dioptrics, meteors and geometry. And this is the beginning of an embracing project comprising all other discipline which is governed via order and measure.

Although Descartes posed at the beginning that there are two methodological guidelines, then makes a higher specification, and its strategy leads him to stay with a single one: first makes a reduction of measure to order and second explicit reduction of all order to linear order.

This means that from all figures that there are, Descartes will prefer the segment of straight line as that to which have been submitted and reduce all the other magnitudes.

As we shall see below, these segments in the Cartesian version, have the ability to operate as if they were numbers, while you may add, subtract, multiply, divide and extract its square root.

But this does not imply that segments are numbers but only that they operate like them. Indeed, what this is not is an arithmetization from all the mathematical disciplines -because this would imply that the only thing that refers to the order is arithmetic and this is not the case, but is arithmetic one of the mathematical sciences that operate through order- but a linearization in sciences comprising the Mathesis Universalis.

This is carried out by reducing the geometrical magnitudes to the notion of multitude of units, having previously stated what type of unit covers to all of them, question that we will detail below. Thus, the single formal object of the Mathesis Universalis is order, taking measure as a particular case of it.

In addition, characterized as well as a *science of order*, this Mathesis Universalis won’t be reduced to a science of the quantity only. Then it consists of a general science that encompasses anything that can be explained in relation to order (and measure) without applying it to any specific matter, i.e. importing little if such order is searched by numbers, shapes, sounds, stars, or any other object. (AT I 339, 18-20)

Thus, mathematics ceases to be considered a science of quantity in general, as it was performed the Mathesis Universalis in the 16th century, but a science of order. Once everything is reduced to this linear order, it is possible to carry out an operationalisation of the mathematical sciences through the introduction of the theory of proportions, which is the means by which we can then symbolize mathematics in terms of algebraic equations.

The intended separation of Descartes from the tradition of a mathematics of the quantity in favor of a search of order, allows him to distinguish on the one hand, a "common", practical, useful, attached to the sensitive world, commercial accounting, logistics unless already existent since Plato, which extends to all mathematical sciences, and on the other hand, this Mathesis, seeking the order and arrangement of all the things that he truly believes should be directing the mind and raise it on the outside world.

The dissolution of the material and the particular in favour of a more general science leads to find a criterion of unification and therefore to find a category, order, which reduce everything what will be the subject of this Mathesis.

This allows to exceed the scope of the quantitative to thus apply to the relations or proportions not considering nothing more than the result of this last between mathematical entities. Descartes says in relation to the particular Sciences:

> Seeing that even if your objects are different, they still agree, because they do not consider them nothing more than various relations and proportions that they can be found there, I thought that the best will be to review only these proportions in general, assuming them only on objects that they serve to make me easier their knowledge; and even without attaching them in any way, in order to implement them later more easily to all others who agree. (DM, II, 1-10)

Now we move on to explain how Descartes arrive to the linear unit of measurement. Given the extensive figures obtained by the iconic reduction now we select among all types of figures those one "with which more easily expressed all modes or proportions differences". (Rule XIV, AT 450)

But in general, there are two types of figures for Descartes: on the one hand the discrete, formed by points or trees, which show the multitude, i.e. the number; and on the other hand the undivided continuous figures, expressing the geometric quantities.

Descartes selects the second type, continuous figures, because it is "the gender of modes", where "each of the parties ordered by the mind, some relate to the others" by a third party, such as measures.

Iconic reduction should be emphasizing its dimensions in each figure: as well as in the case of multitudes, one can differentiate between number and numbered thing, Descartes comes to distinguish length, width and height in the (three-dimensional) bodies, long and width in (two-dimensional) surfaces and length in straight lines (one dimension) and finally the fact which are entities separated on points (dimension zero).

> The same [as in the case of numbers], if we deal with figures, we think that we are trying an extensive subject, intended only from this point: that is figured-made; If we try the body, we think that we are trying the same as long, wide and deep; If the surface, I conceive the same as long and wide, not taking into consideration the depth but not deny it; If the line, just as long; If the point, I conceive, not taking into consideration anything else, except it's being…We try, therefore, here on extensive objects, not considering at all in them anything else except the same extension. (Rule XIV, AT 446-447)

In this context, Descartes defines "dimension":

> By dimension we understand how and why according to which a subject is considered measurable: so that they are not only body dimensions length, width and depth, but also gravity either the dimension according to which subjects are heavy, speed or the dimension of movement; and as well other infinite things of the same type. The same division into several equal parts, whether real or just mental is actual dimension whereby we number things; and that measure constituting the number is a kind of dimension, even if there is any difference in the meaning of the name. (Rule XIV, AT 447-448)

Once recognized various dimensions in continuous figures, and after having detected a unit with what to compare them, is that Descartes comes to refer all the figures in terms of the notion of order.

> Continuous magnitudes due to the used unit, can all of them, sometimes be reduced to the multitude, and always, at least in part; and the multitude of units can subsequently be available in an order such that the difficulty concerned the knowledge of the measure depends finally on the inspection of the order only and that in this progress resides the higher aid art. (Rule XIV, AT 452)

As mentioned earlier above, we refer here to "relative" mathematical entities, operating each other using proportional means, and that express the geometry of the continuum, i.e., the scope of the measure, not of order.

The problem with this geometry is that there is not a unit of measure from which everything could be described and subsumed to it. Descartes has been in the search for such figurative unit. This leads him to ask for the more absolute and simple from which relate everything, and detected there which have priority over the others. Then describes that, from all the geometric figures that exist, the segment of straight line, the linear magnitude is the key to everything, will be its measure unit.

Rule VI is relevant in its idea of ordering of series, because implicit there is the idea of proportion and the absolute-relative distinction that, as set forth in there, has to do with the idea that a term can operate in a sequence as an extreme term or in another as a means and as a result their place in it is relative to what matters, or to the section in the sequence in which we focus.

> This proposition does not seem to show anything really new, however, contains *the main secret of the art*, and there is no [proposition] more useful in all this treatise: because it teaches that all things can be arranged in certain series, not without doubt insofar as they refer to a genre of being, as philosophers divided them according to their categories, but as soon as you can learn some from others. (Rule VI, AT 381)

Descartes is in search of the absolute:

> The *secret of all art* [is] namely that in all things we see on time the absolute. Some things in a view are more absolute than others, but considered otherwise are relative. (Rule VI, AT 382)

An example that Descartes seems to mention passing in this part of the text, which does not put too much emphasis will be central for our purposes:

> Among the things measurable, extension is something absolute; but among extensions, the length is. (Rule VI, AT 383)

Descartes detect already in the *Rules for the Direction of the Mind* - much earlier than in the *Geometry* as an appendix of the *Discourse of the Method* - that is, that length, is the most absolute, and thus the simplest to explain all measurable things -"are those which we call simpler in each series" (Rule VI, AT 383)- which are covered by the Mathesis Universalis, "not linked to any particular matter" entities (Rule IV, AT 378), i.e. "numbers, figures, stars, sounds or any other object", but such that "explain everything which can be searched in order and measure".

In Rule XIV Descartes summarizes what he meant by "unity" as a common measure of all other magnitudes:

> The unit is the common nature of which we previously said[3] should be equally involved in all the things that are compared among each other. (Rule XIV, AT 449)

> This unit is referenced immediately the first proportional and through a single relationship. (Rule XVI, AT 457)

That is, if with $u = 1$ we denote the unit, and with a lowercase letter "a" a magnitude, then $a = 1.a$ expresses a unique relationship, while for example $a^2 = a.a$ expresses two proportional relationships once we have symbolized these magnitudes, thing that Descartes will do in the next phase of symbolic reduction, which follows the iconic figurative reduction, from which emerges the unit of measure.

> We'll therefore hereinafter call first proportional to the magnitude as in algebra is called root, second proportional to which it is called square and as well to the other. (Rule XVI, AT 457)

> Unity…is here the basis and the foundation of all relationships, and wherein continuously proportional quantities series occupies the first grade. (Rule XVIII, AT 462)

> By number of relationships we must understand proportions followed each other in continuous order. (Rule XVI, AT 456)

But already in that phase then Descartes wants to leave behind the iconic reduction and focus only on the symbolic process and therefore he will ask not only to change approach but terminology, another more akin to its future analytical geometry. He says:

> Line and square, cube and other figures formed likeness thereof, such names should be absolutely rejected so that no squabbles the concept. (Rule XVI, AT 456)

It is necessary to note particularly that the root, square, cube, etc., are not anything other than in continuous proportion magnitudes which always assumes preceding that assumed unity. (Rule XVI, AT 457)

Turning to the issue of the absolute-relative distinction, we observe how Descartes leads to the introduction of the idea of "continuous proportionality" that extracts from arithmetic and now extends analogically, along with the notion of "numerical succession" to the ideas of relationship between elements simpler and less simple through a "chain of consequences"", are born where those series of things to look for, which has to be reduced any issue" (rule VI, AT 383) thus becoming owner of the complete series, Descartes said:

> I understand, thinking carefully, according to what reason are all issues that might arise about the proportions or relations of things involved and in what order should be searched: and this is the only thing that holds the most essential of all the science of pure mathematics. (Rule VI, AT 385)

This completes the explanation of what Descartes undertake figurative level to pass of figures of higher dimension than one, to the one dimension and stay with the drive to the end of the segment as many times as it will fit in each scale referred to it, and the corresponding power given its dimension reduction process.

5. SYMBOLIC REDUCTION: FROM FIGURES TO ALGEBRAIC SYMBOLS

Already early in the *Rules for the Direction for the Mind*, more precisely in Rule VI, AT 384 Descartes outlines his idea of a symbolic reduction in the construction of proportional series, anticipation of what will be its *Geometry* in relation to the role of algebraic symbols as subrogatories vicar entities:

> We must seek for *something* which will form the mind so as to let it perceive these equations whenever it needs to do so. For this purpose, I can say from experience, nothing is more effective than to reflect with some sagacity *on the very smallest of those things* we have already perceived. (Rule VI, AT 384)

These "small things" are precisely the synthesis of thought that Descartes reside as algebraic symbols in their Geometry, as *entities of a third order*, after real material things (first order) and geometric quantities (2nd order) are as figured extensions of the first.

3) Cf. Rule XII, AT 419.

And what role will satisfy the symbols in mathematics? He expresses it in rule VII, namely allow a quick tour through all and each of the steps of the deduction as *if it were* a serial intuition and not a concatenation of intermediate conclusions that requires from memory to do this continuously on the series. Here is where Descartes said that this process must be done

> until I have learned to pass from the first to the last so rapidly that next to no part was left to memory, but *I seemed to intuit the whole thing at once*. (Rule VII, AT 388)

something that certainly cannot be made in the Cartesian perspective, a type of intuitions in complex deductive processes, but only in simple immediate evidence.

The role of the symbol is thus to offer a sort of discursive and operational synthesis that allows access to a type of fleeting expression of the whole string, without having to walk step by step to remember its way: the presence of the symbol streamlines such processes as if they were intuited, as if they were captured immediately, impossible at a deductive level for Descartes:

> The capacity of our intellect is often insufficient *to embrace them all in a single intuition*, in which case the certitude of the present operation should suffice. In the same way *we are unable to distinguish with a single glance of the eyes* all the links of a very long chain; yet if we see the connection of each one to the next, it is enough to let us say that we have seen how the last is connected with the first. (Rule VII, AT 389)

We can then describe the process of symbolic reduction in three steps:

1) To switch from easiest to hardest thing, from simplest to most complex. This is undertaken via “sagacity“, i.e. the power of the spirit associated to deduction.

2) To distinguish through some kind of written simplification, absolute (and simpler) things from relative ones: once purchased the most “easy” (rule IX), it is needed to stop this “long time to get used to intuit truth clearly and distinctly“ (rule IX, AT 400), via “perspicuity”, the faculty of the spirit that enables to intuit distinctly every thing. So being insightful, is to use the intuition of the mind to understand every truth with a similar, single and separate act, and to attract small and subtle differences that are, leading to allow appreciate more simple, easy, timely, clear and obvious things as mental units.

3) To have an order, listing everything, so we can display immediately the passage of each other, and especially from the most simple, absolute and easy to more complex, relative and difficult ones.

The Cartesian distinction between intuition and deduction, the two unique spirit activities which lead all research, makes that everything considered simple would be captured by the first, which makes it with evidence and certainty, characteristic of this type of entities. On the other hand, to the extent that has complex entities, it requires proportional relationships between their dimensions, working with the deduction as a sum of not manageable connections in a single attentional act and therefore must be searched successively through memory.

> Given that the memory is usually monarchic, and so we are not forced to devote a part of our attention to refresh her, while we are delivered to other thoughts, quite rightly art invented the use of writing, trusting in whose help anything at all we already devoted to memory, but instead leaving the fantasy free whole to present ideas, we will write in the paper that should be retained; and this by means of signs very brief, so that, once, according to the ninth rule, we have inspected differently each, we can, according to the eleventh rule, go with a very fast understanding movement and guess at the same time as possible. (Rule XVI, AT 454-455)

But as a unit has already been established, Descartes credited a *sign*, turning it to represent the unknown or root of the problem to solve. (Rule XVI, AT 455)

> How much it has be referred to as one for the solution of a problem, we will express it through a single sign that can be formed at the whim of each one. (Rule XVI, AT 455)

And already explicitly in rule XVI formulates the synthesizing role of these signs:

> As for the things which do not demand the immediate attention of the mind, although they are necessary for the conclusion it is better to designate them by very brief signs rather than by complete figures; for thus the memory cannot err, and meanwhile the thought will not be distracted for the purpose of retaining them, while it is applying itself to deducing other things. (Rule XVI, AT 454)

It should be noted here an interesting and at the same time evocative distinction that Descartes sets between figured extensions (figures) and the symbols he introduces now to represent them synthetically.

Descartes hereinafter referred to as "magnitudes in general" (or we can shorten "generalized magnitudes") when talking about algebraic symbols, and in contrast to them, called "magnitudes in particular" (or "particularized magnitudes") when talking about extended figures:

> Thus when the terms of the difficulty have been abstracted from every subject, according to the preceding (XIII) rule, we understand that we have nothing further to occupy us except *magnitudes in general*. (Rule XIV, AT 440)

Descartes below clarifies that the generalized magnitudes require the support of the particularized magnitudes or figures:

> But if we wish to imagine something more here, and to make use, not of the pure intellect, but of the intellect aided by images depicted on the imagination, we must note, finally, that nothing is said about *magnitudes in general* which cannot also be referred *to someone in particular*. Of which is easily concluded that it will not be of little benefit if we transfer those things that we understand is they say of the magnitudes in general that sort of magnitude that paint in our imagination easier and more distinctly than the others.(Rule XIV, AT 440-441)

This distinction of two types of magnitudes can interpret the symbolic reduction as a *generalization* of previous figurative analytical processes somewhat confusing these last ones, mathematically speaking, and not entirely legitimate, as it will become his treatment in terms of symbols and algebraic equations, then attributing to the figurative analysis an inspiring and motivating role of what then consolidates as an algebraic expression.

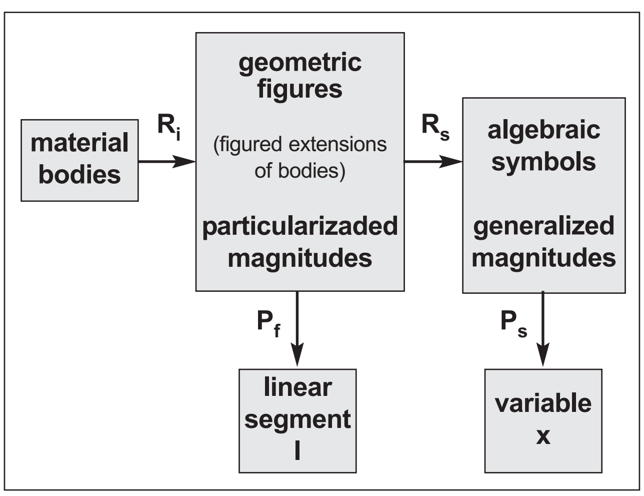
Thus, the youth text of the *Rules for the Direction of the Mind* could be interpreted as the process of discovery and genesis of its Analytic Geometry, as well as an extensible method to other disciplines. Figures would be discarded as axis of mathematical discussion, as Wittgenstein pulls the ladder once it has been used to scale to another level.

But this is relative in Descartes, because we will see that, as a closing of all algebraic process, he goes again to geometric curves to realize them throughout the process and acquired results.

This can show how important is the isomorphic connection between geometry and algebra in the Cartesian treatment: even though figures are adequate symbolization propellant agents, they don't leave to fulfill a significant role in the verification of the algebraic work.

In short, having found the straight line segment as the unit of measure for all continuous magnitudes, and then having achieved to symbolize them according to the algebraic formalization that he offers, Descartes explains how achieves such creative synthesis. Started by saying the following:

> Observing that, however different their objects, they all agree in considering only the various relations or proportions subsisting among those objects, I thought it best for my purpose to consider these proportions in the most general form possible, without referring them to any objects in particular, except such as would most facilitate the knowledge of them, and without by any means restricting them to these, that afterwards I might thus be the better able to apply them to every other class of objects to which they are legitimately applicable. Perceiving further, that in order to understand these relations I should sometimes have to consider them one by one and sometimes only to bear them in mind, or embrace them in the aggregate, I thought that, in order the better to consider them individually, I should view them as subsisting between straight lines, than which I could find no objects more simple, or capable of being more distinctly represented to my imagination and senses; and on the other hand, that in order to retain them in the memory or embrace an aggregate of many, I should express them by certain characters the briefest possible. In this way I believed that I could borrow all that was best both in geometrical analysis and in algebra, and correct all the defects of the one by help of the other. (DM, II, 10-20)



This last point that quotes Descartes in relation to the analysis of the ancients -based on geometric figures- and algebra -based on symbols without content- is that it is the key to reducing every magnitude to a linear order. But let's look at how to describe this ingenious discovery process.

For Descartes, figures to which refers the analysis of the ancient "does not aloud to exercise the understanding without excessive fatigue of our imagination". (Op. cit., II, 17)

Because the figures require that each time we perceive a different one, we should do a synthesis of it, necessary for their understanding. Therefore a reasoning based on figures requires great effort to capture each of them separately the information which can be extracted from them, and as necessary to establish a sequence of arguments between the different figures, which will converge to a final conclusion. Therefore an argument entirely drawn from a sequence of figures has a complexity that makes more difficult the process.

On the other hand, Descartes also complains of the "algebra of the modern", for reasons similar although with a different approach:

> [This algebra] is so subject to rules and ciphers that has become a confusing and dark art, capable of shear ingenuity, instead of being a science conducive to their development. (DM, II, 18)

Here the emphasis is on the sequence of rules that govern the step from a formula/equation or inequality or system of them to others. If we concentrate on the logical process that regulates the transition from formula to formula, not necessarily we can see how globally is that the first formula is transforming into the last one of the sequence due to the application of those rules, but only in justifying the transition by equivalents. This task, also loosing how important it is to see in a single blow this transformation of equivalents at the end of the process with the searched solution, if we are to acquire a full understanding of the finished process of proof.

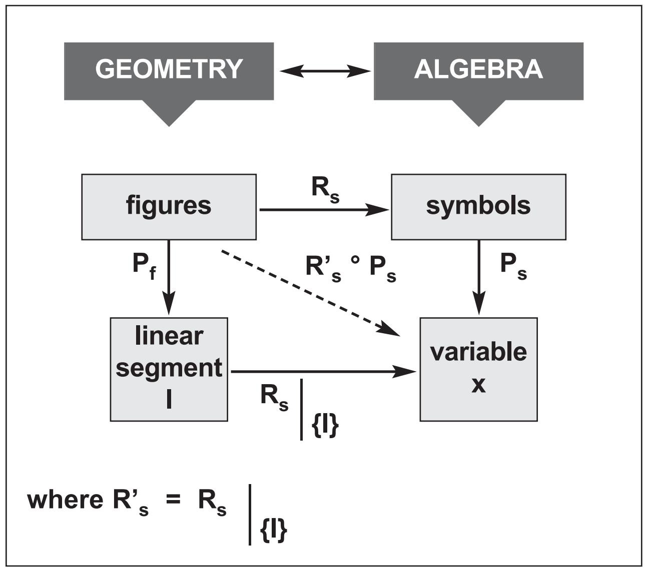
Thus to concentrate too much on figures and/or formulas on the one hand, or concentrate too much on logical rules that allow your step in the sequence that forms with them, both tasks separately don't tell the full process: paraphrasing briefly to Kant, we can say that figures and/or formulas without logical laws that govern them is a task however short-sighted or blind, i.e. don't see everything what we need to see; and rules/transformations without content is a sterile or empty task, i.e. don't consider the material in issue.

Produced the demonstrative sequence, it is difficult if not impossible in some cases to assimilate in a mental view coup, and usually without simplifying symbols is not describable unless one concentrates on each part of the sequence, focusing on the view and the thinking in that part concrete, and so with every subpart of the succession. We are in search of a global view caught instantly, a kind of binding perceptive fragile but solid to understanding.

Descartes will achieve a symbiosis between both proposals, offering an algebra to the ancient synthetic geometry, starting from the introduction of a unit of measure of the continuum, something never achieved before, a complementation of geometric analysis -by the choice of the simplest figure- with the arithmetical synthesis of the numerical simplicity analogically applied to these linear segments, once they -and their operations- be replaced by symbolical abbreviations.

This represented a synthesizing simplification, of a generalized unification of thoughts, instant uptake in the memory of several things at once, sudden apprehension of a full acceleration, integrating in a single thought several partial knowledge strategy.

We can synthesize the entire process using the following scheme:



6. PASSAGE FROM PROPORTIONS TO EQUATIONS

Once the symbolic reduction has been carried out, it is required to transform all proportions in equations (Rule XIV, AT 441), taking into account that the proportions are intended to show "comparisons" between magnitudes:

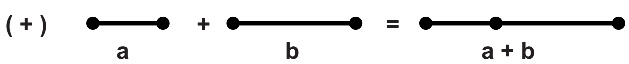
> All knowledge that is not obtained by the simple and pure intuition of an isolated object, is acquired by the comparison of two or more objects together. And indeed almost the entire industry of reason consists in preparing this operation; because when it is clear and simple, there is no need of any help of art, but of natural light alone obtained to guess the truth.
>
> It should be noted that the comparisons are only called simple and clear when what is searched and the given participate equally in some nature; and that the other comparisons do not require preparation by any other cause that because the common nature is not in a manner equal on both [the search and the given], but according to others certain respects and proportions in which it is involved; and that *the main part of human industry is not only in reducing these proportions, but to see clearly the equality between what is search and something known.* (Rule XIV, AT 440)

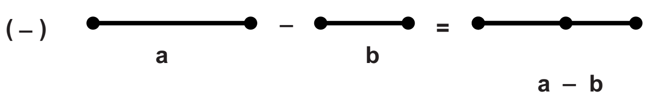
But this task would be impossible if is not translated the mode of operation with linear segments to symbolic operations, process that Descartes dryly exposes in the introduction to its Geometry.

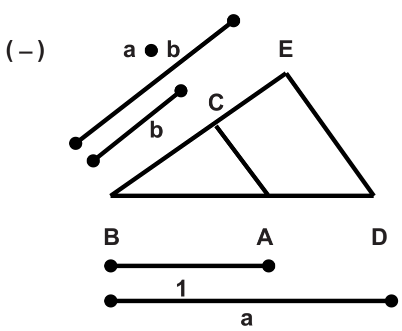
He transcribed in symbolic language the five algebraic operations of addition, subtraction, multiplication, division, and square root, which will be applied to the linear segments, from the translation of the operations through proportions that were originally made with linear figures.

Let's see how he understands this operationalisation, not without first referring in his own terms:

> I won't be afraid to introduce these terms [proportionate measures] in geometry to make me intelligible. (LG, AT VI 370)





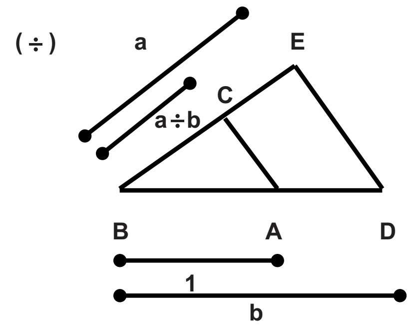


In terms of proportions, due to triangular relationships, it results:

$\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BE}$ in consequence BE = BC . BD since BA = 1

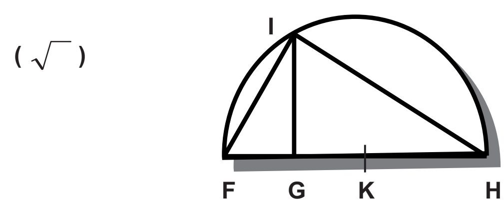
Now translated into algebraic symbolic language, it is:

$\frac{1}{b} = \frac{a}{a.b}$



In terms of proportions, we express the division of BE by BD, in terms of triangular relationships, joining points E and D. Then we draw AC parallel to DE, being BC the result of the division:

$\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$ hence BC = BE/ BD since BA = 1



Given the segment GH, we seek $\sqrt{GH}$. We add FG, which is the unit segment and splits FH = FG + GH in two equal parts with K as middle point from the segment FH. Then we draw the semi-circumference FH, marking it point I that is the intersection of the same semi-circumference with the segment perpendicular to FH by the point G. Then the search root is thus obtained.

Indeed, the triangle GIH is similar to triangle FGI. Therefore, it is:

$\frac{GI}{GH} = \frac{GF}{GI}$ given that GI •GI = GF •GH, it is $GI^2 = GH$

Hence, GI = $\sqrt{GH}$.

In these five calculus Descartes works via proportions, which he must transform into equations. Thereon says:

But often it is not necessary to trace this way such lines on paper, it's enough to designate each of them with a letter. So to sum the lines BD and GH, called one for 'a' and the other 'b' and write a + b, a-b to indicate the subtraction, a.b to indicate the multiplication, a/b to indicate division of a by b, a.a or a^2 to multiply a by itself, and a^3 to multiply this result once more by a, and thus to infinity, and $\sqrt{a}$ to obtain the square root and $\sqrt{C{\cdot}a}$ for the cube root. (LG, AT VI 371)

Once completed this operational translation, Descartes focuses on the procedure for accessing the equations from proportions, which describe the problem in question:

> If we want to solve a problem, should initially be assumed the resolution is performed, giving names to all lines deemed necessary for its construction, both to which are unknown to those who are known. Then without distinction between known and unknown lines, we must decrypt the problem in order to show more natural way relations between these lines *until you identify a means of expressing a same amount in two ways: this is what is understood by equation*, because the terms of one of these expressions are equal to the other. They must find as many equations as unknown lines have been supposed. (LG, AT VI 372)

These quotation marks the key passage from proportions to equations, which can also be found but in a more veiled way in Rule XIX, AT 468. Finally, following the twenty-first rule, applicable to reduce several equations in one single, "namely to those which deal with the fewest number of degrees in the series of continuously proportional quantities, according to which the terms have to be arranged in order" (Rule XIX, AT 468).

And this will make it possible to put in evidence, quite simply, the solutions to the problem in question. All that remains is seen in the totality of equations, that such a solution is compatible with them and proceed to revise the geometric curve that results from them.

7. PROPORTIONS AND ITS RELATION TO THE LAW OF HOMOGENEITY

There are a key element that usually go unnoticed and that is *the criterion of homogeneity of the symbols* in connection with the operations of multiplication and division, as well as the act of equating expressions with one another in the process of transformation of proportions to equations described, issue which since ancient times generated a number of difficulties.

In fact, Greek mathematics had the flexibility to freely multiply or establish reasons (ratios) with numbers each other, or with numbers and magnitudes, unlike what happened with the geometrical magnitudes each other. This did not prevent them to conceive for example the squares, rectangles, cubes or parallelepipeds as "metaphor cases" of a kind of multiplication between geometrical quantities. What did not give the label of "literal" to this type of operation was precisely the obstacle which represented the upkeep of a rule of uniformity that being to add or subtract each other magnitudes from different orders, or to match geometrical expressions with each other.

The above rule of uniformity was still a requirement in mathematicians prior to Descartes, such as Oughtred and other Europeans since the middle of the 7th century, and in particular in authors such as Stevin and Viète, even when they adopted a type of algebraic symbolism, but this symbolism couldn't even the numerical content in Stevin or geometrical in Viète that they were representing.

That is why in these mathematicians, the idea that the quantities or magnitudes should belong to the same category to operate with them was central. The rule of homogeneity to which we refer was described for example by François Viète in part as follows in chapter III of its "*In Artem Analyticem Isagoge*, Seorism excussa ab *opere restitutae Mathematicae Analyseos, seu*, Algebra Nova", excerpted as a separate piece from the *Opus* of the restored Mathematical Analysis, or *The New Algebra*, de 1591, and collected in the 1646 Edition by f. van Schooten, hereinafter abbreviated here as *Introduction to the Analytical Art*:

> The supreme and everlasting law of equations or proportions, which is called the law of homogeneity because it is conceived with respect to homogeneous magnitudes, is this:
>
> Only homogeneous magnitudes are to be compared (comparari) with one another.
>
> For, as Adrastus said, it is impossible to know how heterogeneous magnitudes may be conjoined.
>
> And so, if a magnitude is added to a magnitude, it is homogeneous with it.
>
> If a magnitude is multiplied by a magnitude, the product is heterogeneous in relation to both.
>
> If a magnitude is divided by a magnitude, it is heterogeneous in relation to it.
>
> Not to have considered these things was the cause of the darkness and blindness of the ancient analysis. (Klein, 1992, pp. 324-325)

Let's look at how Viète considers "cause of the darkness and blindness" in ancient mathematics not to understand well how to apply uniformity to operate, and this was related to the bias of consistency not achieved between magnitudes such as side (latus) and square (quadratum), prejudice it which will disappear in the case of Descartes in establishing a one-dimensional algebra that ends up being so non-dimensional, given that he have places all magnitudes in the same category when he reduces them all to one dimension, via a detachment of the magnitudes from its geometrical constraints, possible only due to the conjunction of the two processes of reducing iconic first and second symbolic representation, from a special figurative abstraction (the straight line segment) to an abstraction of all figurative content in general, i.e. to a linearization followed by a symbolization.

In authors such as Viète and Stevin prevail the conservation of the property that all constituent element are of the same type, showing no variability, which are the same throughout in its properties, similar in kind, of a uniform quality at every instance, only composed with elements of the like nature, possessing a certain mode of uniform structure, reducing all to a single type where to operate independently of the other properties, in order to simplify its solution.

Here the homogeneity is concerned only with the dimension. The condition of homogeneity of dimension was eliminated in the context of the algebraic symbolism of Descartes precisely because of its process of double reduction (iconic and symbolic), whereas in the aforementioned previous algebraic conceptions, to operate between quantities of different order does not make sense geometrically.

Why not ignore the great progress in algebra who managed Viète using variable coefficients, the practice known as "literal notation", using letters of the alphabet called "species" by him rather than numbers to represent and distinguish both the unspecified known (with consonants) and the unknown positive quantities (with vowels), constant and variable terms in all equations, solving them in a more general form, and not each by separate as a particular problem that stands by itself. This procedure of application of a literal notation stimulated the expansion of the theory of equations generating the possibility for studying the relationship between the coefficients of an equation and the roots of it. But the development didn't reach its best generalization due to the use of a syncopated algebra. Descartes did change this situation.

It's worth noting that while the law of homogeneity had already been discarded by Descartes, it retained some force with modifications by means of an extension of the same, as it has been the case exemplary and innovative of Leibniz, for whom this law was susceptible of application to the context of the infinitesimal quantities. Indeed, Leibniz introduced a kind of transcendental law of homogeneity according to which all terms of an equation must be of the same order of infinity, and where terms of inferior order must be negligible[4].

So, an equation will be called homogeneous in this special sense if every summand has a dx or a dy as a factor. This extended law will be applied as a justification of the rule of product that deals with the consistency of equations, noticing that the term dx refers in his works to the infinitely small change or difference in x as one move along a curve on a plane[5].

Thus, the extended law of homogeneity is placed to help preventing mistakes at the level of infinitesimal quantities, saving the entire problem which means understanding what are this type of mathematical entities, issue not clearly explicitly in an irrefutable manner by Leibniz. In effect, in the process of assuming them to be practically zero in spite of not being really existing mathematical quantities, apparently occupied for Leibniz a fictional role, "similar to imaginary roots [in algebra], except that it would make our calculations wrong, these fictions being useful and based in reality[6]." The same was posed by him about the infinite:

> The infinite, such as we conceive it, and the infinitely small, are imaginary, and yet apt for determining real things, just as imaginary roots are customarily supposed to be. (Leibniz, 1862, GM III, p. 499)

Finally, in a letter to Des Boses, he said in reference to this:

> I once demonstrated that these expressions [infinitely small and infinitely great magnitudes] have a great use both abbreviating thought and aiding discovery, and that they substitute [a quantity] as small as one wishes, and since any error will always be less than this, it follows that no error can be given. (Leibniz, Letter to Des Boses, 11 March 1706; 1862, GP II, p. 305)

It is not surprising this extended maintenance of the law of homogeneity by Leibniz, since this law actually holds a much more general idea that its application only to the dimensions of the concerned geometric entities, as it was the application which just Descartes eliminated after his contribution of Analytic Geometry.

In fact, the property of homogeneity has been and remains today a very wanted in any mathematical context requirement, and not only concerning a geometrical problem. We can say that it characterized the mathematical spirit seeking uniformity as a condition of simplicity and economy that enable a more general operational level.

Eagerness to generality never ceased to describe the most mathematical objective. And the idea of proportionality seems to have been introduced and become widespread only for the purposes of expressing this generalized uniformity that seems to be connatural to human beings.

G. H. Hardy, in his lovely book *A Mathematician's Apology* insists that the Greek mathematics "had begun by assuming (in accordance, I suppose, with the 'natural' dictates of 'common sense') that all magni-

4) Cf. (Bos, 1974, p. 33).
5) Cf. (Leibniz, 1989, p. 13).
6) Cf. (Leibniz, 1862, GM IV, p. 91/98).

tudes of the same kind are commensurable, that any two lengths, for example, are multiples of some common unit, and they had constructed a theory of proportion based on this assumption." (Hardy, 1940, pp. 100-101)

Notice how the reference to the same type of magnitudes, - and thus to some homogeneity -, is central to the basic assumptions of the ancient Greek mathematicians in the commentary of Hardy. Continues this mathematician trying to explain why the strong intuitive assumption of homogeneity has operated against the mathematical development, acting as a brake and obstacle and thereby generating a state of collective surprise in this regard:

> Pythagoras's discovery exposed the unsoundness of this foundation, and led to the construction of the much more profound theory of Eudoxus which is set out in the fifth book of the *Elements*, and which is regarded by many modern mathematicians as the finest achievement of Greek mathematics. This theory is astonishingly modern in spirit, and may be regarded as the beginning of the modern theory of irrational number, which has revolutionized mathematical analysis and had much influence on recent philosophy. (Hardy, 1940, p. 101)

The notion of dimensional homogeneity latent at the time of Descartes is one that the previous algebraists considered as inevitable in any mathematical analysis, given its generalized power of uniformity. But Descartes not only disobeyed overcoming this kind of uniformity but that also obtained a further class of generality by introducing its Analytic Geometry and with it a kind of symbolism capable of holding much of the problems which attempted to resolve other algebraists of his time in it.

As says Hardy on the notion of generality in mathematics, the results obtained by Descartes may be considered

> …capable of considerable extension…typical of a whole class of theorems of its kind…constituent in many mathematical constructs, which is used in the proof of theorems of many different kinds…the relations revealed by the proof connect[ing] many different mathematical ideas. (Hardy, 1940, p. 104)

It is for all these reasons that we believe that the notion of proportion and its collateral law of homogeneity had a central role, both in accepting insights not always well founded, at the time of rejecting and then expand the notations and concepts that they represent.

8. CONCLUSION

We ask to finish, how does this proposal differs from the old synthetic geometry? Only in an agile symbolization? And furthermore, why is it enough with this analytical-algebraic procedure to justify the search for solutions? Why to avoid the subsequent synthesis?

Ancient Greek geometry was necessarily attached to the expression in terms of geometric figures, to the extent that a geometrical problem should inevitably do the following:

8.1 Analytic or regressive process

8.1.1 Construct geometrically the known elements mentioned in the problem.

8.1.2 Determine the locus of unknown elements.

8.1.3 Specify the position relations on proportionate terms.

8.1.4 Point in such proportions the magnitude relations that facilitate the solution sought in terms of figured representations.

8.1.5 Express the equality of the magnitudes reached in terms of the overlap of lines or figures.

8.2 Synthetic procedure

8.2.1 Verify necessarily the analytical process as the truly demonstrative stage.

Instead, the algebraic resolution in the Cartesian interpretation, is a process of transformation by equivalent equations, with which all system has reciprocal roots that make the regressive road, a substitution step by step by equal solution set, doing unnecessary a subsequent synthesis process: the analysis is sufficient and therefore also implies a demonstrative method and not only a process of discovery.

It is observed that anything that ensures the reversibility of calculations in the Cartesian system also serves as a tool to discard in the symbolization, to those curves that will not respond to this criterion, to the extent that Descartes called them "mechanical curves" and excluded them from any algebraic formalization.

On this issue, says Descartes in response to *Second Objections*:

The analysis shows the true way by which one thing has been methodically invented, and see how the effects depend on the causes; so if the reader wish to follow it, and directing his look attentively to everything that it contains, not mean less the thing thus demonstrated perfection, and will not make it less yours than if he had invented.

Synthesis, on the contrary, via a very different way and as examining cases by their effects (although the test that it contains is also frequently from effects to causes), really clearly shows what is contained in its conclusions, and served from a long sequence of definitions, principles, axioms, theorems and problems, with so that, if denied some consequences, then it will show how they are contained in the background, and boot the consent of the reader by obstinate and stubborn to it may be; but it does not grant, as the other, a full satisfaction to the spirits of those who want to learn, because it does not teach the method by which the thing has been invented.

Old geometers they used to serve only from this synthesis in his writings, not because it ignored completely the analysis, but I think, because felt it so much that it reserved for them alone as an important secret. (SO, AT IX 121-122)

Secret that we believe Descartes could begin to reveal and that, in an intellectually generous attitude comes to share, yet knowingly - by what their words expresses - that many of his colleagues assumed a position no less than conservative in the possibility of transmitting the inventive art or Mathesis, as it used to be called in the *Regulae*[7], and that it reaches to equate to *Algebra* as he understood it, i.e. a discipline that discovers relations, expresses them in proportional terms, and then transforms them into equations.

In this regard, Descartes says:

> Some vestiges of this true Mathesis appear still in Pappus and Diophantus, which, although not in the early days, lived, however, many centuries before now. And it would easily believe that it was later hidden by the same writers because of a disastrous cunning; as well as it is true that this have been done by many artists with their inventions, perhaps they feared that it was very easy and simple, and reduce their value disclosed once, and preferred, to admire them, showing instead some sterile truths exposed subtly from consequences, as products of their art, rather than teach the same art that would have made absolutely disappear admiration. There was, finally,

7) Cf. (Rule IV, 373-378).

some men of great spirit, who have tried to resuscitate it in this century: because that art does not seem to be anything other than what they call, with foreign name, *Algebra*, so that it is available to release it from multiple numbers and unexplained figures which it is overloaded, so that does not lack more extreme clarity and ease, that we assume there must be at the true Mathesis. (Rule IV, 376-377)

Descartes thus provides a milestone on the road that runs through mathematics, drawing than to his own words are virtue and honesty, preferable before pleasure and utility, for the sake of cultivating "certain first seeds of hard truths of nature." in the human spirit. (Rule IV, 376) They will come more mathematicians in its future to contribute to this great enterprise of creativity.

BIBLIOGRAPHY

ARIEW, R., COTTINGHAM, J. & SORELL, T. (1998): *Descartes's Meditations: Background Source Materials.* Cambridge: Cambridge University Press.

ARIEW , R. (ED.) (2000): *René Descartes. Philosophical Essays and Correspondence*. Indianápolis/Cambridge: Hakett Publishing Company, Inc..

ARISTÓTELES (1970): *Metafísica*. 2 vols. Editor V. García Yebra. Edición trilingüe. Madrid. Editorial Gredos.

BOS, H. J. M. (1974): Differentials, Higher-Order Differentials, and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for the History of Exact Sciences*, 14, pp. 1-90.

BOS, H. J. M. (1981): On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie. *Archive for the History of Exact Sciences*, 24, pp. 295-338.

BOS, H. J. M. (1984): Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory: the 'Construction of Equations,' 1637-ca. 1750. *Archive for the History of Exact Sciences*, 30, pp. 731-780.

BOS, H. J. M. (1993): *Lectures in the History of Mathematics*. Providence: American Mathematical Society.

DESCARTES, R. (1947): Discours de la Méthode. Texte et commentaire par E. Gilson. Paris: Librairie Philosophique. J. Vrin.

DESCARTES, R. (1954): *The Geometry of René Descartes*, translated by David Eugene Smith and Marcia L. Lantham. New York: Dover Publications.

DESCARTES, R. (1977): *Meditaciones Metafísicas con Objeciones y Respuestas.* Traducción, Notas e Introducción de Vidal Peña. Madrid: Ediciones Alfaguara S. A..

DESCARTES, R. (1980): *Descartes. Obras Escogidas.* Traducción, Notas e Introducción de E. de Olaso y T. Zwanck. Buenos Aires: Editorial Charcas.

DESCARTES, R. (1981): *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría.* Traducción, Notas e Introducción de G. Quintás Alonso. Madrid: Ediciones Alfaguara S. A..

DESCARTES, R. (1983): *Œuvres de Descartes*, 11 vols., edited by Charles Adam and Paul Tannery, Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

DESCARTES, R. (1984): *Reglas para la Dirección del Espíritu.* Traducción, Notas e Introducción de J. M. Navarro Cordón. Madrid: Alianza Editorial.

DESCARTES, R. (1988): *The Philosophical Writings of Descartes*, 3 Vols., translated by John Cottingham, Robert Stoothoff, and Dugald Murdoch (Volume 3 including Anthony Kenny). Cambridge: Cambridge University Press.

DESCARTES, R. (1996): *Meditations on First Philosophy*, translated by John Cottingham. Cambridge: Cambridge University Press.

DESCARTES, R. (2004): *Discurso del Método.* Traducción, Notas e Introducción de M. Caimi. Edición bilingüe. Buenos Aires: Ediciones Colihue S.A.

DESCARTES, R. (2009): *Meditaciones acerca de la Filosofía Primera. Seguidas de las Objeciones y Respuestas.* Traducción de J. A. Díaz. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

GAUKROGER, S. (1980): *Descartes' project for a mathematical physics*. In Gaukroger (Ed.)(1980), pp. 97-140.

GAUKROGER, S. (Ed.)(1980): *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*. Sussex: Harvester Press, Hassocks.

GROSHOLZ, D.(1980): *Descartes' Unification of Algebra and Geometry*. In Gaukroger (Ed.)(1980), pp. 156-68.

HARDY, G. H. (1940): *A Mathematician's Apology.* Cambridge: Cambridge University Press.

JULLIEN, V. (1996) : Descartes. *La Géométrie.* (1637).Paris : PUF.

KLEIN, J. (1968) : *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.* New York : Dover Publications Inc..

LEIBNIZ, G. W. (1859/1862) : *Mathematische Schriften*. (1849-63) Edited by C. I. Gerhardt. 7 Vols. Reprint, Hildesheim : Georg Olms Verlag.

LEIBNIZ, G. W. (1859/1862) : *Philosophische Schriften*. (1875-90) Edited by C. I. Gerhardt. 7 Vols. Reprint, Hildesheim : Georg Olms Verlag.

LEIBNIZ, G. W. (1989) : *La Naissance du calcul différentiel. 26 articles des Acta Eroditorum*. Introduction, traduction et notes par Marc Parmetier. Paris : Vrin.

MAHONEY, M. S. (1980): *The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century*. In Gaukroger, S.(Ed.)(1980), pp. 141-155.

MANCOSU, P.(1996): *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York: Oxford University Press.

PEIRCE, Ch. S. (1980): *"The Collected Papers of Charles Sanders Peirce",* vol. 1-6, editados por Ch. Harshorne & P. Weiss. The Bleknap Press of Harvard University Press, Cambridge.

ACTAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS - TOMO XV
INDICE

Se terminó de imprimir
en Editorial Copiar
en el mes de agosto de 2012.
Córdoba, República Argentina.