De los grupos de Lie a los grupos cuánticos, II

Brasilia, febrero de 2008

Nicolás Andruskiewitsch

Universidad de Córdoba, Argentina.

`http://www.mate.uncor.edu/andrus`

Plan de las exposiciones.

1. Grupos y simetrías. Nacimiento de la teoría de Lie. Fundamentos: grupos y álgebras de Lie. Álgebras de Lie semisimples: Killing.

2. Álgebras de Lie semisimples: Killing y Cartan. Teoría de representaciones. Representaciones irreducibles de las álgebras de Lie semisimples. Completa irreducibilidad.

3. Sistemas de raíces y grupos de Coxeter. Grupos algebraicos lineales. Grupos finitos. Clasificación de los grupos algebraicos lineales semisimples. Álgebras de Hopf. Grupos cuánticos.

Referencias:

A. Borel. *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups.* American Math. Soc. (2001).

T. Hawkins. *Emergence of the Theory of Lie Groups.* Springer (2000).

Plan de la exposición.

I. Álgebras de Lie semisimples: Killing y Cartan.

II. Teoría de representaciones.

I. Álgebras de Lie semisimples: Killing y Cartan.

En la exposición anterior, hemos visto el nacimiento de la teoría de Lie y algunos apuntes biográficos de W. Killing. Veamos ahora una síntesis de los trabajos de clasificación de Killing y cómo fueron completados por Elie Cartan. Para ello, es menester presentar sucintamente la clasificación de las álgebras de Lie simples de dimensión finita en lenguaje actual.

Recordemos que Lie define un grupo de Lie G *simple* como aquél cuya álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no admite ideales propios no nulos y además la dimensión de $\mathfrak{g} > 1$.

Sea entonces $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja simple de dimensión finita. La representación adjunta de $\mathfrak{g}$ es la transformación lineal $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$ dada por

$$\mathrm{ad}(X)(Y) := [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Obsérvese que 0 es siempre autovalor de $\mathrm{ad}X$. Diremos que X es *semisimple* si $\mathrm{ad}X$ es diagonalizable.

La primera noción clave es la de *subálgebra de Cartan*: es una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que verifica

- todos sus elementos son semisimples,
- es abeliana (esto es, $[X, Y] = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$);
- es maximal respecto de estas dos propiedades.

Se sabe que existen subálgebras de Cartan y son únicas salvo automorfismos. La dimensión k de $\mathfrak{h}$ se llama el *rango* de $\mathfrak{g}$.

La idea básica de Killing es considerar la descomposición *simultánea* de $\mathfrak{g}$ en autoespacios respecto de todos los elementos de una subálgebra de Cartan.
Dada una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, se consideran autoespacios generalizados: si $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, es

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \quad H \in \mathfrak{h}\}.$$

Aquéllos $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq 0$, tales que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ se llaman las *raíces* de $\mathfrak{g}$. Entonces

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\,\text{raíz}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Se puede demostrar que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, si α es raíz.

Si $\alpha \neq \beta$ son raíces, entonces existen enteros no negativos r, s tales que

$$\{j \in \mathbb{Z} : j\alpha + \beta \text{ es raíz}\} = \{j \in \mathbb{Z} : -r \leq j \leq s\},$$

y se define $a_{\alpha\beta} = r - s$; y además, $a_{\alpha\alpha} = 2$. Los números $a_{\alpha\beta}$ se llaman los *enteros de Cartan* de $\mathfrak{g}$.

Existen además raíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ que forman una base de $\mathfrak{h}^*$ con propiedades 'especiales'. La matriz $(c_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$, donde $c_{ij} := a_{\alpha_i\alpha_j}$, se llama la *matriz de Cartan* de $\mathfrak{g}$.

Un análisis minucioso de las raíces muestra que los enteros de Cartan, y por ende la matriz de Cartan, están sujetos a fuertes relaciones.

Este análisis usa la identidad de Jacobi y se simplifica si se considera la forma *de Killing*: es la forma bilineal simétrica e 'invariante' $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ dada por $K(X,Y) = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y$.

De hecho, Killing obtiene la lista de todas las posibles matrices de Cartan. Para visualizar convenientemente esta lista, es usual asignar a cada matriz de Cartan un grafo, llamado *diagrama de Dynkin*, con k vértices y donde entre los vértices i y j hay $c_{ij}c_{ji}$ aristas.

Se dice que una matriz de Cartan es 'indescomponible' si su diagrama de Dynkin es conexo.

Diagramas de Dynkin clásicos.

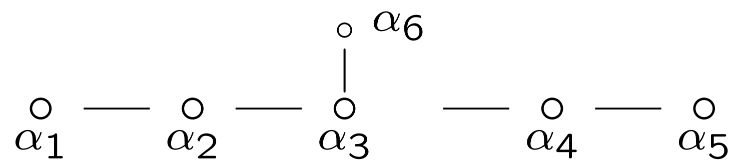
$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & — & \circ & — & \ldots & — & \circ & — & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{\ell-1} & & \alpha_\ell \end{array} \qquad (A_\ell)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & — & \circ & — & \ldots & — & \circ & \Rightarrow & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{\ell-1} & & \alpha_\ell \end{array} \qquad (B_\ell)$$

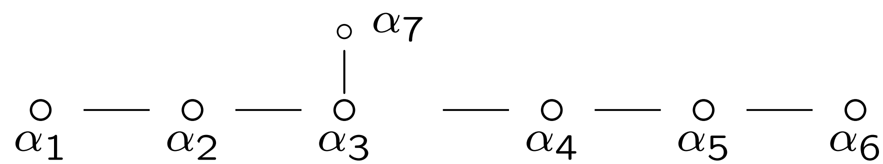
$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & — & \circ & — & \ldots & — & \circ & \Leftarrow & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{\ell-1} & & \alpha_\ell \end{array} \qquad (C_\ell)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \circ \ \alpha_{\ell-1} & & \\ & & & & & & | & & \\ \circ & — & \circ & — & \ldots & — & \circ & — & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{\ell-2} & & \alpha_\ell \end{array} \qquad (D_\ell)$$

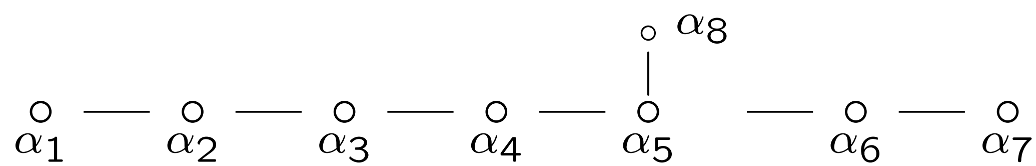
Diagramas de Dynkin excepcionales.



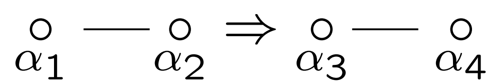
(E_6)



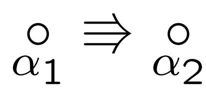
(E_7)



(E_8)



(F_4)



(G_2)

Teorema (Killing - Cartan). *Existe un correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de álgebras de Lie simples complejas y matrices de Cartan 'indescomponibles'.*

Por lo tanto, gracias al 'diccionario' de Lie, los grupos de Lie simples complejos están clasificados por las matrices de Cartan 'indescomponibles'. (Salvo el hecho de que el álgebra de Lie determina al grupo localmente).

Álgebras de Lie clásicas.

$$\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C}) = \text{álg. de Lie de } SL(\ell+1,\mathbb{C}) \qquad (A_\ell)$$

$$\mathfrak{so}(2\ell+1,\mathbb{C}) = \text{álg. de Lie de } SO(2\ell+1,\mathbb{C}) \qquad (B_\ell)$$

$$\mathfrak{sp}(2\ell,\mathbb{C}) = \text{álg. de Lie de } Sp(2\ell,\mathbb{C}) \qquad (C_\ell)$$

$$\mathfrak{so}(2\ell,\mathbb{C}) = \text{álg. de Lie de } SO(2\ell,\mathbb{C}) \qquad (D_\ell)$$

Por otro lado, G_2 se identifica con el álgebra de derivaciones de traza 0 del álgebra de octoniones. Las otras álgebras de Lie excepcionales admiten realizaciones en términos de derivaciones de álgebras no asociativas (e. g., álgebras de Jordan), como mostró Tits en la década del 50. Esta información se resume en el llamado 'cuadrado mágico' de Tits.

Las subálgebras de Cartan, las raíces, las matrices de Cartan, y otros elementos constitutivos de la teoría ya aparecen en los trabajos de Killing.

Por otro lado, la forma de Killing es esencialmente una contribución de Cartan.

La prueba de Killing.

El objetivo de Killing, como se dijo, era clasificar todas las álgebras de Lie reales (de dimensión finita). Sin embargo, comienza por las complejas, tal vez por su familiaridad con la teoría de divisores elementales de Weierstrass.

Antes de entrar en contacto con la teoría de Lie en 1884, ya había iniciado la consideración de álgebras de Lie complejas $\mathfrak{g}$ que satisfacen tres hipótesis I, II y III. Para enunciarlas, es preciso la siguiente notación. Sea $X \in \mathfrak{g}$ y consideremos la descomposición de $\mathfrak{g}$ en autoespacios generalizados:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{0 \neq \alpha} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde α recorre las raíces (no nulas) del polinomio característico de $\mathrm{ad} X$.

Se elige además X tal que $\dim \mathfrak{g}_0$ sea mínima– X *genérico*. Notar que por la identidad de Jacobi, $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra de Lie.

Las tres hipótesis de Killing son:

I. $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, la subálgebra de Lie derivada.

II. $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra de Lie *abeliana*.

III. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, si α es raíz no nula del polinomio característico de ad$X$.

Al entrar en conocimiento de los resultados de Lie, intuye que las álgebras de Lie simples satisfacen las hipótesis I, II y III. La primera de ellas se satisface por razones elementales; sin embargo la demostración de que un álgebra de Lie simple satisface las hipótesis II y III es errónea, pues utiliza un resultado auxiliar que resulta ser falso.

En efecto, Killing estudia más generalmente las álgebras de Lie que satisfacen I: $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, con el objetivo de probar que I implica II: $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra de Lie *abeliana*.
Para ello introduce la noción de álgebra de Lie *semisimple*: es aquélla que es suma directa de ideales simples, o equivalentemente que no contiene ningún ideal abeliano.

De modo que el resultado anterior se puede adaptar de la siguiente manera:

Teorema (Killing - Cartan). *Existe un correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de álgebras de Lie semisimples complejas y matrices de Cartan.*

Luego prueba un *teorema de descomposición*: Si $\mathfrak{g}$ satisface I, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{s}$ es un ideal semisimple y $\mathfrak{r}$ es un ideal cuyos elementos X satisfacen que ad$X$ es *nilpotente*. (Este resultado motiva a Engel a introducir la noción de álgebra de Lie nilpotente y a demostrar su teorema de caracterización).
Killing 'deduce' que vale II, lo que en general no es cierto.

Otro importante punto cuya demostración es incompleta en los trabajos de Killing es la existencia de las álgebras de Lie correspondientes a los tipos excepcionales E_6, E_7, E_8 y F_4; pero presenta explícitamente los coeficientes de estructura del álgebra de Lie de tipo G_2. De hecho, su prueba de la existencia de las álgebras de Lie de tipo C tampoco es completa; lo cual no presenta inconvenientes pues Lie ya había descripto las álgebras $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

La construcción de las álgebras de Lie excepcionales fue llevada a cabo posteriormente por Cartan mediante laboriosos cálculos caso por caso; una prueba *a priori*– sin razonamientos caso por caso– fue ofrecida, independientemente, por Chevalley y Harish-Chandra en 1948. Recordemos también la construcción de Tits(el cuadrado mágico). En 1963, Serre presenta las álgebras de Lie semisimples por generadores y relaciones y concluye esta cuestión.

Los trabajos de Killing fueron acogidos muy favorablemente por Lie y su escuela. Lie escribe en una carta a Klein en 1890:

"Killing has done beautiful research. If, as I believe, the results are correct, he has performed an outstanding service. Generally speaking, now the theory of transformation groups and differential invariants will reign over vast domains of mathematics."

Engel y sus alumnos se aplican a la tarea de entender, ampliar o corregir las pruebas de los teoremas de Killing.

El aporte de Elie Cartan.

La teoría desarrollada por Sophus Lie, que como vimos fue apoyado por Klein, fue recibida con frialdad en Berlín, uno de los grandes centros matemáticos de la época. Las críticas de la escuela de Berlín a los trabajos de Lie apuntaban tanto a la falta de rigor de los fundamentos de la teoría (Lie adscribía implícitamente al *razonamiento genérico* firmemente rechazado por Weierstrass), como al rango de las aplicaciones previstas por Lie (problemas de ecuaciones diferenciales ya resueltos por otros métodos).

La acogida a la teoría de Lie era muy diferente en París.

Los líderes de la comunidad matemática francesa de la época, Darboux, Picard y Poincaré, tenían una opinión muy favorable de los trabajos de Lie. Darboux, contemporáneo de Lie a quien conoció en 1870, se interesaba en geometría diferencial y sus conexiones con ecuaciones diferenciales parciales, por lo que tenía conocimiento detallado de los trabajos de Lie en esa dirección; pese a ello, no apeló a los grupos de Lie en sus investigaciones.

Por el contrario, Picard y Poincaré, unos diez años más jóvenes, comienzan a utilizar los grupos de Lie en sus trabajos.

El aprecio de los círculos matemáticos franceses por la obra de Lie se acentúa debido a la visita de Lie a París en 1882. En 1889, Lie es elegido miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de París. De más importancia histórica es que, a partir de 1888, varios estudiantes de la Ecole Normale Superieure de París, visitan a Lie en Leipzig para estudiar grupos de transformaciones. Los primeros son Ernest Vessiot y Wladimir de Tannenberg presentados a Lie por Darboux.

En el segundo semestre de 1891, viaja a Leipzig Arthur Tresse, quien se había recibido en la ENS junto a Elie Cartan. En Leipzig, aprende de Engel y Lie los resultados de Killing y los problemas suscitados por sus demostraciones.

Al regresar a París en 1892, Tresse (quien trabajaba en un problema de tesis sugerido por Lie) vive con su amigo Cartan, quien había pasado un año en el servicio militar.

Tresse cuenta a Cartan el teorema de Killing, quien deviene intensamente interesado en el desafío de demostrarlo cabalmente.

Lie viaja a París en 1893, donde conoce a Cartan. Éste ya había descubierto el método de prueba del teorema de clasificación, cuya primera publicación data de abril de 1893.

Elie Joseph Cartan

9 Abril 1869 en Dolomieu (cerca Chambéry), Savoya, Rhône-Alpes, Francia
6 Mayo 1951 en París, Francia

Elie Cartan nació en Dolomieu, un pequeño poblado en el sudeste de Francia. Hijo del herrador del pueblo, es recomendado por su maestro de primaria al delegado cantonal, Antonin Dubost, más tarde presidente del Senado. Dubost toma al joven Elie bajo su protección y le ayuda para que estudie en Vienne, luego en el Liceo de Grenoble y finalmente en el Liceo Janson-de-Sailly (Paris). Elie Cartan ingresa a la ENS en 1888. Después de su doctorado en 1894, trabajó en Montpellier y Lyon, luego como profesor en Nancy a partir de 1903. Obtuvo un puesto en Pars en 1909, y pasó a ser profesor en 1912. Se retiró en 1942.

Fue padre de cuatro hijos, uno de ellos el matemático Henri Cartan. Otros dos hijos varones fallecieron trágicamente– uno de ellos en la Segunda Guerra Mundial; también tuvo una hija. De personalidad tímida, no alcanzó la fama sino hasta su madurez.

En su tesis doctoral, Cartan concluye brillantemente la prueba de la clasificación de las álgebras de Lie semisimples. Una herramienta clave en su enfoque es la llamada "forma de Killing"...

Elie Cartan realizó otras contribuciones fundamentales a la teoría de Lie y a la geometría diferencial. En los años siguientes a su tesis, trabajó en aplicaciones de la misma y a la clasificación de los grupos "continuos infinitos".

En 1913-14, publica tres artículos claves, donde obtiene la clasificación de las representaciones irreducibles de las álgebras de Lie semisimples complejas por un lado, y de las álgebras de Lie semisimples *reales*– así como de las representaciones irreducibles de éstas– por otro.

Más adelante, influenciado por los trabajos de Weyl, obtiene otro teorema importantísimo: la clasificación de los espacios simétricos. Todos estos resultados dependen de la clasificación de las álgebras de Lie simples complejas.

Complementos.

Para finalizar esta sección, mencionamos tres resultados complementarios de la clasificación de Killing-Cartan.

Teorema de descomposición. Toda álgebra de Lie de dimensión finita $\mathfrak{g}$ admite un máximo ideal soluble $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$; además existe una subálgebra semisimple $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \operatorname{rad}\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{s}$.

Una variante de este teorema fue ya vislumbrada por Killing; Cartan dio una demostración errónea del mismo en 1893. Luego advirtió su error pero no se dedicó a encontrar una prueba, que fue finalmente una contribución de E. Levi (1905).

Este resultado reduce la clasificación de todas las álgebras de Lie de dimensión finita a la clasificación de las solubles, un arduo problema que no fue completamente resuelto aún, y que era parte del programa inicial de Killing (y de Lie). Actualmente la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes con ciertas propiedades ocupa la atención de varios especialistas.

Clasificación de las álgebras de Lie semisimples reales. Este problema, también, era parte principal del programa de Killing. Como se dijo, fue obtenida por Cartan en 1914. Es instrumental a su clasificación de los espacios simétricos.

Globalización. Como ya se dijo, el diccionario ‘grupos de Lie–álgebras de Lie’ sólo consideraba los aspectos locales de los primeros, si bien Lie y otros especialistas de su escuela conocían ejemplos de distintos grupos de Lie con la misma álgebra de Lie (por caso, $SL(2,\mathbb{C})$ y $PSL(2,\mathbb{C})$). Las respuestas teóricas a este problema aparecen en los trabajos de Weyl en 1924 y en sus continuaciones por Cartan.

II. Teoría de representaciones.

Tanto el programa de Erlangen de Klein, como la teoría de Galois de ecuaciones diferenciales que motivaba a Lie, como el idiosincrático punto de vista geométrico de Killing, abarcaban el problema de clasificación de los grupos 'proyectivos'. En una formulación equivalente, este problema se puede presentar como la clasificación de los subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ para todos los posibles n.

Recordemos que una representación lineal de G de grado n es un morfismo de grupos de Lie $\varrho : G \to GL(n, \mathbb{C})$.

El problema mencionado se puede reformular como dos problemas separados:

- la clasificación de los grupos de Lie;
- para cada grupo de Lie G, la clasificación de todas las representaciones lineales inyectivas de G.

Es evidentemente de interés, en este contexto, la clasificación de todas las representaciones lineales de los grupos de Lie *simples*.

Antes de esbozar la historia de este problema, resuelto por Elie Cartan y Hermann Weyl, es conveniente discutir algunas reducciones técnicas.

Consideremos una representación lineal $\varrho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ de un grupo de Lie G, $n > 0$. Un subespacio U de $\mathbb{C}^n$ se dice G-*invariante* is para todo $g \in G$, $u \in U$, se tiene

$$\varrho(g)(u) \in U.$$

A través de una identificación lineal $U \simeq \mathbb{C}^d$, a un subespacio G-invariante le corresponde una representación lineal de grado d.

La representación ϱ se dice *irreducible* si admite exactamente dos subespacios G-invariantes, a saber $U = 0$ y $U = \mathbb{C}^n$.

Por otro lado, se dice *completamente reducible* si existen subespacios G-invariantes irreducibles $U_1, \ldots, U_s$ tales que $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$.

Teorema. Sea G un grupo de Lie simple (simplemente conexo).

(E. Cartan). Existe un correspondencia biyectiva entre las representaciones lineales irreducibles de G y los 'pesos dominantes' de G.

(H. Weyl). Toda representación de G es completamente reducible.

Esta situación es óptima: si $G = \mathbb{C}$, entonces la representación $\varrho : G \to GL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$\varrho(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$z \in \mathbb{C}$, admite exactamente tres subespacios invariantes:

$$0, \quad \mathbb{C}e_1, \quad \mathbb{C}^2.$$

Luego no es irreducible ni completamente reducible.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una representación de grado n de $\mathfrak{g}$ es un morfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, es decir una transformación lineal que satisface

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

En la práctica, las representaciones de un grupo de Lie conexo G dan lugar a representaciones de su álgebra de Lie; vale la recíproca si G es simplemente conexo. Se tiene que una representación de un grupo de Lie conexo G es irreducible exactamente cuando la representación asociada de su álgebra de Lie lo es. Análogamente para representaciones completamente reducibles.

Teoría de representaciones: $SL(2,\mathbb{C})$.

Lie determinó las representaciones irreducibles de $SL(2,\mathbb{C})$: para cada entero $m \geq 0$, existe exactamente una representación irreducible V_m de $SL(2,\mathbb{C})$ de dimensión $m+1$.

Explícitamente, V_m se identifica con el espacio de polinomios en 2 variables, homogéneos de grado m, con la acción natural de $SL(2,\mathbb{C})$.

Sean $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Estos elementos forman una base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, el álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$.

El espacio V_m tiene una base $v_0, \ldots, v_m$ donde la representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ está determinada por

$$\begin{aligned}
\rho(H)(v_i) &= (m - 2i)v_i, \\
\rho(F)(v_i) &= -(i + 1)v_{i+1}; \\
\rho(E)(v_i) &= (m - i + 1)v_{i-1},
\end{aligned}$$

donde se conviene que $v_{-1} = v_{m+1} = 0$.

El enfoque de Lie es geométrico: las representaciones que considera son proyectivas (no lineales). Si B es el grupo de matrices triangulares superiores, entonces el espacio cociente $C = SL(2, \mathbb{C})/B$ es isomorfo a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ por un lado. Por otro, una representación proyectiva de $SL(2, \mathbb{C})$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admite un punto fijo por B, debido al teorema de Lie para álgebras solubles. Así, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ contiene una copia de la curva C; Lie requiere que C sea *tan curvada como sea posible*– lo que equivale a que la correspondiente representación lineal sea irreducible.

Completa irreducibilidad: $SL(2,\mathbb{C})$.

En su tratado, Lie y Engel anuncian que un discípulo de Lie, E. Study, demuestra la completa irreducibilidad de las representaciones de $SL(2,\mathbb{C})$. La prueba no es publicada, aparentemente tiene algunos errores luego corregidos por Engel. Study conjetura la completa irreducibilidad de las representaciones de cualquier álgebra de Lie semisimple.

En su tesis, E. Cartan demuestra la completa irreducibilidad de las representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, como un paso en la prueba de un teorema de Engel (toda álgebra de Lie no soluble contiene una copia de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$). La demostración es algebraica.

Independientemente, Guido Fano ofrece en 1896 una demostración geométrica de la completa irreducibilidad para $SL(2,\mathbb{C})$. La prueba de Fano contiene– en lenguaje proyectivo como Lie– una reducción a la consideración de sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow V_m \longrightarrow E \longrightarrow V_n \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión es clave en la prueba algebraica que Casimir presenta en la década del 30.

Teoría de representaciones: caso irreducible.

La clasificación de las representaciones irreducibles de un álgebra de Lie simple ocupó entre 1890 y 1910 a varios discípulos de S. Lie (quien fundó una escuela en su paso por Leipzig). E. Study la obtuvo para $SL(3,\mathbb{C})$ y otros grupos de rango bajo, pero nunca publicó los resultados. Study, quien escribió su tesis de habilitación bajo Klein, era *Privatdozent* en Leipzig cuando llegó Lie y se unió a su escuela. G. Kowalewski, alumno de Lie, consideró el problema de clasificación de grupos proyectivos que no dejan 'nada linear invariante'. Por un resultado de Cartan (1909), se reduce al problema de clasificación de las representaciones irreducibles de un álgebra de Lie semisimple.

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y V una representación de $\mathfrak{g}$. Recordemos que $\mathfrak{g}$ tiene ciertas subálgebras llamadas de Cartan, con propiedades especiales. Si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, entonces se denota:

$$V_\lambda = \{v \in V : \rho(H)(v) = \lambda(H)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Entonces $V = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$. Aquellos λ tales que $V_\lambda \neq 0$ se dicen los *pesos* de la representación.

Existe además una base $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $\mathfrak{h}^*$ que satisface:

Si λ es un peso de alguna representación de dimensión finita V, entonces $\lambda = \sum_{1\leq i\leq k} c_i\lambda_i$, donde los c_i son enteros.

Un peso $\lambda = \sum_{1 \leq i \leq k} c_i \lambda_i$ se dice *dominante* si los c_i son enteros mayores o iguales a 0.

Teorema. *(E. Cartan). Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie semisimple. Existe un correspondencia biyectiva entre las representaciones lineales irreducibles de* $\mathfrak{g}$ *y los pesos dominantes de* $\mathfrak{g}$*.*

Sea λ un peso dominante y sea $V(\lambda)$ la correspondiente representación irreducible. Entonces la combinatoria inherente a $V(\lambda)$ está gobernada por el diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$; en particular, la dimensión de $V(\lambda)$, su conjunto de pesos, las multiplicidades de los mismos, etc.

Completa irreducibilidad.

Para finalizar, queremos esbozar sucintamente la historia del teorema de completa irreducibilidad de Weyl.

Sea G un grupo finito. Entonces toda representación de G es completamente reducible. Este teorema es debido a Maschke (1899), y se sigue de la siguiente observación debida a E. H. Moore– e independientemente a A. Loewy (1896). *Toda representación V de G admite una forma hermitiana positiva no-degenerada G-invariante.*

La construcción es muy sencilla.

Sea $(\,|\,)$ *cualquier* forma hermitiana positiva no-degenerada en V, entonces

$$(x|y)_0 := \sum_{g \in G} (\rho(g)(x)|\rho(g)(y))$$

es la forma G-invariante buscada.

La operación de *promediar* se aplica más generalmente a la búsqueda de invariantes: si $v \in V$, entonces $v_0 = \sum_{g \in G} \rho(g)(v)$ es un elemento *invariante*– esto es, $v_0 = \rho(g)(v_0)$ para todo $g \in G$.

En 1897, A. Hurwitz extendió la operación de promediar a la búsqueda de invariantes de grupos infinitos G, como $SL(n, \mathbb{C})$ y $SO(n, \mathbb{C})$. La idea básica es reemplazar la suma $\sum_{g \in G}$ por una integral $\int_G d\mu$ donde $d\mu$ es una medida G-invariante.

Sin embargo, $\int_G d\mu$ puede diverger is G no es compacto. Hurwitz propone considerar un subgrupo compacto maximal G_0, en los ejemplos

$$SU(n) \subset SL(n, \mathbb{C}), \quad SO(n) \subset SO(n, \mathbb{C}).$$

Estos subgrupos son lo suficientemente 'grandes' como para que todo G_0-invariante sea necesariamente G-invariante.

El trabajo de Hurwitz pasó desapercibido a los estudiosos de la teoría de Lie, hasta que en 1924, I. Schur aplicó el método de Hurwitz al estudio de las representaciones e invariantes de $SO(n, \mathbb{C})$ y en particular, a la completa irreducibilidad.

Poco más tarde, Hermann Weyl demostró la completa irreducibilidad para cualquier grupo de Lie semisimple G mediante el método de Hurwitz y Schur.

Es crucial en su enfoque la construcción de un subgrupo compacto maximal G_0 de G, que es posible a través de la forma compacta $\mathfrak{g}_0$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Esta forma se construye gracias al análisis del sistema de raíces de $\mathfrak{g}$.

Si bien esta álgebra de Lie real aparece en la lista de Cartan (1913), es Weyl quien destaca su rol en la prueba de completa reducibilidad.

Por razones de tiempo, nos es imposible repasar las importantísimas contribuciones de Weyl a la teoría de grupos de Lie y de sus representaciones; contribuciones que son una síntesis de álgebra, geometría y análisis.

Hermann Weyl

9 de noviembre 1885 en Elmshorn (cerca de Hamburgo), Alemania
9 de diciembre de 1955 en Zürich, Suiza