

Álgebras de Nichols de tipo diagonal

por Iván Ezequiel Angiono

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo de 2011

©FAMAF-UNC 2011

Director: Dr. Nicolás Andruskiewitsch

Resumen

Esta tesis trata sobre la presentación de las álgebras de Nichols de tipo diagonal y su relación con las álgebras de Hopf punteadas cuyo grupo de elementos de tipo grupo es abeliano.

En primer lugar consideramos el problema de obtener una presentación general de tales álgebras de Nichols. Para ello usamos la definición de grupoide de Weyl introducida por Heckenberger y analizamos órdenes convexos para el sistema de raíces asociado a un álgebra de Nichols de tipo diagonal. Estas consideraciones extienden las ideas que ya se habían estudiado para álgebras envolventes cuantizadas y su relación con el correspondiente grupo de Weyl. Se obtienen entonces bases PBW ortogonales para una forma bilineal canónicamente asociada al álgebra de Nichols; tales bases PBW habían sido encontradas por Kharchenko y se obtienen por métodos combinatorios que involucran palabras de Lyndon. A partir de tal base PBW se obtiene un conjunto de relaciones que generan el ideal de relaciones del álgebra de Nichols.

Luego se considera la clasificación de los espacios vectoriales trenzados de dos familias importantes: los de tipo estándar, relacionados con matrices de tipo finito, y los de tipo súper, cuyo sistema de raíces es el asociado a una súper álgebra de Lie contragradiente semisimple. Describiremos cada una de estas familias, daremos la dimensión del correspondiente álgebra de Nichols y las reconoceremos dentro de la clasificación de espacios trenzados de tipo diagonal con sistema de raíces finitos de Heckenberger.

También buscaremos obtener una presentación con cantidad mínima de relaciones de las álgebras de Nichols. Para ello utilizaremos una generalización de los isomorfismos de Lusztig para álgebras envolventes cuantizadas al contexto general de álgebras de Nichols de tipo diagonal. Tal presentación nos permitirá probar que las álgebras de Hopf punteadas sobre grupos abelianos de dimensión finita están generadas por sus elementos de tipo grupo y casi-primitivos, conjetura hecha tiempo atrás por Andruskiewitsch y Schneider.

Para finalizar se utilizarán algunos de estos resultados para estudiar algunas categorías tensoriales finitas punteadas. Se considerarán álgebras cuasi-Hopf básicas radicalmente graduadas asociadas a grupos cíclicos y sus correspondientes levantamientos para finalmente obtener la clasificación de las categorías tensoriales finitas punteadas cuyo grupo de elementos invertibles es cíclico, de orden coprimo con 2, 3, 5, 7.

Palabras claves: álgebras de Hopf punteadas, álgebras de Nichols, categorías tensoriales, álgebras cuasi-Hopf.

2010 Mathematics subject Classification: 16T05, 17B37, 18D10

Abstract

The aim of this thesis is to obtain a presentation by generators and relations of any finite-dimensional Nichols algebra of diagonal type, and to study the relation of such algebras with pointed Hopf algebras, whose group of group-like elements is abelian.

We shall use several tools to solve this problem. We remind the definition of Weyl groupoid, introduced by Heckenberger, and we analyze convex orders for the root system associated to a Nichols algebra of diagonal type. We extend in this way the ideas studied for quantized enveloping algebras associated to semisimple Lie algebras, and their relation with the corresponding Weyl group. We obtain PBW bases whose elements are orthogonal for a canonical bilinear form attached to the Nichols algebra; such PBW basis was found by Kharchenko, using combinatorial methods related with Lyndon words. We obtain a series of relations generating the ideal of relations of the Nichols algebra, where these relations are expressed in terms of the PBW basis.

Then we consider the classification of braided vector spaces of two important families: those of standard type, related with Cartan matrices of finite type, and those of super type, whose root system is the one associated to a semisimple contragredient Lie superalgebra. We describe these families, give a concrete formula for the associated Nichols algebras and recognize them into the classification of braided vector spaces with finite root system given by Heckenberger.

After that we look for a presentation with a minimal number of relations of the Nichols algebras of diagonal type. For this end, we use a family of isomorphisms of algebras between the Nichols algebras related by a connected Weyl groupoid, which are a generalization of Lusztig isomorphisms of quantized enveloping algebras. We answer positively a conjecture of Andruskiewitsch and Schneider for pointed Hopf algebras whose group of group-like elements is abelian, which establishes that finite-dimensional pointed Hopf algebras are generated by group-like and skew-primitive elements.

Finally we use some of these results and others about the classification of pointed Hopf algebras to study pointed finite tensor categories. We consider basic radically graded quasi-Hopf algebras associated to cyclic groups and their corresponding liftings to obtain the classification of pointed finite tensor categories, whose group of invertible elements is cyclic of order coprime with 2, 3, 5, 7.

Key words: pointed Hopf algebras, Nichols algebras, tensor categories, quasi-Hopf algebras.

2010 Mathematics subject Classification: 16T05, 17B37, 18D10

Agradecimientos

En primer lugar agradezco profundamente a mi director Nicolás Andruskiewitsch por todo su constante apoyo y dedicación; él ha corregido cuidadosamente cada uno de mis trabajos publicados como así también el texto de esta tesis. Además agradezco que me haya transmitido toda su pasión por las ciencias. Sus enseñanzas exceden lo estrictamente matemático y espero poder seguir su ejemplo.

En segundo lugar agradezco a Antonela por estos hermosos 10 años juntos, ya sea lejos durante mi estudio en La Plata, o cerca, siempre comprendiéndome y acompañándome. También a mi familia por el constante apoyo, ya sea económico como sentimental, y por su formación; de ellos he aprendido mucho, en especial que nada se consigue sin esfuerzo.

También quiero agradecer a los profesores de FaMAF, a mis compañeros del grupo de Hopf y de doctorado por hacerme sentir tan cómodo en esta Facultad. Quisiera destacar a Agustín, con quien he tenido el placer de trabajar juntos, además de compartir muchos otros gratos momentos.

Por otro lado, agradezco el apoyo de amigos que he encontrado en cada lugar que he estado: los de Trenel, que me acompañan desde los primeros años; los que he conocido en La Plata, ya sea por estudiar Matemática o en aquellos años en Biotecnología; los de las Olimpíadas, con las discusiones de problemas, los viajes y las salidas compartidas. Aprovecho para agradecer a todo el personal de la OMA, pero muy especialmente a Flora y Patricia, que desde mis años en las Olimpíadas Matemáticas alimentaron mi pasión por esta materia y comenzaron mi formación.

Finalmente destaco a CONICET, organismo que me dio el apoyo económico necesario para realizar mi doctorado; al Banco Santander Río, que me dio el apoyo necesario para realizar mi estadía en el MIT entre febrero y mayo de 2009; y al Profesor Pavel Etingof, por todas las enseñanzas que me brindó durante dicha estadía como así también por proponerme distintos problemas a resolver.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Álgebras, coálgebras y álgebras de Hopf	1
1.2. Categorías tensoriales	6
1.3. Espacios trenzados y módulos de Yetter-Drinfeld	10
1.4. Álgebras de Hopf en categorías trenzadas	11
1.5. Biproducto o bosonización	14
1.6. Álgebras de Hopf punteadas y levantamientos	15
1.7. Palabras de Lyndon y bases PBW para álgebras trenzadas de tipo diagonal	17
1.8. Álgebras de Nichols con sistema de raíces finito	21
2. Presentación por generadores y relaciones	35
2.1. Sistemas de raíces y subálgebras coideales	35
2.1.1. Grupoide de Weyl y sistemas de raíces	35
2.1.2. Órdenes convexos en sistemas de raíces	37
2.1.3. Subálgebras coideales y órdenes convexos para bases PBW	39
2.2. Presentación por generadores y relaciones	44
3. Clasificación de álgebras de Nichols	53
3.1. Clasificación de las trenzas de tipo estándar	53

3.1.1.	Trenzas de tipo estándar	53
3.1.2.	Clasificación de las trenzas de tipo estándares	55
3.2.	Álgebras de Nichols estándares	60
3.2.1.	Bases PBW de álgebras de Nichols con trenza estándar	60
3.2.2.	Dimensión de las álgebras de Nichols estándares	64
3.3.	Trenzas de tipo súper	70
3.3.1.	Sistemas de raíces y trenzas de tipo súper	70
3.3.2.	Una base PBW para los diagramas de tipo súper	74
3.3.3.	Cálculo de las dimensiones de las álgebras de Nichols con trenza de tipo súper	76
4.	Presentación explícita y generación en grado uno	79
4.1.	Isomorfismos de Lusztig	79
4.2.	Presentación explícita por generadores y relaciones	85
4.3.	Algunos ejemplos	115
4.4.	Sobre una conjetura de Andruskiewitsch y Schneider	121
5.	Álgebras cuasi-Hopf sobre grupos cíclicos	133
5.1.	Preliminares sobre álgebras cuasi-Hopf	133
5.1.1.	Álgebras cuasi-Hopf, definición y ejemplos	133
5.1.2.	Equivariantización y de-equivariantización	135
5.2.	Álgebras cuasi-Hopf básicas graduadas	138
5.2.1.	Álgebras cuasi-Hopf $A(H, s)$	139
5.2.2.	Álgebras cuasi-Hopf como subálgebras de álgebras de Hopf.	141
5.2.3.	Clasificación de las álgebras cuasi-Hopf graduadas	142
5.3.	Levantamientos de álgebras cuasi-Hopf	143
5.3.1.	Levantamientos de álgebras cuasi-Hopf con asociador trivial	143
5.3.2.	Equivariantización de levantamientos de álgebras cuasi-Hopf.	145
5.3.3.	De-equivariantizaciones de $\text{Rep } \mathcal{H}$	147
5.3.4.	Clasificación de las categorías tensoriales finitas punteadas sobre \mathbb{Z}_m	149
5.4.	Álgebras cuasi-Hopf sobre p -grupos cíclicos	150
5.4.1.	Álgebras de Nichols sobre \mathbb{Z}_{p^n}	150
5.4.2.	Álgebras cuasi-Hopf básicas sobre \mathbb{Z}_{p^n}	152

Introducción

Generalidades e introducción del problema.

La teoría de las álgebras de Hopf tuvo sus comienzos en la década del '50, a partir de los trabajos de Borel [B] y Cartier [C]. El primer autor denomina *álgebra de Hopf* a un álgebra que posee un coproducto no necesariamente asociativo, en relación con sus estudios de homología de espacios homogéneos. Por su parte, Cartier llama 'hiper álgebra' a lo que hoy denominamos biálgebra cocommutativa, y le agrega una estructura extra que da lugar a la antípoda; él las utiliza como parte de sus trabajos sobre grupos algebraicos. Luego de varios años de estudio se logra independizar el concepto de álgebra de Hopf, y a fines de los '60 aparece la primer referencia bibliográfica sobre el tema, escrita por Sweedler [Sw], la cual fue un punto de inflexión para el desarrollo del área; ver [AF] para mayor información sobre el origen de estas álgebras.

Otro punto importante en el desarrollo de la teoría de las álgebras de Hopf fue la introducción de las *álgebras envolventes cuantizadas* (o grupos cuánticos) $U_q(\mathfrak{g})$, atribuidas a Drinfeld [D1], pero que también fueron consideradas en la misma época por Jimbo de manera independiente [Ji]. Las mismas resultan por deformación del álgebra envolvente universal asociada a un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita \mathfrak{g} , vía un parámetro q . Su importancia radica, entre otros hechos, en que codifica la simetría de categorías trenzadas; esto es, categorías \mathcal{C} que admiten un producto tensorial asociativo, junto con una transformación natural $c_{\bullet, \bullet} : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ que lo hace 'conmutativo'. En este caso, $c_{V, W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ no es involutiva, por lo cual aparecen en diversas áreas relacionadas con la teoría conforme de campos; entre ellas, en invariantes de variedades topológicas de dimensión baja.

Tal como explicaremos en el Capítulo 1, la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf de dimensión finita es una categoría tensorial finita en el sentido de [EO]. A partir de este hecho, las álgebras de Hopf semisimples juegan un rol fundamental en la teoría de campos conformes racionales. Por otro lado, las álgebras de Hopf no semisimples se relacionan con las teorías de campos conformes logarítmicos, ver [Ga].

Además, al evaluar el parámetro que define las álgebras envolventes cuantizadas en raíces de la unidad se obtienen análogos de dimensión finita, denominados *grupos cuánticos pequeños* o núcleos de Frobenius-Lusztig. Dichas álgebras fueron introducidas y ampliamente estudiadas por Lusztig [Lu], en parte por su conexión con los grupos algebraicos en característica positiva.

A partir de estas aplicaciones el problema de clasificación de las álgebras de Hopf cobra gran importancia en la actualidad. El mismo se ha dividido en dos ramas: álgebras de Hopf semisimples, y no semisimples. Esta última familia es muy amplia y su estudio se ha profundizado especialmente en una subfamilia propia: aquélla de las álgebras de Hopf punteadas. Un álgebra de Hopf H es *punteada* si su corradical, es decir, su mayor subcoálgebra cosemisimple, coincide con el álgebra de

grupo $\mathbf{k}G(H)$ de sus elementos de tipo grupo:

$$G(H) := \{x \in H \setminus \{0\} : \Delta(x) = x \otimes x\}.$$

Ejemplos de álgebras de Hopf punteadas son las álgebras de grupos, las álgebras envolventes cuantizadas y los ejemplos de Lusztig. Para dicha familia se han desarrollado métodos muy importantes que han permitido avanzar en su clasificación, especialmente en el caso en que $G(H)$ es abeliano. En particular, Andruskiewitsch y Schneider [AS6] han clasificado las álgebras de Hopf de dimensión finita cuando \mathbf{k} es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 y $G(H)$ tiene orden no divisible por primos pequeños: 2, 3, 5, 7. Para ello han desarrollado un programa de clasificación, conocido como el *Método del Levante*, el cual depende de obtener respuestas a algunos problemas, entre ellos el siguiente:

Problema 1. [An, Question 5.9]: *Dado un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, determinar si el álgebra de Nichols asociada (esto es, un cociente del álgebra tensorial por un cierto ideal, como se verá en la Sección 1.4) es de dimensión finita. En tal caso calcular su dimensión y dar una presentación por generadores y relaciones.*

La primer parte del problema ha sido resuelta por Heckenberger [H3], quien obtuvo la lista de todos los espacios trenzados de tipo diagonal cuya álgebra de Nichols tiene sistema de raíces finito. Sin embargo, este autor no dio una fórmula para la dimensión de estas álgebras de Nichols ni su presentación por generadores y relaciones.

Entre las trenzas de la clasificación de Heckenberger aparecen las correspondientes a las partes positivas de los grupos cuánticos pequeños, asociados a los espacios trenzados de tipo *Cartan*, para los cuales se conoce la presentación por generadores y relaciones. Tales espacios pertenecen a la familia de espacios de tipo *estándar* [AA], para los cuales se ha obtenido una presentación por generadores y relaciones y una fórmula para calcular su dimensión [A1]. Otro resultado importante sobre presentaciones de álgebras de Nichols se debe a Yamane [Y], quien trabajó con álgebras envolventes cuantizadas asociadas a súper álgebras de Lie semisimples. También se desarrollaron algunas consideraciones sobre conjuntos de relaciones en [He], y presentaciones para espacios trenzados de dimensión 2 en [H2].

La importancia de obtener una buena presentación del álgebra de Nichols radica en las siguientes consideraciones:

- Es el punto de partida de una estrategia propuesta en [AS2] para atacar el siguiente problema:

Conjetura 1. [AS2, Conjecture 1.4] *Sea Γ un grupo finito y \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0. Si H un álgebra de Hopf punteada sobre \mathbf{k} , cuyo grupo de elementos de tipo grupo es Γ , entonces H está generada como álgebra por Γ y sus elementos casi primitivos.*

La misma ha sido respondida afirmativamente en [AS2] para trenzas de tipo Cartan bajo algunas condiciones, y ello les permitió obtener el resultado de clasificación antes mencionado. La prueba fue extendida para trenzas de tipo estándar en [AGI], usando las mismas técnicas.

- También permite encarar el problema de obtener las deformaciones del álgebra $\mathcal{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$; es decir, obtener otras álgebras de Hopf punteadas cuya álgebra corradicalmente graduada asociada es $\mathcal{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$. Este problema se resolvió para Γ abeliano con las restricciones anteriores en el orden en [AS6].

- Se utiliza para estudiar las categorías de representaciones de álgebras de Hopf punteadas $\mathcal{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$ y sus dobles de Drinfeld. Notemos que este problema incluye a las álgebras envolventes cuantizadas de álgebras de Lie y súper álgebras de Lie. En el caso clásico se consigue caracterizar módulos de peso máximo y módulos vasculantes a partir de la presentación por generadores y relaciones. De este modo, se espera poder realizar el mismo trabajo para los análogos cuantizados.

A partir de las trenzas de tipo Cartan se puede inferir una relación estrecha entre las álgebras de Hopf punteadas y la teoría clásica de Lie. Un paso más en la profundización de la relación entre la teoría de Lie y las álgebras de Hopf es la introducción del grupoide de Weyl y el correspondiente sistema de raíces [H1, HS, HeY] asociado a un álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ de tipo diagonal. Estos conceptos han mostrado ser una adecuada y útil extensión de las nociones de grupo de Weyl y sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple, y establecen también una conexión con las súper álgebras de Lie semisimples. Tal sistema de raíces puede obtenerse como el conjunto de grados de una familia de generadores de una base PBW, y permite, por ejemplo, describir la familia de subálgebras coideales de $\mathcal{B}(V)$, ver [HS].

Es importante del punto de vista técnico el estudio de ciertos automorfismos de los grupos cuánticos y las álgebras de Nichols asociadas, llamados *isomorfismos de Lusztig*, introducidos en [Lu] utilizando bases PBW y el grupo de Weyl asociado. A partir de dichos isomorfismos se comienza el estudio de bases canónicas, el cual tuvo un alto impacto en la teoría de representaciones de los grupos cuánticos. Más adelante se trabajó en la idea de isomorfismos de Lusztig para álgebras envolventes cuantizadas asociadas a súper álgebras de Lie [Y], y más generalmente para el caso en que la trenza es de tipo diagonal, pero no necesariamente de tipo Cartan: Heckenberger [H4] obtuvo una familia de isomorfismos para los dobles de Drinfeld asociados a álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita que corresponden a una componente conexa del correspondiente grupoide de Weyl.

Un elemento presente en el análisis de las álgebras envolventes cuantizadas $U_q(\mathfrak{g})$ en torno de sus isomorfismos de Lusztig es el uso de los órdenes convexos sobre los sistemas de raíces clásicos, ya sea en el caso en que \mathfrak{g} es semisimple de dimensión finita [KhoT, Le, R2], o en el caso afín [Be]. Esta clase de órdenes del sistema de raíces fue introducida por Zhelobenko, ver por ejemplo [Z], y fue caracterizada primero en el caso finito [P], y luego en el caso afín [I].

Por otro lado, ya hemos observado que la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf constituye un categoría tensorial. En un trabajo de 1990 [D2], Drinfeld introdujo la noción de álgebra cuasi-Hopf, que surge de debilitar la condición de coasociatividad del coproducto, pero de modo tal que su categoría de representaciones es tensorial, ver Sección 5.1. Resulta interesante en consecuencia clasificar las categorías tensoriales, o el problema asociado de clasificar álgebras cuasi-Hopf, bajo algunas condiciones, problema que se divide de modo similar al de la clasificación de las álgebras de Hopf. Por un lado se estudian las categorías semisimples. Por otro lado, las no semisimples se dividen en varias subfamilias, entre las cuales se destacan las punteadas: aquéllas cuyos objetos simples son todos invertibles. De acuerdo a [EO, Prop. 2.6], dichas categorías corresponden a las categorías de representaciones de álgebras cuasi-Hopf básicas (cuyas representaciones simples son de dimensión 1). Los primeros resultados de clasificación fueron obtenidos por Etingof y Gelaki, quienes luego de un par de trabajos previos obtuvieron la clasificación de las categorías tensoriales finitas punteadas cuyo grupo de elementos invertibles es cíclico de orden primo, ver [EG3]. Para ello, notaron que había tres clases de álgebras cuasi-Hopf graduadas: las semisimples (álgebras de funciones sobre un grupo), las álgebras de Hopf, y una familia de álgebras

cuasi-Hopf $A(q)$ con asociador no trivial, construidas en [Ge].

Principales resultados obtenidos.

El principal resultado de esta tesis es la obtención de una presentación por generadores y relaciones para cada álgebra de Nichols de tipo diagonal cuyo sistema de raíces es finito. Para realizar este trabajo, comenzaremos dando definiciones y resultados básicos sobre la teoría de álgebras de Hopf en el Capítulo 1; entre ellos introduciremos las nociones de espacio vectorial trenzado y su álgebra de Nichols asociada. Recordaremos la noción de bosonización, una construcción fundamental para el Método del Levante. A su vez daremos un criterio general para obtener bases PBW para estas álgebras siguiendo resultados de Kharchenko. Dicha base PBW consiste de polinomios homogéneos asociados a palabras de Lyndon; estas palabras han sido usadas reiteradas veces para describir bases de álgebras envolventes asociadas a las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita, ver por ejemplo [LaR], y también para las álgebras envolventes cuantizadas [Le, R2].

También recordaremos la clasificación de Heckenberger de los espacios trenzados de tipo diagonal cuya álgebra de Nichols tiene un sistema de raíces finito. Dicha clasificación se puede dividir en tres familias: los espacios trenzados de tipo *estándar*, que estudiaremos en las Secciones 3.1 y 3.2, relacionadas con matrices de Cartan finitas; los de tipo *súper*, que se corresponden con sistemas de raíces de súper álgebras de Lie semisimples y que consideraremos en la Sección 3.3; y los restantes, de tipo indefinido.

El Capítulo 2 es un punto crucial de este trabajo y está basado en

- *A presentation by generators and relations of Nichols algebras of diagonal type and convex orders on root systems*, I. Angiono, enviado. Preprint arXiv:1008.4144, 30 pp.

Es importante notar que esta parte de la tesis muestra otra estrecha relación entre la teoría clásica de álgebras de Lie y súper álgebras de Lie con la teoría de las álgebras de Nichols de tipo diagonal. De hecho, la primer Sección contiene definiciones y resultados básicos de la teoría de grupoide de Weyl y sistema de raíces de un álgebra de Nichols de tipo diagonal. Luego se obtiene una caracterización de los órdenes convexos para dichos sistemas de raíces, que resulta ser una generalización de algunos resultados conocidos para grupos de Weyl. Dichos órdenes convexos están asociados a expresiones reducidas de los elementos del grupoide de Weyl, las cuales caracterizan también las subálgebras coideales a derecha de las álgebras de Nichols; así encontramos una relación entre subálgebras coideales y órdenes convexos, la cual podemos aplicar al orden de las palabras de Lyndon que generan una base PBW de la teoría de Kharchenko. Un punto interesante es que logra caracterizarse de manera recursiva el conjunto de palabras de Lyndon que definen la base PBW:

$$l_\beta = \text{máx}\{l_{\delta_1}l_{\delta_2} : \delta_1, \delta_2 \in \Delta_+^V, \delta_1 + \delta_2 = \beta, l_{\delta_1} < l_{\delta_2}\}, \quad \beta \in \Delta_+^V \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_\theta\}.$$

Luego se prueba que cada una de tales bases consta de elementos ortogonales para una forma bilineal no degenerada canónicamente asociada al álgebra de Nichols.

Así se logra probar el principal resultado del Capítulo, ver Teorema 2.2.10:

Teorema 1. *Sea (V, c) un espacio vectorial trenzado de dimensión finita de tipo diagonal tal que su sistema de raíces Δ_+^V es finito. Sea x_1, \dots, x_θ un base de V tal que $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i$, donde $(q_{ij}) \in (\mathbf{k}^\times)^{\theta \times \theta}$ es la matriz de la trenza, y sea $\{x_{\beta_k}\}_{\beta_k \in \Delta_+^V}$ el conjunto de hiperletras asociado.*

Entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, \dots, x_θ , y relaciones

$$\begin{aligned} x_\beta^{N_\beta} &= 0, & \beta \in \Delta_+^V, \text{ ord}(q_\beta) &= N_\beta < \infty, \\ [x_{\beta_i}, x_{\beta_j}]_c &= \sum_{u \in B_i \cap C_j - \{x_{\beta_j}, x_{\beta_i}\}: \text{ deg } u = \beta_i + \beta_j} c_{i,j}^u u, \\ 1 \leq i < j \leq M, \text{ Sh}(l_{\beta_i} l_{\beta_j}) &= (l_{\beta_i}, l_{\beta_j}), l_{\beta_i} l_{\beta_j} \neq l_{\beta_k}, \forall k, \end{aligned}$$

donde $c_{i,j}^u$ se definen en (2.17). Más aún, $\{x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_1}^{n_1} : 0 \leq n_j < N_{\beta_j}\}$ es una base de $\mathcal{B}(V)$, donde $N_{\beta_j} = \text{ord } q_{\beta_j}$.

Las relaciones que presentan $\mathcal{B}(V)$ son de dos tipos: potencias de vectores raíces (esto es, generadores de la base PBW), y ciertas generalizaciones de las relaciones cuánticas de Serre, que expresan el corchete trenzado de dos hiperpalabras como combinación lineal de hiperpalabras intermedias con coeficientes explícitos. En particular obtenemos que el ideal de relaciones asociado a $\mathcal{B}(V)$ es finitamente generado.

El Capítulo 3 se basa en resultados de dos trabajos:

- *On Nichols algebras with standard braiding*, I. Angiono, Alg. Number Th. **3**, no. 1 (2009), 35–106.
- *On pointed Hopf superalgebras*, N. Andruskiewitsch, I. Angiono and H. Yamane. Accepted in Contemporary Mathematics. arxiv:1009.5148, 18 pp.

En él estudiaremos dos familias particulares de trenzas diagonales, las cuales tienen gran importancia. Por un lado, en las primeras dos secciones se estudian las trenzas de tipo estándar, a las cuales podemos definir rápidamente como aquellas trenzas cuyo grupoide de Weyl tiene la misma matriz de Cartan para todos sus objetos, en cuyo caso podemos pensar que el grupoide se reduce a un grupo. En primer lugar se prueba que el sistema de raíces es finito si y sólo si la matriz es de tipo finito, y se clasifican las trenzas de tipo estándar considerando cada matriz posible. Cuando la matriz es de tipo C , D , E o F_4 , las únicas trenzas posibles son las de tipo Cartan; si la matriz es de tipo A , B o G_2 , aparecen otros ejemplos. Para cada uno de ellos hallamos palabras de Lyndon que generan la base PBW para un orden fijo de la base de V y damos fórmulas explícitas para la dimensión. El mismo análisis se realiza en la última Sección del Capítulo para las trenzas de tipo súper: aquéllas cuyo sistema de raíces coincide con el de alguna súper álgebra de Lie semisimple contragradiente.

El Capítulo 4 se basa en

- *On Nichols algebras of diagonal type*, I. Angiono, en desarrollo.

El mismo consiste en hallar una presentación explícita de las álgebras de Nichols con un sistema de raíces finito por generadores y un conjunto minimal de relaciones, profundizando el Teorema 1; dicha presentación nos permitirá estudiar otros problemas asociados a las álgebras de Nichols. Para ello se utilizarán isomorfismos de Lusztig, que quedan determinados por el correspondiente grupoide de Weyl y fueron definidos por Heckenberger en el caso de las álgebras de Nichols de tipo diagonal, extendiendo los resultados de Lusztig. La primer sección servirá para recordar resultados de [H4] que utilizaremos a lo largo del Capítulo. Luego daremos la presentación antes mencionada:

Teorema 2. *Un conjunto minimal de relaciones de $\mathcal{B}(V)$ se obtiene considerando los siguientes 4 tipos de relaciones:*

1. *Relaciones cuánticas de Serre y potencias de generadores x_i que corresponden a vértices que no son de Cartan; son las relaciones necesarias para empezar a definir los isomorfismos de Lusztig.*
2. *Relaciones que surgen de las anteriores vía isomorfismos de Lusztig; corresponden a relaciones del Teorema 2.2.10 que podemos denominar relaciones cuánticas de Serre generalizadas.*
3. *Relaciones que garantizan que el ideal de relaciones es un biideal trenzado: son relaciones de grado menor que las del ítem anterior, y que aparecen en la expresión del coproducto de dichas relaciones en el álgebra tensorial $T(V)$.*
4. *Potencias de vectores raíces que pertenecen a la órbita de vértices de tipo Cartan.*

Ver el Teorema 4.2.1 para una lista completa de las relaciones necesarias.

La estrategia de prueba consiste primero en definir isomorfismos de Lusztig para las álgebras de Hopf trenzadas U^+ que surgen al cocientar por los primeros tres tipos de relaciones. Este proceso es el análogo a obtener el álgebra $U_q^+(\mathfrak{g})$, que constituye el primer paso en la prueba de Lusztig y en la clasificación de Andruskiewitsch-Schneider, y finalmente considerar el álgebra $\mathfrak{u}_q^+(\mathfrak{g})$ como un cociente de la anterior. Los denotaremos U^+ y \mathfrak{u}^+ , respectivamente, de modo que $\mathfrak{u}^+ = \mathcal{B}(V)$. Luego probamos que los generadores PBW de las correspondientes álgebras U^+ y su cociente \mathfrak{u}^+ son los mismos, pero los exponentes de algunos de estos generadores en la primera no están limitados por N_β . Así, al cocientar cada U^+ por las potencias de vectores raíces que sean necesarias se obtiene cada \mathfrak{u}^+ correspondiente.

El Teorema 4.2.1 extiende la presentación obtenida en [A1] para trenzas de tipo estándar, y la de [AAY] para trenzas de tipo super, y da una nueva prueba para las trenzas de tipo Cartan, en particular álgebras envolventes cuantizadas $U_q(\mathfrak{g})$ y grupos cuánticos pequeños $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$.

Luego daremos algunos ejemplos; en particular daremos la presentación de las familias del Capítulo 3. Así recuperaremos las presentaciones dadas en [A1, AAY] para las trenzas estándares y las de tipo súper A, B, C, D , pero también obtendremos la presentación de las de tipo $G(3)$ y $F(4)$. Además mostraremos ejemplos que no están en dichas familias.

Para terminar el Capítulo daremos la primer consecuencia importante del Teorema 4.2.1:

Teorema 3. *Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita sobre un grupo abeliano Γ . Entonces H está generada por sus elementos casi primitivos y de tipo grupo.*

De este modo probamos que la Conjetura 1 es cierta en el caso que el grupo $G(H)$ del álgebra de Hopf punteada H de dimensión finita es abeliano. Dicho resultado sigue de probar que toda álgebra de Hopf trenzada graduada de dimensión finita

$$S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n, \quad S_0 = \mathbf{k}1, \quad S_1 \cong V,$$

generada por V como álgebra, y tal que la trenza sobre V es de tipo diagonal, es necesariamente el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$; dicho resultado extiende [AS6, Thm. 5.5] y [AGI, Thm. 2.5]. La prueba se realiza verificando que cada relación que genera el ideal de relaciones de $\mathcal{B}(V)$ se verifica también en S .

Finalmente, en el Capítulo 5 seguiremos los resultados de

- *Basic quasi-Hopf algebras over cyclic groups*, I. Angiono, Adv. Math. **225** (2010), 3545–3575.

En él aplicaremos resultados de la teoría de álgebras de Hopf para estudiar categorías tensoriales finitas punteadas cuyo grupo de elementos invertibles es cíclico. Para ello, primero construiremos una familia de álgebras cuasi-Hopf no semisimples con asociador no trivial $A(H, s)$, que extienden la construcción de Gelaki. Para ello consideramos $H = \bigoplus_{n \geq 0} H(n)$ un álgebra de Hopf radicalmente graduada de dimensión finita, generada por un elemento de tipo grupo χ de orden m^2 y elementos casi primitivos x_1, \dots, x_θ tales que:

$$\chi x_i \chi^{-1} = q^{d_i} x_i, \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes \chi^{b_i} + 1 \otimes x_i, \quad q \text{ raíz de la unidad de orden } m^2.$$

Sea $\Upsilon(H) := \{s \in \{1, \dots, m-1\} : b_i \equiv s d_i(m), 1 \leq i \leq \theta\}$. Para cada $s \in \Upsilon(H)$, sea $A(H, s)$ la subálgebra de H generada por $\sigma := \chi^m$ y x_1, \dots, x_θ . La estructura de coproducto será la de H modificada por un torcimiento $J_s \in H \otimes H$, para el cual probaremos que $A(H, s)$ es una subálgebra cuasi-Hopf, que no es equivalente por torcimiento a ningún álgebra de Hopf. Así el resultado central del capítulo es el siguiente:

Teorema 4. *Sea \mathcal{C} una categoría tensorial punteada finita cuyos objetos simples forman un grupo cíclico de orden m , para algún m coprimo con 210. Entonces \mathcal{C} es tensorialmente equivalente a alguna de las siguientes categorías:*

1. *la categoría de H -módulos de dimensión finita, donde H es un álgebra de Hopf básica radicalmente graduada de dimensión finita tal que $H/\text{Rad } H \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$,*
2. *la categoría semisimple $\text{Vec}_{\mathbb{Z}_m}^{\omega_s}$, para algún $s \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,*
3. *la categoría de $A(H, s)$ -módulos de dimensión finita, para algún álgebra de Hopf H básica radicalmente graduada de dimensión finita tal que $H/\text{Rad } H \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{m^2}]$, y algún $s \in \Upsilon(H)$.*

En la primer sección daremos definiciones y resultados preliminares sobre álgebras cuasi-Hopf, así como los procesos de equivariantización y de-equivariantización. Estos procesos son construcciones a nivel categórico que se corresponderán en nuestro caso con construir $A(H, s)$ a partir de H y viceversa. En la siguiente sección clasificaremos las álgebras cuasi-Hopf A radicalmente graduadas de dimensión finita tales que $A/\text{Rad } A \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$. Obtendremos que toda álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada de dimensión finita es un álgebra de Hopf, o es semisimple, o corresponde a un álgebra $A(H, s)$; para esta prueba es necesario el Teorema 3.

Consideraremos entonces los posibles levantamientos de tales álgebras, siguiendo los pasos de prueba de [EG3]. En primer lugar probaremos que todo levantamiento de un álgebra de Hopf radicalmente graduada de dimensión finita tal que $H/\text{Rad } H \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$ es equivalente por torcimiento a un álgebra de Hopf. Luego, para cada álgebra cuasi-Hopf no semisimple con asociador no trivial que es un lifting de $A(H, s)$, probaremos que su categoría de representaciones es la de-equivariantización de $\text{Rep } H$, usando resultados de Masuoka [M2] para reducir el problema al caso graduado.

Finalmente, mostraremos cómo se aplica la clasificación anterior al caso en que $m = p^n$, donde $p \geq 11$ es un primo, y $n \in \mathbb{N}$. Tales resultados serán necesarios para la prueba del caso general.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos definiciones y resultados básicos sobre la teoría de álgebras de Hopf, que utilizaremos en los capítulos siguientes. Introduciremos también las nociones de categorías monoidales, tensoriales y trenzadas. Luego, introduciremos los módulos de Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf H , y algunas características de los mismos; entre ellas se recordará que la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld es monoidal trenzada, y si H es de dimensión finita, dicha categoría es tensorial.

Recordaremos las definiciones de álgebras de Hopf en categorías monoidales trenzadas; consideraremos en particular álgebras de Hopf R en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H , y mostraremos una estructura de álgebras de Hopf sobre el producto tensorial $R \otimes H$, llamada biproducto o bosonización, la cual extiende la construcción de producto semidirecto para grupos, pues a partir de ellas se obtienen todas las proyecciones de álgebras de Hopf $K \twoheadrightarrow H$ que admiten secciones $H \hookrightarrow K$. Luego se recordará el resultado principal sobre clasificación de álgebras de Hopf punteadas sobre grupos abelianos, presente en [AS6] y que utilizaremos en el último capítulo.

A continuación caracterizaremos bases PBW para álgebras de Hopf trenzadas de tipo diagonal (esto es, con trenza de tipo diagonal), siguiendo un punto de vista combinatorio a partir de palabras de Lyndon.

Por último recordaremos la clasificación de Heckenberger de todos los espacios trenzados de tipo diagonal cuya álgebra de Nichols asociada tiene sistema de raíces finito.

Las referencias para la teoría de álgebras de Hopf son [Kas, Mo, Sch, Sw], y para la teoría de categorías monoidales y tensoriales [AS4, BaKi, EGNO, EO]. Los resultados sobre bases PBW para álgebras de Hopf trenzadas de tipo diagonal provienen de [Kh1] y las referencias que se hacen en dicho trabajo. Para la última sección seguiremos [H3].

1.1. Álgebras, coálgebras y álgebras de Hopf

A lo largo de esta tesis, \mathbf{k} denotará un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Todos los productos tensoriales que consideraremos serán sobre el cuerpo \mathbf{k} .

Definición 1.1.1. Una \mathbf{k} -álgebra con unidad es un anillo A con un morfismo de anillos $u : \mathbf{k} \rightarrow A$ cuya imagen está contenida en el centro de A . La aplicación $k \times A \rightarrow A$ dada por $(\lambda, a) \mapsto u(\lambda)a$

le da a A una estructura de \mathbf{k} -espacio vectorial tal que la multiplicación $m : A \times A \rightarrow A$ resulta bilineal, de modo que induce una aplicación lineal $A \otimes A \rightarrow A$ que también denotaremos por m . Es decir, A es un \mathbf{k} -espacio vectorial con dos aplicaciones \mathbf{k} -lineales u y m tal que los siguientes diagramas conmutan:

Asociatividad:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \text{id} \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

Unidad:

$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes A & & \\ & u \otimes \text{id} \nearrow & \downarrow m & \nwarrow \text{id} \otimes u & \\ \mathbf{k} \otimes A & & & & A \otimes \mathbf{k} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & A & & \end{array}$$

Notar que la unidad en A está dada por $1_A = u(1_{\mathbf{k}})$.

Definición 1.1.2. Una \mathbf{k} -coálgebra con counidad es un \mathbf{k} -espacio vectorial no nulo C munido de dos aplicaciones lineales, la *comultiplicación* o *coproducto* $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ y la *counidad* $\varepsilon : C \rightarrow \mathbf{k}$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

Coasociatividad:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes \text{id} \\ C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

Counidad:

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow \cong & \downarrow \Delta & \searrow \cong & \\ \mathbf{k} \otimes C & & & & C \otimes \mathbf{k} \\ & \swarrow \varepsilon \otimes \text{id} & & \nwarrow \text{id} \otimes \varepsilon & \\ & & C \otimes C & & \end{array}$$

Para trabajar con coálgebras usaremos la *notación sigma* de Sweedler: si c es un elemento de una coálgebra (C, Δ, ε) , notaremos al elemento $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$ de la siguiente forma

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Así el axioma de coasociatividad de C dado por $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ se puede expresar como

$$(c_1)_1 \otimes (c_1)_2 \otimes c_2 = c_1 \otimes (c_2)_1 \otimes (c_2)_2 = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3, \quad c \in C.$$

Definición 1.1.3. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos coálgebras.

- (i) Una aplicación lineal $f : C \rightarrow D$ es un *morfismo de coálgebras* si $\Delta_D \circ f = (f \otimes f)\Delta_C$ y $\varepsilon_D = \varepsilon_C \circ f$.
- (ii) Un subespacio $I \subseteq C$ es un *coideal* si $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $\varepsilon_C(I) = 0$.
- (iii) Un subespacio $I \subseteq C$ es un *coideal a izquierda* (respectivamente, a derecha) si $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$ (respectivamente, $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$).

Notar que I es un coideal de C si y sólo si el \mathbf{k} -espacio vectorial C/I es una coálgebra con la multiplicación inducida de Δ_C . Además, ε_C es un morfismo de coálgebras, de modo que el subespacio $C^+ = \text{Ker } \varepsilon \subseteq C$ es un coideal de C .

Definición 1.1.4. Sea C una \mathbf{k} -coálgebra. Un C -comódulo a derecha es un \mathbf{k} -espacio vectorial M munido de un morfismo lineal $\rho : M \rightarrow M \otimes C$ (llamado la *coacción*) tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \rho \otimes \text{id} \\
 M \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta_C} & M \otimes C \otimes C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\
 \searrow \cong & & \downarrow \text{id} \otimes \varepsilon \\
 & & M \otimes \mathbf{k}
 \end{array}$$

Análogamente se define un C -comódulo a izquierda.

Usaremos la notación sigma de Sweedler para los comódulos: si M es un C -comódulo a derecha, entonces escribimos

$$\rho(m) = m_0 \otimes m_1 \in M \otimes C \quad \text{para todo } m \in M.$$

Análogamente, si M es un C -comódulo a izquierda con morfismo de estructura $\lambda : M \rightarrow C \otimes M$ entonces escribimos

$$\lambda(m) = m_{-1} \otimes m_0 \in C \otimes M \quad \text{para todo } m \in M.$$

Sean M y N dos C -comódulos a derecha con coacciones ρ_M y ρ_N respectivamente. Una aplicación lineal $f : M \rightarrow N$ es un *morfismo de C -comódulos* a derecha si $\rho_N \circ f = (f \otimes \text{id}) \circ \rho_M$. Un subespacio M' de M se dice un C -subcomódulo de M , si $\rho(M') \subseteq M' \otimes C$.

Las categorías de C -comódulos a derecha y a izquierda se denotarán por \mathcal{M}^C y ${}^C\mathcal{M}$ respectivamente.

Ejemplo 1.1.5. Toda coálgebra C es un comódulo a derecha o a izquierda sobre sí misma, con coacción Δ_C . Más aún, si $f : C \rightarrow D$ un morfismo de coálgebras, C es un D -comódulo a derecha y a izquierda vía los morfismos

$$\rho = (\text{id} \otimes f)\Delta : C \rightarrow C \otimes D \quad \text{y} \quad \lambda = (f \otimes \text{id})\Delta : C \rightarrow D \otimes C.$$

Si I es un coideal a izquierda de C , entonces I es un C -subcomódulo de C a izquierda, y por lo tanto un C -comódulo.

Definición 1.1.6. Sea C una coálgebra.

- (i) Un elemento $c \in C \setminus \{0\}$ se dice de *tipo grupo* si $\Delta(c) = c \otimes c$. $G(C)$ denotará el conjunto de elementos de tipo grupo de C .
- (ii) Sean $a, b \in G(C)$. Un elemento $c \in C$ es (a, b) -*casi primitivo* si $\Delta(c) = a \otimes c + c \otimes b$. Se denota por $\mathcal{P}_{a,b}$ el conjunto de todos los elementos (a, b) -casi primitivos.
Notemos que $k(a - b) \subseteq \mathcal{P}_{a,b}$. Luego, diremos que un elemento casi-primitivo $c \in C$ es *trivial* si $c \in k[G(C)]$.

Una coálgebra C se dice *simple* si no posee subcoálgebras propias y se dice que es *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples.

El *corradical* de C es la suma de todas las subcoálgebras simples de C y se denota por C_0 . Si todas las subcoálgebras simples de C tienen dimensión uno, entonces C se dice *punteada*; en tal caso, $C_0 = k[G(C)]$.

Una *filtración de coálgebras* es una familia de subespacios $\{C(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de C tal que

1. $C(n) \subseteq C(n+1)$ y $C = \cup_{n \in \mathbb{N}} C(n)$.
2. $\Delta(C(n)) \subseteq \sum_{i=0}^n C(i) \otimes C(n-i)$.

Existe una filtración de C tal que $C(0)$ es el corradical C_0 de C , y se define recursivamente C_n para $n \geq 1$ como:

$$C_n := \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C).$$

Luego, $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de subcoálgebras de C que da una filtración de coálgebras, ver [Mo, Cap. 5], [Sw, Cap. IX], la cual se denomina *filtración corradical* de C .

Definición 1.1.7. Una *biálgebra* es una 5-upla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$, donde (B, m, u) es un álgebra, (B, Δ, ε) es una coálgebra y se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- (i) Δ y ε son morfismos de álgebras.
- (ii) m y u son morfismos de coálgebras.

Dadas B y B' dos biálgebras, un *morfismo de biálgebras* es una aplicación lineal $f : B \rightarrow B'$ que es simultáneamente un morfismo de álgebras y un morfismos de coálgebras. Un subespacio $I \subseteq B$ es un *bi-ideal* si es simultáneamente un ideal bilátero y un coideal. Esto es, I es un bi-ideal de una biálgebra B si y sólo si el \mathbf{k} -espacio vectorial B/I es una biálgebra con las operaciones inducidas por el cociente.

Notemos que $1 \in G(B)$. Luego, los elementos casi-primitivos $\mathcal{P}_{1,1}(B)$ de B se denominan *elementos primitivos*. Denotaremos $\mathcal{P}(B) := \mathcal{P}_{1,1}(B)$.

Definición 1.1.8. Dadas una coálgebra (C, Δ, ε) y un álgebra (A, m, u) , el *producto de convolución* en $\text{Hom}_k(C, A)$ se define por

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2), \quad f, g \in \text{Hom}_k(C, A), \quad c \in C.$$

Así $\text{Hom}_k(C, A)$ es una \mathbf{k} -álgebra con unidad $u \circ \varepsilon$.

Definición 1.1.9. Una biálgebra $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es un *álgebra de Hopf* si existe un elemento $\mathcal{S} \in \text{Hom}_k(H, H)$, denominado la *antípoda* de H , que es la inversa de la identidad id_H con respecto al producto de convolución. Esto es, \mathcal{S} satisface las siguientes igualdades:

$$\mathcal{S}(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = h_1\mathcal{S}(h_2) \quad \text{para todo } h \in H.$$

Si H, K son dos álgebras de Hopf, un *morfismo de álgebras de Hopf* es un morfismo de biálgebras $f : H \rightarrow K$ tal que $f(\mathcal{S}_H(h)) = \mathcal{S}_K(f(h))$ para todo $h \in H$. Puede probarse que si $f : H \rightarrow K$ es un morfismo de biálgebras entre dos álgebras de Hopf, entonces f preserva la antípoda, i.e. es un morfismo de álgebras de Hopf.

Un bi-ideal I de H es un *ideal de Hopf* si $\mathcal{S}(I) \subseteq I$. Análogamente, $I \subseteq H$ es un ideal de Hopf si y sólo si el espacio vectorial cociente H/I es un álgebra de Hopf. Notar que el coideal $H^+ = \text{Ker } \varepsilon$ es un ideal de Hopf de H , que se denomina el *ideal de aumento* de H .

Ejemplo 1.1.10. Dado un grupo Γ , el álgebra de grupo $k[\Gamma]$ es un álgebra de Hopf, donde la estructura está determinada para cada $g \in \Gamma$ por

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad \mathcal{S}(g) = g^{-1}.$$

Sea ahora Γ un grupo finito. Denotaremos por $\text{Fun}(\Gamma, \mathbf{k})$ al álgebra de funciones de Γ en \mathbf{k} . Cuando el cuerpo \mathbf{k} esté determinado, denotaremos simplemente $\text{Fun } \Gamma$. Notemos que dicha álgebra tiene una base de elementos idempotentes $(1_g)_{g \in \Gamma}$, donde

$$1_g(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq g, \\ 1 & \text{si } h = g, \end{cases}$$

de modo que $1 = \sum_{g \in \Gamma} 1_g$. $\text{Fun } \Gamma$ admite la siguiente estructura de álgebra de Hopf:

$$\Delta(1_g) = \sum_{h \in \Gamma} 1_h \otimes 1_{h^{-1}g}, \quad \varepsilon(1_g) = \delta_{1,g}, \quad \mathcal{S}(1_g) = 1_{g^{-1}}.$$

Ejemplo 1.1.11. Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $U(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente universal. Entonces $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf donde la estructura está determinada para cada $x \in \mathfrak{g}$ por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad \mathcal{S}(x) = -x.$$

Así $x \in \mathcal{P}(U(\mathfrak{g}))$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Más aún, se puede ver que $\mathcal{P}(U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.1.12. Fijemos $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ y sea $q \in k$ una raíz N -ésima primitiva de la unidad. El *álgebra de Taft* $T(q)$ es la \mathbf{k} -álgebra dada por generadores g, x y relaciones $g^N = 1, x^N = 0$ y $gx = qxg$. Dicha álgebra admite una estructura de álgebra de Hopf determinada por

$$\Delta g = g \otimes g, \quad \Delta x = x \otimes 1 + g \otimes x,$$

de modo que $\varepsilon(g) = 1, \varepsilon(x) = 0, \mathcal{S}(g) = g^{-1}$ y $\mathcal{S}(x) = -g^{-1}x$. $T(q)$ resulta ser un álgebra de Hopf punteada de dimensión n^2 , tal que $G(T(q)) = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/(N)$.

Ejemplo 1.1.13. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$ su matriz de Cartan, y $d_i \in \mathbb{N}$ tales que $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$. Sea además q un parámetro. El *álgebra envolvente*

cuantizada $U_q(\mathfrak{g})$ es el $\mathbf{k}(q)$ -álgebra presentada por generadores $E_i, K_i^{\pm 1}, F_i$, $1 \leq i \leq \theta$ y por relaciones

$$\begin{aligned} K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, & K_i K_j &= K_j K_i, \\ (\mathrm{ad}_c E_i)^{1-a_{ij}} E_j &= (\mathrm{ad}_c F_i)^{1-a_{ij}} F_j = 0, \\ E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} (K_i - K_i^{-1}), \end{aligned}$$

donde $(\mathrm{ad}_c E_i)E_j = E_i E_j - q^{d_i a_{ij}} E_j E_i$. Tiene estructura de álgebra de Hopf determinada por

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

de modo que $G(U_q(\mathfrak{g})) = \langle K_i \rangle \cong \mathbb{Z}^\theta$. Luego, podemos evaluar q en elementos del cuerpo. Si q no es una raíz de la unidad, obtenemos álgebras de dimensión infinita, presentada por el mismo conjunto de relaciones.

Lusztig introdujo álgebras análogas de dimensión finita, denominadas *grupos cuánticos pequeños* o *núcleos de Frobenius-Lusztig*, y que se denominan $u_q(\mathfrak{g})$. Surgen de considerar el caso en que q es una raíz de orden N . Las relaciones que presentan el álgebra surgen de agregar al conjunto anterior las siguientes:

$$K_i^N = E_\alpha^N = F_\alpha^N = 0, \quad \alpha \in \Delta_+,$$

donde E_α (respectivamente F_α) es una cierta combinación de palabras en las letras E_i de \mathbb{Z}^θ -grado α , y Δ_+ es el conjunto de raíces positivas de \mathfrak{g} . La estructura de coproducto queda determinada por las mismas ecuaciones, y en este caso $G(u_q(\mathfrak{g})) = \langle K_i \rangle \cong (\mathbb{Z}_N)^\theta$.

Definición 1.1.14. Sean H un álgebra de Hopf y M un H -comódulo a derecha. El *conjunto de coinvariantes* de H en M es el subespacio

$$M^{\mathrm{co}H} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

Análogamente, si M es un H -comódulo a izquierda, el conjunto de coinvariantes de H en M es el subespacio

$${}^{\mathrm{co}H}M = \{m \in M \mid \lambda(m) = 1 \otimes m\}.$$

Dadas A y H álgebras de Hopf, y $\pi : A \rightarrow H$ un morfismo de álgebras de Hopf, por el Ejemplo 1.1.5 A admite una estructura de H -comódulo a derecha y a izquierda. Luego, los espacios coinvariantes, que denotaremos por $A^{\mathrm{co}H} = A^{\mathrm{co}\pi}$ y ${}^{\mathrm{co}H}A = {}^{\mathrm{co}\pi}A$, están dados por

$$A^{\mathrm{co}\pi} = \{a \in A \mid (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\} \quad \text{y} \quad {}^{\mathrm{co}\pi}A = \{a \in A \mid (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = 1 \otimes a\}.$$

Tales espacios resultan ser subálgebras de A y se denominan las subálgebras de *coinvariantes*.

1.2. Categorías tensoriales

Definición 1.2.1. [EGNO, EO] Una *categoría monoidal* es una colección $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbb{I}, l, r)$, donde:

- \mathcal{C} es una categoría abeliana, y \mathbb{I} es un objeto de \mathcal{C} , llamado *unidad*;

- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un bifunctor, llamado *producto tensorial*;
- $a_{V,W,U} : (V \otimes W) \otimes U \rightarrow V \otimes (W \otimes U)$, $r_V : V \otimes \mathbb{I} \rightarrow V$, $l_V : \mathbb{I} \otimes V \rightarrow V$, donde $U, V, W \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, son isomorfismos naturales tales que

$$\begin{array}{ccccc}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \xrightarrow{a_{X \otimes Y, Z, W}} & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) & \xrightarrow{a_{X, Y, Z \otimes W}} & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
\downarrow a_{X, Y, Z} \otimes \text{id}_W & & & & \uparrow \text{id}_X \otimes a_{Y, Z, W} \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & \xrightarrow{a_{X, Y \otimes Z, W}} & & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \\
(X \otimes \mathbb{I}) \otimes Y & \xrightarrow{r_X \otimes \text{id}_Y} & X \otimes Y & & \\
\searrow a_{X, \mathbb{I}, Y} & & \swarrow \text{id}_X \otimes l_Y & & \\
& X \otimes (\mathbb{I} \otimes Y) & & &
\end{array}$$

Un *functor monoidal* entre dos categorías monoidales $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbb{I}, l, r)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', a', \mathbb{I}', l', r')$ es un par (F, J) , donde $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un funtor, y $\{J_{X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y) \mid X, Y \in \mathcal{C}\}$ es un isomorfismo natural, tales que $F(\mathbb{I})$ es isomorfo a \mathbb{I}' , y además

$$\begin{array}{ccc}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) & \xrightarrow{a'_{F(X), F(Y), F(Z)}} & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \\
\downarrow J_{X,Y} \otimes' \text{id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{id}_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z} \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) & & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \\
\downarrow J_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow J_{X, Y \otimes Z} \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z})} & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{array} \tag{1.1}$$

conmuta para todos los objetos X, Y, Z de \mathcal{C} .

Una *equivalencia de categorías monoidales* es un funtor monoidal (F, J) tal que F es una equivalencia de categorías.

Definición 1.2.2. Un *dual a derecha* de un objeto V en una categoría monoidal \mathcal{C} es un triple (V^*, e_V, b_V) , donde $V^* \in \text{Obj} \mathcal{C}$, y $e_V : V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{I}$, $b_V : \mathbb{I} \rightarrow V \otimes V^*$ son morfismos (denominados *evaluación* y *coevaluación*) tales que

$$\begin{aligned}
V &\simeq \mathbb{I} \otimes V \xrightarrow{b_V \otimes \text{id}_V} (V \otimes V^*) \otimes V \xrightarrow{a_{V, V^*, V}} V \otimes (V^* \otimes V) \xrightarrow{\text{id}_V \otimes e_V} V \otimes \mathbb{I} \simeq V, \\
V^* &\simeq V^* \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\text{id}_{V^*} \otimes b_V} V^* \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{a_{V^*, V, V^*}^{-1}} (V^* \otimes V) \otimes V^* \xrightarrow{e_V \otimes \text{id}_{V^*}} \mathbb{I} \otimes V^* \simeq V^*,
\end{aligned}$$

son, respectivamente, la identidad de V y de V^* .

Un *dual a izquierda* de un objeto V en una categoría monoidal \mathcal{C} es un triple $(*V, e_V, b_V)$, donde $*V \in \text{Obj}\mathcal{C}$, y $e'_V : V \otimes *V \rightarrow \mathbb{I}$, $b'_V : \mathbb{I} \rightarrow *V \otimes V$ son morfismos tales que

$$\begin{aligned} V &\simeq V \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\text{id}_V \otimes b'_V} V \otimes (*V \otimes V) \xrightarrow{a_{V,*V,V}^{-1}} (V \otimes *V) \otimes V \xrightarrow{e'_V \otimes \text{id}_V} \mathbb{I} \otimes V \simeq V, \\ *V &\simeq \mathbb{I} \otimes *V \xrightarrow{b'_V \otimes \text{id}_{*V}} (*V \otimes V) \otimes *V \xrightarrow{a_{*V,V,*V}} *V \otimes (V \otimes *V) \xrightarrow{\text{id}_{*V} \otimes e'_V} *V \otimes \mathbb{I} \simeq *V, \end{aligned}$$

son, respectivamente, la identidad de V y de $*V$.

Una categoría monoidal es *rígida* si todo objeto admite un dual a izquierda y un dual a derecha.

Definición 1.2.3. Una categoría \mathbf{k} -lineal abeliana pequeña se dice *localmente finita* si satisface las siguientes condiciones:

- $\text{Hom}(X, Y)$ es de dimensión finita para todo par $X, Y \in \text{Obj}\mathcal{C}$,
- todo objeto de \mathcal{C} es de longitud finita.

Una categoría *tensorial* [EGNO, EO] es una categoría monoidal rígida, localmente finita, tal que el bifunctor \otimes es bilineal en los morfismos, y $\text{End}(\mathbb{I}) \cong \mathbf{k}$.

Definición 1.2.4. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} dos categorías tensoriales. Un *functor cuasi-tensorial* es un par (F, J) , donde $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor fiel y exacto, $J : F(\bullet) \otimes_{\mathcal{D}} F(\bullet) \rightarrow F(\bullet \otimes_{\mathcal{C}} \bullet)$ es un isomorfismo funtorial y $F(\mathbb{I}_{\mathcal{C}}) = \mathbb{I}_{\mathcal{D}}$.

Un *functor tensorial* es un functor cuasi-tensorial tal que J satisface (1.1).

Ejemplo 1.2.5. La categoría de espacios vectoriales de dimensión finita, Vec , es tensorial.

Si Γ es un grupo, la categoría de representaciones de dimensión finita sobre \mathbf{k} , $\text{Rep}_{\mathbf{k}}\Gamma$, también lo es. Consideremos la categoría de espacios vectoriales Γ -graduados de dimensión finita, Vec_{Γ} : $V = \bigoplus_{g \in \Gamma} V_g$, donde los morfismos son las transformaciones lineales que preservan la graduación. El producto tensorial es el usual: $(V \otimes W)_g = \bigoplus_{h \in \Gamma} V_h \otimes W_{h^{-1}g}$. El conjunto de objetos simples es $(\delta_g)_{g \in \Gamma}$: espacios de dimensión uno y grado g , para cada $g \in \Gamma$, $\delta_g \otimes \delta_h \cong \delta_{gh}$.

Sea $\omega \in Z^3(\Gamma, \mathbf{k}^\times)$. Entonces podemos considerar la categoría $\text{Vec}_{\Gamma}^{\omega}$, cuyos objetos son nuevamente los espacios Γ -graduados, pero donde los isomorfismos de asociatividad están dados por los siguientes escalares:

$$a_{\delta_g, \delta_h, \delta_k}^{\omega} = \omega(g, h, k) : (\delta_g \otimes \delta_h) \otimes \delta_k \rightarrow \delta_g \otimes (\delta_h \otimes \delta_k), \quad g, h, k \in \Gamma. \quad (1.2)$$

Ejemplo 1.2.6. Sea H un álgebra de Hopf. Dados $V, W \in \text{Rep } H$, se tiene $V \otimes W \in \text{Rep } H$:

$$h \cdot (v \otimes w) := h_1 \cdot v \otimes h_2 \cdot w, \quad h \in H, v \in V, w \in W.$$

Considerando los isomorfismos de asociatividad triviales (al igual que en Vec), y la unidad $\mathbb{I} = \mathbf{k}$, donde $h \cdot 1 = \varepsilon(h)$, la categoría $\text{Rep } H$ de representaciones de H de dimensión finita es monoidal. Si la antípoda es biyectiva, $\text{Rep } H$ es tensorial.

Si K es otro álgebra de Hopf y $f : H \rightarrow K$ es un morfismo de álgebras de Hopf, tal morfismo induce canónicamente un functor tensorial $F : \text{Rep } K \rightarrow \text{Rep } H$ donde para cada $V \in \text{Rep } K$, $F(V)$ es el mismo espacio vectorial V con la acción

$$h \cdot_H v = f(h) \cdot_K v, \quad h \in H, v \in V.$$

Definición 1.2.7. Una categoría \mathcal{C} abeliana \mathbf{k} -lineal se dice *finita* si es equivalente a $\text{Rep } A$, para alguna \mathbf{k} -álgebra A de dimensión finita, o equivalentemente, si satisface:

- \mathcal{C} es localmente finita, y tiene finitos objetos simples salvo isomorfismos,
- \mathcal{C} tiene suficientes proyectivos.

Definición 1.2.8. Sea \mathcal{C} una categoría tensorial. Un funtor cuasi-tensorial $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Vec}$ se dice un *funtor de cuasi-fibra*. Si F es un funtor tensorial, entonces se dice que F es un *funtor de fibra*.

Ejemplo 1.2.9. Los funtores de olvido $\text{Vec}_\Gamma \rightarrow \text{Vec}$ son funtores de fibra, y los funtores de olvido $\text{Vec}_\Gamma^{\omega} \rightarrow \text{Vec}$ son funtores de cuasi-fibra (donde podemos elegir J arbitrariamente). Estos últimos funtores son de fibra si y sólo si ω es cohomológicamente trivial.

Definición 1.2.10. Una *categoría trenzada* es una categoría tensorial \mathcal{C} junto con un isomorfismo natural (denominado *trenza*), $c_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$, tal que

$$\begin{aligned} c_{M,N \otimes P} &= (\text{id}_N \otimes c_{M,P}) \circ (c_{M,N} \otimes \text{id}_P), \\ c_{M \otimes N, P} &= (c_{M,P} \otimes \text{id}_N) \circ (\text{id}_M \otimes c_{N,P}). \end{aligned}$$

Introducimos ahora la definición del centro de una categoría. Los resultados que se presentan a continuación están presentes en [Kas, Sección XIII.4].

Definición 1.2.11. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbb{I}, l, r)$ una categoría monoidal. El *centro* de \mathcal{C} , que denotaremos $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, es la categoría cuyos objetos son pares $(V, c_{\bullet, V})$, donde V es un objeto de \mathcal{C} , y $c_{\bullet, V} : \bullet \otimes V \rightarrow V \otimes \bullet$ es un isomorfismo natural tal que para todo par de objetos X, Y de \mathcal{C} ,

$$c_{X \otimes Y, V} = a_{V, X, Y} \circ (c_{X, V} \otimes \text{id}_Y) \circ a_{X, V, Y}^{-1} \circ (\text{id}_X \otimes c_{Y, V}) \circ a_{X, Y, V}.$$

Un morfismo $f : (V, c_{\bullet, V}) \rightarrow (W, c_{\bullet, W})$ es un morfismo $f : V \rightarrow W$ de \mathcal{C} tal que

$$(f \otimes \text{id}_X) \circ c_{X, V} = c_{X, W} \circ (\text{id}_X \otimes f), \quad \text{para todo } X \in \text{Obj } \mathcal{C}.$$

Teorema 1.2.12. $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es una categoría monoidal trenzada, donde

1. el producto tensorial está definido por

$$(V, c_{\bullet, V}) \otimes (W, c_{\bullet, W}) := (V \otimes W, c_{\bullet, V \otimes W}),$$

siendo $c_{\bullet, V \otimes W} : \bullet \otimes (V \otimes W) \rightarrow (V \otimes W) \otimes \bullet$ el isomorfismo natural dado para cada objeto X de \mathcal{C} por:

$$c_{X, V \otimes W} := a_{V, W, X}^{-1} \circ (\text{id}_V \otimes c_{X, W}) \circ a_{V, X, W} \circ (c_{X, V} \otimes \text{id}_W) \circ a_{X, V, W}^{-1},$$

2. la unidad es $(\mathbb{I}, l^{-1} \circ r)$,

3. la trenza está dada por $c_{V, W} : (V, c_{\bullet, V}) \otimes (W, c_{\bullet, W}) \rightarrow (W, c_{\bullet, W}) \otimes (V, c_{\bullet, V})$.

1.3. Espacios trenzados y módulos de Yetter-Drinfeld

Definición 1.3.1. Dados V un espacio vectorial y $c : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ un isomorfismo lineal, (V, c) se dice un *espacio vectorial trenzado* si c es solución de la ecuación de trenzas

$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c). \quad (1.3)$$

(V, c) es de *tipo grupo* si existe una base x_1, \dots, x_θ de V y elementos $g_1, \dots, g_\theta \in \text{End } V$ tales que

$$c(x_i \otimes x_j) = g_i(x_j) \otimes x_i, \quad 1 \leq i, j \leq \theta. \quad (1.4)$$

Necesariamente, $g_i \in GL(V)$.

(V, c) es de *tipo diagonal* si existe una base x_1, \dots, x_θ de V , y escalares $q_{ij} \in \mathbf{k}^\times$ tales que

$$c(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i, \quad 1 \leq i, j \leq \theta. \quad (1.5)$$

La matriz (q_{ij}) se denomina matriz de la trenza.

La matriz de trenza de un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal es única a menos de permutación de filas y columnas.

Lema 1.3.2. [AS5, Lemma 1.2] Sea (V, c) un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, cuya matriz con respecto a la base x_1, \dots, x_θ de V es (q_{ij}) . Si existe otra base y_1, \dots, y_θ de V y escalares $p_{ij} \in \mathbf{k}^\times$ tales que $c(y_i \otimes y_j) = p_{ij} y_j \otimes y_i$ para todo par $1 \leq i, j \leq \theta$, entonces existe $\sigma \in \mathbb{S}_\theta$ tal que $q_{ij} = p_{\sigma(i)\sigma(j)}$ para todo par $1 \leq i, j \leq \theta$. \square

Definición 1.3.3. Sea H un álgebra de Hopf. Un *módulo de Yetter-Drinfeld* (a izquierda) sobre H es un H -módulo a izquierda y un H -comódulo a izquierda V que satisface:

$$\delta(h \cdot v) = h_1 v_{-1} \mathcal{S}(h_3) \otimes h_2 \cdot v_0, \quad \text{para todo } v \in V, h \in H. \quad (1.6)$$

${}^H_H \mathcal{YD}$ denotará la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H ; los morfismos de módulos de Yetter-Drinfeld son morfismos de módulos y comódulos simultáneamente. Con la estructura usual de módulo y comódulo, el producto tensorial $M \otimes N$, siendo $M, N \in {}^H_H \mathcal{YD}$, es un módulo de Yetter-Drinfeld. Luego, ${}^H_H \mathcal{YD}$ es una categoría monoidal, cuyo objeto unidad es \mathbf{k} .

Dados $M, N \in {}^H_H \mathcal{YD}$, definimos $c_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$

$$c_{M,N}(m \otimes n) = m_{-1} \cdot n \otimes m_0, \quad m \in M, n \in N, \quad (1.7)$$

el cual es un morfismo de módulos y comódulos. Si H tiene antípoda biyectiva, c tiene inversa $(c^{-1})_{N,M} : N \otimes M \rightarrow M \otimes N$,

$$(c^{-1})_{N,M}(n \otimes m) = m_0 \otimes \mathcal{S}^{-1}(m_{-1}) \cdot n, \quad m \in M, n \in N.$$

Así, en este caso, $({}^H_H \mathcal{YD}, c, \cdot)$ es una categoría trenzada.

Más aún, la subcategoría de ${}^H_H\mathcal{YD}$ de los módulos de Yetter-Drinfeld de dimensión finita es rígida. Para cada $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $\dim(V) = n < \infty$, sea $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ una base de V , y $f^{(1)}, \dots, f^{(n)} \in V^*$ su base dual. V^* es un módulo de Yetter-Drinfeld si consideramos para cada $h \in H$, $f \in V^*$, $v \in V$

$$(h \cdot f)(v) = f(\mathcal{S}(h) \cdot v),$$

$$\delta(f) = f_{-1} \otimes f_0 = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}^{-1}(v_{-1}^{(i)}) \otimes f(v_0^{(i)}) f^{(i)}.$$

La categoría de módulos de Yetter-Drinfeld de un álgebra de Hopf es equivalente a otra categoría trenzada canónicamente asociada a H :

Proposición 1.3.4. *Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva (en particular H de dimensión finita). Existe una equivalencia monoidal entre las categorías $\mathcal{Z}(\text{Rep } H)$ y ${}^H_H\mathcal{YD}$, que preserva la trenza.*

Demostración. Se sigue de [Kas, Thm. XIII.5.1]. □

Ejemplo 1.3.5. Sea Γ un grupo y $H = \mathbf{k}\Gamma$. Un H -comódulo V es un espacio vectorial Γ -graduado: $V = \bigoplus_{g \in \Gamma} V_g$, $V_g = \{v \in V : \delta(v) = g \otimes v\}$. Si V es además un H -módulo a izquierda, definimos $c : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$,

$$c(x \otimes y) = g \cdot y \otimes x, \quad x \in V_g, y \in V.$$

Entonces, $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ si y sólo si $gV_h \subseteq V_{ghg^{-1}}$, para todo $g, h \in \Gamma$. En tal caso, (V, c) es un espacio vectorial trenzado.

Ejemplo 1.3.6. Sea Γ un grupo abeliano y $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, tal que la acción de Γ es diagonalizable (por ejemplo, si Γ es finito): $V = \bigoplus_{\chi \in \hat{\Gamma}} V^\chi$, donde $V^\chi = \{v \in V : g \cdot v = \chi(g)v, \forall g \in \Gamma\}$. Entonces,

$$V = \bigoplus_{g \in \Gamma, \chi \in \hat{\Gamma}} V_g^\chi, \quad \text{donde } V_g^\chi = V_g \cap V^\chi. \quad (1.8)$$

Recíprocamente, si V admite una descomposición como en (1.8), es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre Γ , al cual podemos considerar un espacio trenzado de tipo diagonal

$$c(x \otimes y) = \chi(g)y \otimes x, \quad x \in V_g, y \in V^\chi, g \in \Gamma, \chi \in \hat{\Gamma}.$$

1.4. Álgebras de Hopf en categorías trenzadas

Definición 1.4.1. Sea \mathcal{C} una categoría monoidal. Un *álgebra asociativa* en \mathcal{C} es una terna (A, m, u) , donde $A \in \text{Obj } \mathcal{C}$ y $m : A \otimes A \rightarrow A$, $u : \mathbb{I} \rightarrow A$ son morfismos en \mathcal{C} , tales que

$$m \circ (m \otimes \text{id}) = m \circ (\text{id} \otimes m) \circ \alpha_{A,A,A},$$

$$m \circ (u \otimes \text{id}) = l_A, \quad m \circ (\text{id} \otimes u) = r_A.$$

Una *coálgebra* en \mathcal{C} es una terna (C, Δ, ε) , donde $C \in \text{Obj } \mathcal{C}$ y $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$, $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{I}$ son morfismos en \mathcal{C} , tales que

$$(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = \alpha_{A,A,A} \circ (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta,$$

$$l_C \circ (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id}_C = r_C \circ (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Definición 1.4.2. Sea \mathcal{C} una categoría trenzada. Si $R, S \in \text{Obj } \mathcal{C}$ son álgebras en \mathcal{C} , definimos una estructura de álgebra en \mathcal{C} sobre $R \otimes S$ con multiplicación

$$m_{R \otimes S} := (m_R \otimes m_S) \circ (\text{id}_R \otimes c_{S,R} \otimes \text{id}_S).$$

Si $R, S \in \text{Obj } \mathcal{C}$ son coálgebras en \mathcal{C} , $R \otimes S$ es una coálgebra en \mathcal{C} con comultiplicación

$$\Delta_{R \otimes S} := (\text{id}_R \otimes c_{S,R} \otimes \text{id}_S) \circ (\Delta_R \otimes \Delta_S).$$

Una *biálgebra* en \mathcal{C} es una colección $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que

1. (H, m, u) es un álgebra en \mathcal{C} ,
2. (H, Δ, ε) es una coálgebra en \mathcal{C} ,
3. Δ, ε son morfismos de álgebras, con la estructura anterior sobre $H \otimes H$.

Si además existe un morfismo $\mathcal{S} : H \rightarrow H$ tal que $m(\mathcal{S} \otimes \text{id})\Delta = m(\text{id} \otimes \mathcal{S})\Delta = u\varepsilon$, H se dice un *álgebra de Hopf* en \mathcal{C} , y \mathcal{S} es su *antípoda*.

Ejemplo 1.4.3. Si $H = \mathbf{k}$, la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H es la categoría de \mathbf{k} -espacios vectoriales, y la trenza es la trasposición usual $x \otimes y \mapsto y \otimes x$. Un álgebra de Hopf en esta categoría es un álgebra de Hopf sobre \mathbf{k} .

Un álgebra de Hopf *graduada* es un álgebra de Hopf R con una graduación $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$ tal que R es un álgebra graduada y una coálgebra graduada.

Si $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$ es un álgebra de Hopf graduada en ${}^H_H \mathcal{YD}$ con componentes homogéneas de dimensión finita, $R^* = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)^*$ es un álgebra de Hopf trenzada graduada sobre ${}^H_H \mathcal{YD}$.

Definición 1.4.4. Si $V \in {}^H_H \mathcal{YD}$, el álgebra tensorial $T(V)$ admite una única estructura de álgebra de Hopf trenzada graduada en ${}^H_H \mathcal{YD}$ tal que $V \subseteq \mathcal{P}(T(V))$. Como en [AS4], consideramos la familia \mathfrak{S} de todos los ideales homogéneos biláteros $I \subseteq T(V)$ tales que

- I está generado por elementos homogéneos de grado ≥ 2 ,
- I es submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$,
- I es un ideal de Hopf: $\Delta(I) \subset I \otimes T(V) + T(V) \otimes I$.

El *álgebra de Nichols* $\mathcal{B}(V)$ asociada a V es el cociente de $T(V)$ por el mayor ideal $I(V)$ de \mathfrak{S} .

Notación: Consideraremos los siguientes polinomios en $\mathbb{Z}[t]$:

$$(n)_t := 1 + t + \cdots + t^{n-1}, \quad (n)_t! = (1)_t(2)_t \cdots (n)_t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Luego, los *números q-combinatorios* se definen como el cociente:

$$\binom{n}{i}_t := \frac{(n)_t!}{(n-i)_t!(i)_t!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Dado que se verifica la identidad:

$$\binom{n+1}{i}_t = t^i \binom{n}{i}_t + \binom{n}{i-1}_t$$

podemos probar inductivamente que $\binom{n}{i}_t \in \mathbb{Z}[t]$, para todo n y todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Para cada $q \in \mathbf{k}$, $\binom{n}{i}_q$ denotará la evaluación del polinomio $\binom{n}{i}_t$ en $t = q$.

Ejemplo 1.4.5. Consideramos V de dimensión 1, y sea $x \in V$ no nulo. Luego, identificamos a $T(V)$ con $\mathbf{k}[x]$, el álgebra de polinomios en una variable x . La trenza c está caracterizada por un escalar $q \in \mathbf{k}^\times$ tal que $c(x \otimes x) = q x \otimes x$. Por inducción se prueba que

$$\Delta(x^n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}_q x^i \otimes x^{n-i},$$

de donde deducimos que:

$$\mathcal{B}(V) \cong \begin{cases} \mathbf{k}[x], & q = 1 \text{ o no es una raíz de la unidad,} \\ \mathbf{k}[x]/\langle x^N \rangle, & q \text{ es una raíz de la unidad de orden } N, \end{cases}$$

pues en el segundo caso, $\Delta(x^N) = x^N \otimes 1 + 1 \otimes x^N$ en $T(V)$.

Ejemplo 1.4.6. Consideramos la subálgebra de $U_q(\mathfrak{g})$ del Ejemplo 1.1.13 generada por los E_i . La misma se conoce como la *parte positiva* del álgebra $U_q(\mathfrak{g})$ y se denota $U_q^+(\mathfrak{g})$, en analogía con la teoría de las álgebras envolventes clásicas. $U_q^+(\mathfrak{g})$ es el álgebra de Nichols correspondiente al espacio trenzado (V, c) , generado como espacio vectorial por los E_i , cuya trenza es

$$c(E_i \otimes E_j) = q^{d_i a_{ij}} E_j \otimes E_i,$$

y el coproducto verifica $\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + 1 \otimes E_i$.

Caso análogo ocurre al considerar $\mathfrak{u}_q^+(\mathfrak{g})$, la parte positiva del grupo cuántico pequeño $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$, con la diferencia que en este caso obtenemos un álgebra de Nichols de dimensión finita:

$$\dim \mathfrak{u}_q^+(\mathfrak{g}) = N^{|\Delta^+|}.$$

Sea (V, c) un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal tal que $q_{ij} = q_{ji}$ para todo i, j . Sea $\Gamma = \mathbb{Z}^\theta$, y $\alpha_1, \dots, \alpha_\theta$ la base canónica. Definimos los caracteres $\chi_1, \dots, \chi_\theta$ de Γ de acuerdo a

$$\chi_j(g_i) = q_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq \theta.$$

Consideremos V como el módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\mathbf{k}\Gamma$ tal que $x_i \in V_{\alpha_i}^{\chi_i}$. En tal caso podemos caracterizar el álgebra de Nichols como un cociente del álgebra tensorial que admite una forma bilineal no degenerada de la siguiente forma:

Proposición 1.4.7. [Lu, Prop. 1.2.3], [AS4, Prop. 2.10]. Sean $a_1, \dots, a_\theta \in \mathbf{k}^\times$. Existe una única forma bilineal $(|) : T(V) \times T(V) \rightarrow \mathbf{k}$ tal que $(1|1) = 1$, y:

$$(x_i|x_j) = \delta_{ij} a_i, \quad \text{para todo } i, j; \tag{1.9}$$

$$(x|yy') = (x_1|y)(x_2|y'), \quad \text{para todo } x, y, y' \in T(V); \tag{1.10}$$

$$(xx'|y) = (x|y_1)(x'|y_2), \quad \text{para todo } x, x', y \in T(V). \tag{1.11}$$

Dicha forma es simétrica y satisface

$$(x|y) = 0, \quad \text{para todo } x \in T(V)_g, y \in T(V)_h, g, h \in \Gamma, g \neq h. \quad (1.12)$$

Además, $I(V)$ es el radical de la forma $\{x \in T(V) : (x|y) = 0, \forall y \in T(V)\}$, de modo que $(|)$ induce una forma bilineal no degenerada en $\mathcal{B}(V) = T(V)/I(V)$, que denotaremos de la misma forma. \square

Así, el ideal $I(V)$ es \mathbb{Z}^θ -homogéneo, pues las componentes \mathbb{Z}^θ -homogéneas son ortogonales, ver [AS4, Prop. 2.10]. Luego $\mathcal{B}(V)$ es \mathbb{Z}^θ -graduada.

Incluimos aquí también [AS4, Lemma 3.7], que utilizaremos más adelante.

Lema 1.4.8. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, y $\mathcal{B}(V)$ su álgebra de Nichols.*

- (a) Si q_{ii} es una raíz de la unidad de orden $N > 1$, entonces $x_i^N = 0$.
- (b) Si $i \neq j$, entonces $(ad_c x_i)^r(x_j) = 0$ si y sólo si $(r)!_{q_{ii}} \prod_{0 \leq k \leq r-1} (1 - q_{ii}^k q_{ij} q_{ji}) = 0$.
- (c) Si $i \neq j$ y $q_{ij} q_{ji} = q_{ii}^r$ para algún $r \leq 0$, entonces $(ad_c x_i)^{1-r}(x_j) = 0$. \square

1.5. Biproducto o bosonización

Sean A, H álgebras de Hopf, y $\pi : A \rightarrow H$, $\iota : H \rightarrow A$ morfismos de álgebras de Hopf tales que $\pi \iota = id_H$. Consideremos el álgebra de coinvariantes a izquierda

$$R := A^{\text{co}\pi} = \{a \in A : (\text{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}.$$

Notar que $R \in {}^H_H \mathcal{YD}$, vía la acción adjunta $h \cdot r = \iota(h_1) r \iota(\mathcal{S}(h_2))$, y la coacción $\delta = (\pi \otimes \text{id}) \circ \Delta : R \rightarrow H \otimes R$. Más aún, R es un álgebra de Hopf en ${}^H_H \mathcal{YD}$ con la siguiente estructura:

- R hereda la estructura de álgebra de A por ser una subálgebra;
- la comultiplicación resulta $\Delta_R(r) = r_1 \iota \pi \mathcal{S}(r_2) \otimes r_3$, y la counidad, $\varepsilon_R(r) = \varepsilon(r), \forall r \in R$;
- la antípoda es $\mathcal{S}_R(r) = \iota \pi(r_1) \mathcal{S}_A(r_2)$.

Definición 1.5.1. Consideremos H un álgebra de Hopf, y R un álgebra de Hopf en ${}^H_H \mathcal{YD}$. La *bosonización* o *biproducto* de R por H es el álgebra de Hopf $(R \# H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$, donde $R \# H = R \otimes H$ como espacio vectorial, y se define

$$(r \# h)(s \# f) = r(h_1 \cdot s) \# h_2 f, \quad (1.13)$$

$$u(1) = 1 \# 1 \quad (1.14)$$

$$\Delta(r \# h) = r_1 \# (r_2)_{-1} h_1 \otimes (r_2)_0 \# h_2, \quad (1.15)$$

$$\varepsilon(r \# h) = \varepsilon_R(r) \varepsilon_H(h), \quad (1.16)$$

$$\mathcal{S}(r \# h) = (1 \# \mathcal{S}_H(r_{-1} h)) (\mathcal{S}_R(r_0) \# 1). \quad (1.17)$$

para $r, s \in R, h, f \in H$.

Observación 1.5.2. Las aplicaciones

$$\begin{aligned}\pi : R\#H &\rightarrow H, & \pi(r\#h) &= \varepsilon_R(r)h, \\ \iota : H &\rightarrow R\#H, & \iota(h) &= 1\#h,\end{aligned}$$

son morfismos de álgebras de Hopf, y verifican $\pi\iota = id_H$. Además,

$$R\#1 = \{a \in R\#H : (\text{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}.$$

Recíprocamente, sean A, H álgebras de Hopf, y $\pi : A \rightarrow H$, $\iota : H \rightarrow A$ morfismos de álgebras de Hopf tales que $\pi\iota = id_H$. Denotemos como antes y $R = A^{\text{co}\pi}$. Luego, $A \cong R\#H$ como álgebras de Hopf, ver [AS4].

Sea H un álgebra de Hopf. Una familia $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subespacios de H es una *filtración de álgebras de Hopf* si es una filtración de coálgebras y de álgebras tal que $\mathcal{S}(H_n) \subseteq H_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El espacio graduado asociado $\text{gr } H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n / H_{n-1}$ admite entonces una estructura natural de álgebra de Hopf.

Sea A un álgebra de Hopf; asumimos que A_0 ES UNA SUBÁLGEBRA DE HOPF. Entonces la filtración corradical resulta una filtración de álgebras de Hopf, ver [Mo], y $\text{gr } A$ es un álgebra de Hopf graduada. Más aún, $H := A_0 \simeq \text{gr } A(0)$ es una subálgebra de Hopf de $\text{gr } A$. La proyección $\pi : \text{gr } A \rightarrow H$ es un morfismo de álgebras de Hopf, y la inclusión ι es una sección: $\pi\iota = id_H$.

Sea $R = \text{gr } A^{\text{co}\pi}$; R es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y $\text{gr } A$ puede reconstruirse a partir de R y H como $\text{gr } A \simeq R\#H$. El álgebra de Hopf trenzada R es graduada, $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$, pues hereda la graduación de $\text{gr } A$; más aún,

1. $R(0) = \mathbf{k}1$;
2. $R(1) = \mathcal{P}(R) = \{r \in R : \Delta_R(r) = r \otimes 1 + 1 \otimes r\}$.

Luego, R es el álgebra de Nichols de $V = R(1)$ si y sólo si V la genera como álgebra. Existe una dualidad entre esta condición y el punto 2. que verifica R , que mostraremos en el siguiente resultado:

Lema 1.5.3. [AS2, Lemma 5.5] *Sea $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$ un álgebra de Hopf graduada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que sus componentes homogéneas son de dimensión finita y $R(0) = \mathbf{k}1$. Sea $S = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)^*$ el dual graduado. Entonces R está generado como álgebra por $R(1)$ si y sólo si $S(1) = \mathcal{P}(S)$. \square*

1.6. Álgebras de Hopf punteadas y levantamientos

Citaremos en esta sección el Teorema de Andruskiewitsch-Schneider sobre la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre grupos abelianos cuyo orden no es divisible por 2, 3, 5, 7 y un resultado de Masuoka sobre sus categorías de comódulos.

El Teorema de Andruskiewitsch-Schneider sigue los pasos del Método del Levante:

- (i) Dado Γ un grupo finito, determinar todos los espacios $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ tales que $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita.

- (ii) Para cada V como en el paso anterior, hallar todas las álgebras de Hopf A tales que $\text{gr } A = \mathcal{B}(V) \# \mathbf{k}\Gamma$.
- (iii) Decidir si toda A punteada sobre Γ pertenece a la familia del paso anterior, es decir, si A está generada por el término A_1 de la filtración corradical.

Daremos ahora una familia de álgebras A para cada espacio trenzado V de tipo Cartan del ítem (ii), en el caso en que Γ es abeliano.

Definición 1.6.1. [AS6] Sea Γ un grupo abeliano. Un *dato* de tipo Cartan finito sobre Γ es una colección

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Gamma, (g_i)_{i=1, \dots, \theta}, (\chi_i)_{i=1, \dots, \theta}, A = (a_{ij})_{i, j=1, \dots, \theta}),$$

donde $g_i \in \Gamma$, $\chi_i \in \widehat{\Gamma}$ y A es una matriz de Cartan de tipo finito que satisface

$$q_{ij}q_{ji} = q_{ii}^{a_{ij}}, \quad q_{ii} \neq 1, \quad \text{para todo } i, j$$

donde definimos $q_{ij} := \chi_j(g_i)$.

Fijemos un dato \mathcal{D} . Denotemos por Φ al sistema de raíces de A , \mathcal{X} el conjunto de componentes conexas del diagrama de Dynkin de A , y $\alpha_1, \dots, \alpha_\theta$ un conjunto de raíces simples; escribimos $i \sim j$ si α_i, α_j están en la misma componente conexa. Para cada $J \in \mathcal{X}$, Φ_J denota el sistema de raíces de la componente J . Para cada $\alpha = \sum_{i=1}^{\theta} k_i \alpha_i \in \Phi^+$, definimos

$$g_\alpha := \prod_{i=1}^{\theta} g_i^{k_i}, \quad \chi_\alpha := \prod_{i=1}^{\theta} \chi_i^{k_i}. \quad (1.18)$$

Consideraremos q_{ii} de orden impar y coprimo con 3 si α_i pertenece a una componente conexa de tipo G_2 . Así el orden de q_{ii} es constante en cada componente $J \in \mathcal{X}$, y lo denotaremos N_J .

Introducimos ahora dos familias de parámetros. La primer familia es $\lambda = (\lambda_{ij})_{i, j \in \{1, \dots, \theta\}, i \neq j}$, cuyos elementos en \mathbf{k} satisfacen la condición:

$$\text{si } g_i g_j = 1 \text{ o } \chi_i \chi_j \neq \epsilon, \text{ entonces } \lambda_{ij} = 0. \quad (1.19)$$

La segunda familia es $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+}$, cuyos elementos de \mathbf{k} satisfacen la condición:

$$\text{si } g_\alpha^{N_J} = 1 \text{ o } \chi_\alpha^{N_J} \neq \epsilon, \text{ entonces } \mu_\alpha = 0, \quad \alpha \in \Phi_J^+, J \in \mathcal{X}. \quad (1.20)$$

En [AS6], para cada familia μ y cada $\alpha \in \Phi$, los autores definen un elemento $u_\alpha(\mu) \in \mathbf{k}[\Gamma]$, que también pertenece al ideal de aumento de $\mathbf{k}[g_i^{N_i}]$. Recordemos que $u_\alpha(0) = 0$ para todo $\alpha \in \Phi^+$, donde $\mu = 0$ denota la familia cuyos parámetros son todos 0.

Recordemos también que están fijos ciertos elementos x_α , $\alpha \in \Phi^+$, que determinan una base PBW, ver [AS6].

Definición 1.6.2. [AS6] $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$ es el álgebra generada por Γ y x_1, \dots, x_θ , y presentada por las siguientes relaciones:

$$g x_i g^{-1} = \lambda_i(g) x_i, \quad i = 1, \dots, \theta, g \in \Gamma; \quad (1.21)$$

$$ad_c(x_i)^{1-a_{ij}} x_j = 0, \quad i \neq j, i \sim j; \quad (1.22)$$

$$ad_c(x_i) x_j = \lambda_{ij}(1 - g_i g_j), \quad i < j, i \not\sim j; \quad (1.23)$$

$$x_\alpha^{N_J} = u_\alpha(\mu), \quad \alpha \in \Phi_J^+, J \in \mathcal{X}. \quad (1.24)$$

Observación 1.6.3. 1. De acuerdo a [AS6] el álgebra $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$ es un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita, donde el coproducto satisface $\Delta(g) = g \otimes g$ para todo $g \in \Gamma$, y $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i$. Sus elementos de tipo grupo son $G(u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)) = \Gamma$.

2. El álgebra graduada (levantamiento trivial) corresponde a $\mu = 0, \lambda = 0$. Más aún, $u(\mathcal{D}, 0, 0)$ es el álgebra de Hopf corradicalmente graduada asociada a $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$, para cualquier familia de parámetros.

Teorema 1.6.4. [AS6] Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita, con grupo de elementos tipo grupo $\Gamma = G(H)$, donde el orden de Γ no es divisible por primos ≤ 7 . Entonces existe un dato \mathcal{D} y familias λ, μ tales que $H \cong u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$. \square

Definición 1.6.5. [AS4, Mo] Sea H biálgebra. Un 2-cociclo en H es una función bilineal $\sigma : H \times H \rightarrow \mathbf{k}$, que satisface para todos los elementos $a, b, c \in H$,

$$\sigma(a_1, b_1)\sigma(a_2b_2, c) = \sigma(a, b_1c_1)\sigma(b_2, c_2), \quad (1.25)$$

$$\sigma(a, 1) = \sigma(1, a) = \epsilon(a). \quad (1.26)$$

Dado un 2-cociclo invertible para el producto de convolución, definimos un nuevo producto en H de acuerdo a

$$a \cdot_{\sigma} b := \sigma(a_1, b_1)a_2b_2\sigma^{-1}(a_3, c_3), \quad a, b \in H.$$

H con dicho producto, la misma unidad y la misma estructura de coálgebra es una biálgebra, que denotaremos H^{σ} . H^{σ} se dice una *deformación por cociclo* de H .

Si H es un álgebra de Hopf con antípoda \mathcal{S} , definimos

$$\mathcal{S}_{\sigma}(a) = \sigma(a_1, \mathcal{S}(a_2))\mathcal{S}(a_3)\sigma^{-1}(\mathcal{S}(a_4), a_5), \quad a \in H.$$

Luego \mathcal{S}_{σ} es una antípoda para H^{σ} , de donde H^{σ} es un álgebra de Hopf.

Los levantamientos anteriores verifican una importante propiedad acerca de sus categorías de comódulos, que nos ayudarán a describir las categorías de representaciones de sus duales.

Teorema 1.6.6. [M2] Para cada dato \mathcal{D} y familias λ, μ , el álgebra de Hopf $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$ es una deformación por cociclo del álgebra de Hopf graduada asociada $u(\mathcal{D}, 0, 0)$. \square

Observación 1.6.7. La categoría de $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$ -comódulos es tensorialmente equivalente a la categoría de $u(\mathcal{D}, 0, 0)$ -comódulos de acuerdo a [S]. Consideremos ahora un álgebra de Hopf básica H tal que $H/\text{Rad } H \cong \text{Fun } \Gamma$, donde Γ es un grupo abeliano como en el Teorema de Andruskiewitsch-Schneider. Denotemos por H_0 su álgebra de Hopf radicalmente graduada asociada. Entonces H^* es un álgebra de Hopf punteada isomorfa a algún $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$, y su álgebra de Hopf corradicalmente graduada asociada es H_0^* , que es isomorfa a $u(\mathcal{D}, 0, 0)$. Así $\text{Rep } H$ es tensorialmente equivalente a $\text{Rep } H_0$, dado que son isomorfas a las categorías de comódulos sobre sus correspondientes duales.

1.7. Palabras de Lyndon y bases PBW para álgebras trenzadas de tipo diagonal

Sean A un álgebra, $P, S \subset A$ y $h : S \mapsto \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Consideremos $<$ un orden lineal sobre S . Denotaremos por $B(P, S, <, h)$ al conjunto

$$\{p s_1^{e_1} \dots s_t^{e_t} : t \in \mathbb{N}_0, \quad s_1 > \dots > s_t, \quad s_i \in S, \quad 0 < e_i < h(s_i), \quad p \in P\}.$$

Si $B(P, S, <, h)$ es una base de A como \mathbf{k} -espacio vectorial, diremos que $(P, S, <, h)$ es un conjunto de *generadores PBW* con altura h , y que $B(P, S, <, h)$ es una *base PBW* de A .

En esta Sección, describiremos – usando los resultados presentes en [Kh1]– una base PBW de cada álgebra de Hopf graduada trenzada $\mathcal{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}^n$ que está generada como álgebra por $\mathcal{B}^1 \cong V$, donde V es un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal; en particular, esto vale para cada álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$. Primero introducimos la definición y las propiedades clásicas de las palabras de Lyndon. Cada palabra de Lyndon tiene una decomposición canónica como producto de cierto par de palabras de Lyndon de menor longitud, denominada decomposición de Shirshov. Las principales referencias para la sección son [Lo, Sh].

Luego daremos la definición de la hiperletra $[l]_c$ asociada a cada palabra de Lyndon l : es el conmutador trenzado de las hiperletras correspondientes a las palabras en la decomposición de Shirshov. Las hiperletras determinan un conjunto de generadores de una base PBW de $T(V)$ y las clases de algunas de ellas darán una base PBW de \mathcal{B} .

Sean $\theta \in \mathbb{N}$, y X un conjunto con θ elementos; fijemos una numeración x_1, \dots, x_θ de los elementos de X , que induce un orden lineal en X . Sea \mathbb{X} el correspondiente vocabulario (el conjunto de palabras con letras en X) y consideremos el orden lexicográfico en \mathbb{X} .

Definición 1.7.1. Un elemento $u \in \mathbb{X}$, $u \neq 1$ es una *palabra de Lyndon* si u es menor que cualquiera de sus finales propios; esto es, si $u = vw$, $v, w \in \mathbb{X} - \{1\}$, entonces $u < w$. El conjunto de las palabras de Lyndon se denota por L .

Consideremos algunas propiedades de las palabras de Lyndon.

- (i) Sea $u \in \mathbb{X} - X$. Entonces u es de Lyndon si y sólo si para cada escritura $u = u_1 u_2$, donde $u_1, u_2 \in \mathbb{X} \setminus 1$, se tiene $u_1 u_2 = u < u_2 u_1$.
- (ii) Cada palabra de Lyndon comienza con la menor de sus letras.
- (iii) Si $u_1, u_2 \in L$, $u_1 < u_2$, entonces $u_1 u_2 \in L$.

Un Teorema básico sobre estas palabras, atribuido al mismo Lyndon, establece que toda palabra $u \in \mathbb{X}$ admite una única decomposición como producto no creciente de palabras de Lyndon:

$$u = l_1 l_2 \dots l_r, \quad l_i \in L, l_r \leq \dots \leq l_1. \quad (1.27)$$

Se la denomina *descomposición de Lyndon* de $u \in \mathbb{X}$; las palabras $l_i \in L$ que aparecen en la decomposición (1.27) se llaman las *letras de Lyndon* de u .

El orden lexicográfico de \mathbb{X} resulta ser el mismo que el orden lexicográfico en las letras de Lyndon: si $v = l_1 \dots l_r$ es la decomposición de Lyndon de v , entonces $u < v$ si y sólo si

- (i) la decomposición de Lyndon de u es $u = l_1 \dots l_i$, para algún $1 \leq i < r$, o
- (ii) la decomposición de Lyndon de u es $u = l_1 \dots l_{i-1} l'_s \dots l'_s$, donde $1 \leq i < r$, $s \in \mathbb{N}$ y $l, l'_{i+1}, \dots, l'_s \in L$, $l < l_i$.

Otra caracterización útil de las palabras de Lyndon es la siguiente:

Lema 1.7.2. *Sea $u \in \mathbb{X} - X$. Entonces $u \in L$ si y sólo si existen $u_1, u_2 \in L$ tales que $u_1 < u_2$ y $u = u_1 u_2$.*

Demostración. Ver [Kh1, p.6, Shirshov Th.] y las referencias de tal trabajo. □

Definición 1.7.3. Para cada $u \in L - X$, la *descomposición de Shirshov* de u es la descomposición $u = u_1 u_2$, con $u_1, u_2 \in L$, tal que u_2 es el menor final propio entre tales finales de u .

Sean $u, v, w \in L$ tales que $u = vw$. Entonces $u = vw$ es la descomposición de Shirshov de u si y sólo si $v \in X$ o la descomposición de Shirshov de v es $v = v_1 v_2$ y se tiene $w \leq v_2$.

Dado un espacio vectorial V , fijemos una base $X = \{x_1, \dots, x_\theta\}$ de V ; podemos identificar $\mathbf{k}\mathbb{X}$ con $T(V)$. Para el álgebra $T(V)$, consideramos dos graduaciones canónicas. Primero, la \mathbb{N}_0 -graduación usual $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V)$. Si ℓ denota la longitud de una palabra en \mathbb{X} , entonces se tiene $T^n(V) = \bigoplus_{x \in \mathbb{X}, \ell(x)=n} \mathbf{k}x$.

Segundo, sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\theta\}$ la base canónica de \mathbb{Z}^θ . $T(V)$ es \mathbb{Z}^θ -graduada, donde el grado queda determinado por $\deg x_i = \alpha_i$, $1 \leq i \leq \theta$.

Consideremos ahora una trenza c sobre V . El *corchete trenzado* de $x, y \in T(V)$ se define como

$$[x, y]_c := \text{multiplication} \circ (\text{id} - c)(x \otimes y). \quad (1.28)$$

Asumimos ahora que (V, c) es de tipo diagonal, y sea $\chi : \mathbb{Z}^\theta \times \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbf{k}^\times$ la forma bilineal determinada por

$$\chi(\alpha_i, \alpha_j) = q_{ij}, \quad \text{para todo par } 1 \leq i, j \leq \theta. \quad (1.29)$$

Entonces, para cada par de elementos \mathbb{Z}^θ -homogéneos $u, v \in \mathbb{X}$,

$$c(u \otimes v) = q_{u,v} v \otimes u, \quad q_{u,v} = \chi(\deg u, \deg v) \in \mathbf{k}^\times. \quad (1.30)$$

En tal caso, el conmutador trenzado satisface una identidad de Jacobi 'trenzada' así como derivaciones torcidas

$$[[u, v]_c, w]_c = [u, [v, w]_c]_c - \chi(\alpha, \beta) v [u, w]_c + \chi(\beta, \gamma) [u, w]_c v, \quad (1.31)$$

$$[u, v w]_c = [u, v]_c w + \chi(\alpha, \beta) v [u, w]_c, \quad (1.32)$$

$$[u v, w]_c = \chi(\beta, \gamma) [u, w]_c v + u [v, w]_c, \quad (1.33)$$

para $u, v, w \in T(V)$ homogéneos de grados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^\theta$, respectivamente.

Un endomorfismo importante de $\mathbf{k}\mathbb{X}$ es $[-]_c$, definido como sigue:

$$[u]_c := \begin{cases} u, & \text{si } u = 1 \text{ o } u \in X; \\ [[v]_c, [w]_c]_c, & \text{si } u \in L, \ell(u) > 1 \text{ y } u = vw \text{ es la descomposición de Shirshov;} \\ [u_1]_c \dots [u_t]_c, & \text{si } u \in \mathbb{X} - L \text{ y su descomposición de Lyndon es } u = u_1 \dots u_t. \end{cases}$$

Definición 1.7.4. La *hiperletra* correspondiente a $l \in L$ es $[l]_c$. Una *hiperpalabra* es una palabra en hiperletras, y una *hiperpalabra monótona* es una hiperpalabra de la forma $W = [u_1]_c^{k_1} \dots [u_m]_c^{k_m}$, donde $u_1 > \dots > u_m$.

Observación 1.7.5. Para cada $u \in L$, $[u]_c$ es una combinación lineal de palabras de la misma \mathbb{Z}^θ -graduación que u , con coeficientes en $\mathbb{Z}[q_{ij}]$, y tal que $[u]_c \in u + \mathbf{k}\mathbb{X}_{>u}^{\ell(u)}$.

Las hiperletras heredan el orden de las correspondientes palabras de Lyndon, lo cual induce en consecuencia un orden en las hiperpalabras, que es el orden lexicográfico en las hiperletras. Dadas dos hiperpalabras monótonas W, V , se prueba que

$$W = [w_1]_c \cdots [w_m]_c > V = [v_1]_c \cdots [v_t]_c,$$

donde $w_1 \geq \cdots \geq w_r$, $v_1 \geq \cdots \geq v_s$, si y sólo si $w = w_1 \dots w_m > v = v_1 \dots v_t$. Más aún, la palabra principal del polinomio W es w con coeficiente 1.

Teorema 1.7.6. [R2, Thm. 10] Para cada par $m, n \in L$, $m < n$, el conmutador trenzado $[[m]_c, [n]_c]_c$ es una combinación $\mathbb{Z}[q_{ij}]$ -lineal de hiperpalabras monótonas $[l_1]_c \cdots [l_r]_c, l_i \in L$, tales que las hiperletras que intervienen satisfacen $n > l_i \geq mn$. $[mn]_c$ es un elemento de tal expresión con coeficiente no nulo, y cada hiperpalabra perteneciente a la combinación lineal satisface $\deg(l_1 \dots l_r) = \deg(mn)$. \square

Rosso también describe el comportamiento del coproducto de hiperpalabras en $T(V)$.

Lema 1.7.7. [R2, Thm.13] Sean $u_1, \dots, u_r, v \in L$, donde $v < u_r \leq \cdots \leq u_1$. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta([u_1]_c \cdots [u_r]_c [v]_c^m) &= 1 \otimes [u_1]_c \cdots [u_r]_c [v]_c^m + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}_{q_{v,v}} [u_1]_c \cdots [u_r]_c [v]_c^i \otimes [v]_c^{m-i} \\ &+ \sum_{\substack{l_1 \geq \cdots \geq l_p > v, l_i \in L \\ 0 \leq j \leq m}} x_{l_1, \dots, l_p}^{(j)} \otimes [l_1]_c \cdots [l_p]_c [v]_c^j; \end{aligned}$$

donde cada $x_{l_1, \dots, l_p}^{(j)}$ es \mathbb{Z}^θ -homogénea, y $\deg(x_{l_1, \dots, l_p}^{(j)}) + \deg(l_1 \dots l_p v^j) = \deg(u)$. \square

En [R2] se presenta otro resultado, que será muy útil en la próxima Sección.

Lema 1.7.8. Para cada $l \in L$ sea W_l el subespacio de $T(V)$ generado por

$$[l_1]_c [l_2]_c \cdots [l_k]_c, \quad k \in \mathbb{N}_0, l_i \in L, l_1 \geq \dots \geq l_k \geq l. \quad (1.34)$$

Entonces W_l es una subálgebra coideal a izquierda de $T(V)$.

Demostración. Se sigue del Teorema 1.7.6 y el Lema 1.7.7. \square

Usaremos también otro orden en \mathbb{X} , considerado en [U] e implícito en [Kh1].

Definición 1.7.9. Sean $u, v \in \mathbb{X}$. Diremos que $u \succ v$ si $\ell(u) < \ell(v)$, o $\ell(u) = \ell(v)$ y $u > v$ para el orden lexicográfico. Tal orden \succ es total, y se lo denomina *orden deg-lex*.

La palabra vacía 1 es el elemento maximal para \succ . Además este orden es invariante por multiplicación a derecha e izquierda.

Sea I un ideal propio de $T(V)$, y $R = T(V)/I$. Sea $\pi : T(V) \rightarrow R$ la proyección canónica. Definimos:

$$G_I := \{u \in \mathbb{X} : u \notin \mathbf{k}\mathbb{X}_{\succ u} + I\}.$$

Notemos que si $u \in G_I$ y $u = vw$, entonces $v, w \in G_I$. Así, cada $u \in G_I$ se factoriza de modo único como producto no creciente de palabras de Lyndon en G_I .

Proposición 1.7.10. *[Kh1, R2] El conjunto $\pi(G_I)$ es una base de R .* \square

Para esta última parte I denotará un ideal de Hopf. Buscamos una base PBW de hiperpalabras para el cociente R de $T(V)$. Consideramos el conjunto $S_I := G_I \cap L$.

Definimos la función $h_I : S_I \rightarrow \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ de acuerdo a

$$h_I(u) := \min \{t \in \mathbb{N} : u^t \in \mathbf{k}\mathbb{X}_{\succ u^t} + I\}. \quad (1.35)$$

El siguiente resultado y sus corolarios están presentes en [Kh1]; serán fundamentales en la siguiente sección.

Teorema 1.7.11. $B'_I := B(\{1 + I\}, [S_I]_c + I, <, h_I)$ es una base PBW de $H = T(V)/I$. \square

Corolario 1.7.12. *Una palabra u pertenece a G_I si y sólo si la correspondiente hiperletra $[u]_c$ no es una combinación lineal, módulo I , de hiperpalabras $[w]_c$, $w \succ u$, donde todas las hiperpalabras tienen sus hiperletras en S_I .* \square

Corolario 1.7.13. *Si $v \in S_I$ es tal que $h_I(v) < \infty$, entonces $q_{v,v}$ es una raíz de la unidad. Si $q_{v,v}$ tiene orden h , entonces $h_I(v) = h$, y $[v]^h$ es una combinación lineal de hiperpalabras $[w]_c$, $w \succ v^h$.* \square

1.8. Álgebras de Nichols de tipo diagonal con sistema de raíces finito

En esta sección presentaremos la clasificación de Heckenberger de los espacios trenzados de tipo diagonal cuya álgebra de Nichols tiene un sistema de raíces finito, lo cual incluye propiamente a aquellos espacios trenzados con álgebra de Nichols de dimensión finita.

Comencemos por la definición del sistema de raíces de un álgebra de Nichols de tipo diagonal. Para ello fijemos (V, c) un espacio trenzado de tipo diagonal de dimensión finita, x_1, \dots, x_θ una base tal que $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i$, de modo que $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta} \in (\mathbf{k}^\times)^{\theta \times \theta}$ es la matriz de trenza.

Sea \mathcal{B} un álgebra de Hopf trenzada que es un cociente de $T(V)$ por elementos \mathbb{Z}^θ -homogéneos de grado ≥ 2 . Así \mathcal{B} es \mathbb{Z}^θ -graduado y \mathbb{N} -graduado, pues hereda las graduaciones de $T(V)$. Además, $\mathcal{B}(0) = \mathbf{k}1$ y $\mathcal{B}(1) = V$. De acuerdo al Teorema 1.7.11, \mathcal{B} admite una base PBW cuyos generadores son elementos \mathbb{Z}^θ -homogéneos. Siguiendo el trabajo hecho en [H1] podemos asumir más aún que

- ⊗ la altura de un generador PBW $[u]_c$, $\deg(u) = \alpha$, es finita si y sólo si $\text{ord}(\chi(\alpha, \alpha)) \geq 2$ es finito, y en tal caso, $h_I(u) = \text{ord}(\chi(\alpha, \alpha))$.

De hecho, si la altura de un generador $[u]_c$, $\deg(u) = \alpha$, es finita, entonces $2 \leq \text{ord}(\chi(\alpha, \alpha)) < \infty$, de acuerdo al Corolario 1.7.13. También, si $2 \leq \text{ord}(\chi(\alpha, \alpha)) = m < \infty$ pero $h_{I(V)}(u)$ es infinita, podemos agregar $[u]_c^m$ a la base PBW: en tal caso, $h_{I(V)}(u) = m$, y $\chi(m\alpha, m\alpha) = \chi(\alpha, \alpha)^{m^2} = 1$.

Sea $\Delta^+(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{N}^n$ el conjunto de grados de los generadores de una base PBW, contados con sus multiplicidades, y $\Delta(\mathcal{B}) = \Delta^+(\mathcal{B}) \cup (-\Delta^+(\mathcal{B}))$: $\Delta^+(\mathcal{B})$ es independiente de la base PBW con la propiedad ⊗ elegida, según lo probado en [AA, Lemma 2.18].

En particular lo anterior vale para $\mathcal{B}(V)$, con lo cual definimos el *sistema de raíces* Δ^V asociado a V como

$$\Delta^V := \Delta^+(\mathcal{B}(V)).$$

Decimos que el sistema es *finito* si dicho conjunto es finito.

Siguiendo la notación de Heckenberger, introducimos la noción de *diagrama de Dynkin generalizado* asociado a (V, c) : es un grafo con θ vértices, cada uno de ellos etiquetado con el correspondiente q_{ii} , y una arista entre dos vértices i, j si $q_{ij}q_{ji} \neq 1$, etiquetada con dicho escalar. Luego dos espacios vectoriales trenzados de tipo diagonal tienen el mismo diagrama de Dynkin generalizado si y sólo si son equivalentes por torcimiento.

Ejemplo 1.8.1. Si consideramos la trenza correspondiente a $U_q^+(\mathfrak{g})$, donde $\mathfrak{g} = sl_4$, tenemos

$$q_{11} = q_{22} = q_{33} = q, \quad q_{12}q_{21} = q_{23}q_{32} = q^{-1}, \quad q_{13}q_{31} = 1.$$

Luego, el correspondiente diagrama generalizado de Dinkin es: $\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^q$.

Diremos que $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ están *conectados* si existen $i_1 = i, i_2, \dots, i_k = j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{i_s, i_{s+1}}q_{i_{s+1}, i_s} \neq 1$ para todo $s = 1, \dots, k-1$; es decir, si los vértices con etiquetas q_{ii}, q_{jj} están conectados en el diagrama de Dynkin generalizado. Así hablaremos de las componentes conexas de (V, c) refiriéndonos a las componentes conexas de su correspondiente diagrama. Sea \mathcal{X} el conjunto de componentes conexas. Para cada $X \in \mathcal{X}$ denotamos por (V_X, c_X) el espacio trenzado cuya base es $(x_j)_{j \in X}$ y cuya trenza es $c_X = c|_{V_X \otimes V_X}$; de este modo, (V_X, c_X) es de tipo diagonal, con matriz de trenza $(q_{ij})_{i, j \in X}$.

Un resultado importante es el siguiente:

Lema 1.8.2. [AS2, Lemma 4.2] *Existe un isomorfismo de álgebras de Hopf trenzadas \mathbb{Z}^θ -graduadas $\mathcal{B}(V) \cong \otimes_{X \in \mathcal{X}} \mathcal{B}(V_X)$.* \square

De acuerdo a este último resultado podemos restringirnos a estudiar aquellos diagramas de Dynkin generalizados conexos, pues la serie de Hilbert de $\mathcal{B}(V)$ es el producto de las series de Hilbert de $\mathcal{B}(V_X)$, y en consecuencia el sistema de raíces de V puede verse como la unión de los sistemas de raíces de $V_X, X \in \mathcal{X}$.

Heckenberger [H3] logró clasificar aquellos espacios trenzados de tipo diagonal cuyo sistema de raíces es finito. Para ello comenzó con el estudio de los diagramas de Dynkin conexos con pocos vértices, para obtener luego el resultado completo. En particular, para los diagramas con 3 vértices se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.8.3. [H3, Lemma 9 (i), (ii)] *Sea (V, c) tal que $\theta = 3$, es de tipo finito y además su diagrama de Dynkin generalizado es conexo.*

1. Si $q_{13}q_{31} = 1$ y $q_{11}, q_{22}, q_{33} \neq -1$, entonces V es de tipo Cartan o existe $i \in \{1, 3\}$ tal que, si $j = 4 - i$, se verifican

$$q_{ii} \in \mathbb{G}_3, q_{ii} \neq 1, \quad q_{22}, q_{jj} \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9 \setminus \mathbb{G}_3, \quad q_{jj}q_{j2}q_{2j} = q_{22}q_{i2}q_{2i} = 1, \\ (q_{22}q_{j2}q_{2j} - 1)(q_{22}^2q_{j2}q_{2j} - 1) = 0.$$

2. Si $q_{ij}q_{ji} \neq 1$ para todo par $i \neq j$, entonces $\prod_{i < j} q_{ij}q_{ji} = 1$ y existe $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que $q_{kk} = -1$. Si además $q_{11} = -1$, $q_{22}, q_{33} \neq -1$, entonces $q_{22}q_{21}q_{12} = q_{33}q_{31}q_{13} = 1$ y $q_{21}^2q_{12}^2 = q_{31}^2q_{13}^2 \in \mathbb{G}_3$.
3. Si $q_{13}q_{31} = 1$, $q_{22} = -1$, $q_{11}q_{12}q_{21} = 1$, $q_{11}, q_{33} \neq -1$, se verifica alguna de las siguientes:

$$q_{33}q_{32}q_{23} = 1, \text{ o } q_{33}^2q_{32}q_{23} = 1, (q_{11}q_{33}^2 - 1)(q_{11}q_{33}^3 + 1) = 0, \text{ o } q_{33} = -q_{11} \in \mathbb{G}_3, \\ q_{23}q_{32} \in \{-1, -q_{33}\}. \quad \square$$

Finalmente se obtiene el siguiente resultado de clasificación:

Teorema 1.8.4. [H3, Thms. 17, 22] Sea (V, c) un espacio trenzado de tipo diagonal. Entonces (V, c) tiene sistema de raíces finito si y sólo si todas las componentes conexas de su diagrama de Dynkin generalizado pertenecen a las Tablas 1, 2, 3, 4. \square

Pasamos entonces a mostrar las tablas de diagramas de Dynkin generalizados, dividiendo las mismas de acuerdo a la dimensión de V . Cada fila contiene una clase de equivalencia por la acción del grupoide de Weyl que introciremos en el Capítulo siguiente.

Usaremos una notación similar a la presente en [H3], en la cual enfatizamos las posiciones donde $q_{ii} = -1$, las cuales no sólo permiten distinguirlas fácilmente sino que también nos permitirán calcular la dimensión de la correspondiente algebra de Nichols; $\mathcal{C}(\theta, q; i_1, \dots, i_j)$ corresponde al diagrama de Dynkin generalizado

$$\circ_{q_{11}} \xrightarrow{q_{12}q_{21}} \circ_{q_{22}} \xrightarrow{q_{23}q_{32}} \circ_{q_{33}} \dots \circ_{q_{\theta-1, \theta-1}} \xrightarrow{q_{\theta-1, \theta}q_{\theta, \theta-1}} \circ_{q_{\theta\theta}}, \quad (1.36)$$

en el cual se verifican las siguientes condiciones:

- $q = q_{\theta-1, \theta}q_{\theta, \theta-1}q_{\theta\theta}^2$,
- $(q_{\theta\theta} + 1)(q_{\theta\theta}q_{\theta-1, \theta}q_{\theta, \theta-1} - 1) = (q_{11} + 1)(q_{11}q_{12}q_{21} - 1) = 0$;
- $-q_{ii} = q_{i-1, i}q_{i, i-1}q_{i+1, i}q_{i, i+1} = 1$ si $i \in \{i_1, \dots, i_j\}$.
- $q_{ii}q_{i-1, i}q_{i, i-1} = q_{ii}q_{i+1, i}q_{i, i+1} = 1$, en otro caso.

Luego, $q_{ii} = -1$ si y sólo si $q_{i-1, i}q_{i, i-1} = (q_{i+1, i}q_{i, i+1})^{-1}$, y la cadena se obtiene considerando subdiagramas

$$\xrightarrow{q} \circ_{-1} \xrightarrow{q^{-1}}, \quad \xrightarrow{q^{-1}} \circ_{-1} \xrightarrow{q},$$

intercalados arbitrariamente con subdiagramas:

$$\xrightarrow{q^{-1}} \circ^q \xrightarrow{q^{-1}}, \quad \xrightarrow{q} \circ^{q^{-1}} \xrightarrow{q},$$

uniendo las aristas que tienen la misma etiqueta.

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ \mathbb{G}_n denotará el grupo de raíces de de la unidad de orden n ; para la mayor parte del trabajo asumiremos que \mathbf{k} es algebraicamente cerrado de característica 0, con lo cual \mathbb{G}_n será un grupo cíclico de orden n .

	Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
1	$\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad q \\ \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq 1$
2	$\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad -1 \quad -1 \quad q \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq \pm 1$
3	$\begin{array}{c} q \quad q^{-2} \quad q^2 \\ \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq \pm 1$
4	$\begin{array}{c} q \quad q^{-2} \quad -1 \quad -q^{-1} \quad q^2 \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \notin \mathbb{G}_4$
5	$\begin{array}{c} \zeta \quad q^{-1} \quad q \quad \zeta \quad \zeta^{-1} q \zeta q^{-1} \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3, q \notin \mathbb{G}_3$
6	$\begin{array}{c} \zeta \quad -\zeta \quad -1 \quad \zeta^{-1} \quad -\zeta^{-1} \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
7	$\begin{array}{c} -\zeta^{-2} \quad -\zeta^3 \quad -\zeta^2 \quad -\zeta^{-2} \quad \zeta^{-1} \quad -1 \quad -\zeta^2 \quad -\zeta \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \\ -\zeta^3 \quad \zeta \quad -1 \quad -\zeta^3 \quad -\zeta^{-1} \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_{12}$ primitiva
8	$\begin{array}{c} -\zeta^2 \quad \zeta \quad -\zeta^2 \quad -\zeta^2 \quad \zeta^3 \quad -1 \quad -\zeta^{-1} \quad -\zeta^3 \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_{12}$ primitiva
9	$\begin{array}{c} -\zeta \quad \zeta^{-2} \quad \zeta^3 \quad \zeta^3 \quad \zeta^{-1} \quad -1 \quad -\zeta^2 \quad \zeta \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_9$ primitiva
10	$\begin{array}{c} q \quad q^{-3} \quad q^3 \\ \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \notin \{-1\} \cup \mathbb{G}_3$
11	$\begin{array}{c} \zeta^2 \quad \zeta \quad \zeta^{-1} \quad \zeta^2 \quad -\zeta^{-1} \quad -1 \quad \zeta \quad -\zeta \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_8$ primitiva
12	$\begin{array}{c} \zeta^6 \quad -\zeta^{-1} \quad -\zeta^{-4} \quad \zeta^6 \quad \zeta \quad \zeta^{-1} \quad -\zeta^{-4} \quad \zeta^5 \quad -1 \quad \zeta \quad \zeta^{-5} \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_{24}$ primitiva
13	$\begin{array}{c} \zeta \quad \zeta^2 \quad -1 \quad -\zeta^{-2} \quad \zeta^{-2} \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_5$ primitiva
14	$\begin{array}{c} \zeta \quad \zeta^{-3} \quad -1 \quad -\zeta \quad -\zeta^{-3} \quad -1 \quad -\zeta^{-2} \quad \zeta^3 \quad -1 \quad -\zeta^{-2} \quad -\zeta^3 \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_{20}$ primitiva
15	$\begin{array}{c} -\zeta \quad -\zeta^{-3} \quad \zeta^5 \quad \zeta^3 \quad -\zeta^4 \quad -\zeta^{-4} \quad \zeta^5 \quad -\zeta^{-2} \quad -1 \quad \zeta^3 \quad -\zeta^2 \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_{15}$ primitiva
16	$\begin{array}{c} -\zeta \quad -\zeta^{-3} \quad -1 \quad -\zeta^{-2} \quad -\zeta^3 \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_7$ primitiva

Tabla 1: diagramas conexos de rango 2.

	Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
1	$\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad q \quad q^{-1} \quad q \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq 1$
2	$\begin{array}{c} q^2 \quad q^{-2} \quad q^2 \quad q^{-2} \quad q \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq \pm 1$
3	$\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad q \quad q^{-2} \quad q^2 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq \pm 1$
4	$\begin{array}{c} -1 \quad q^{-1} \quad q \quad q^{-1} \quad q \quad -1 \quad q \quad -1 \quad q^{-1} \quad q \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq \pm 1$
5	$\begin{array}{c} -1 \quad q^{-2} \quad q^2 \quad q^{-2} \quad q \quad -1 \quad q^2 \quad -1 \quad q^{-2} \quad q \quad q^2 \quad q^{-2} \quad -1 \quad q^2 \quad -q^{-1} \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \notin \mathbb{G}_4$

	Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
6	$\begin{array}{c} -1 \quad q^{-1} \quad q \quad q^{-2} \quad q^2 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} -1 \quad q \quad -1 \quad q^{-2} \quad q^2 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq \pm 1$
7	$\begin{array}{c} -1 \quad q^{-1} \quad q \quad q^{-3} \quad q^3 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} -1 \quad q \quad -1 \quad q^{-3} \quad q^3 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \notin \mathbb{G}_3 \cup \{-1\}$
8	$\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad -1 \quad q \quad q^{-1} \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad -1 \quad q^{-1} \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} -1 \quad q^{\pm 1} \quad q^{\mp 1} \quad q^{\pm 1} \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \neq \pm 1$
9	$\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad -1 \quad r^{-1} \quad r \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad -1 \quad s^{-1} \quad s \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q, r, s \neq 1, qrs = 1,$ $q \neq r, q \neq s, r \neq s$
10	$\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad -1 \quad q^{-1} \quad q \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} q \quad q^{-1} \quad -1 \quad q^2 \quad q^{-2} \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$q \notin \mathbb{G}_3 \cup \{-1\}$
11	$\begin{array}{c} \zeta \quad \zeta^{-1} \quad -1 \quad \zeta^{-1} \quad \zeta \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
12	$\begin{array}{c} -\zeta^{-1} \quad -\zeta \quad -\zeta^{-1} \quad -\zeta \quad \zeta \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
13	$\begin{array}{c} \zeta \quad \zeta^{-1} \quad \zeta \quad \zeta^{-2} \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} \zeta \quad \zeta^{-1} \quad -\zeta^{-1} \quad \zeta^2 \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3 \cup \mathbb{G}_6, \zeta \neq -1$
14	$\begin{array}{c} -1 \quad -\zeta \quad -\zeta^{-1} \quad -\zeta \quad \zeta \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} -1 \quad -\zeta^{-1} \quad -1 \quad -\zeta \quad \zeta \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} -\zeta^{-1} \quad -\zeta \quad -1 \quad -\zeta^{-1} \quad \zeta^{-1} \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
15	$\begin{array}{c} -1 \quad \zeta^{-1} \quad \zeta \quad \zeta \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} -1 \quad \zeta \quad -1 \quad \zeta \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
16	$\begin{array}{c} -1 \quad \zeta^{-1} \quad \zeta \quad -\zeta^{-1} \quad -\zeta \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} -1 \quad \zeta \quad -1 \quad -\zeta^{-1} \quad -\zeta \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
17	$\begin{array}{c} -1 \quad -1 \quad -1 \quad \zeta \quad -1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} -1 \quad -1 \quad -1 \quad -\zeta^{-1} \quad \zeta^{-1} \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
18	$\begin{array}{c} \zeta \quad \zeta^{-1} \quad \zeta \quad \zeta^{-1} \quad \zeta^{-3} \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$ $\begin{array}{c} \zeta \quad \zeta^{-1} \quad \zeta^{-4} \quad \zeta^4 \quad \zeta^{-3} \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$	$\zeta \in \mathbb{G}_9$ primitiva

Tabla 2: diagramas conexos de rango 3.

	Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
12		$q \neq \pm 1$
13		$q \neq \pm 1$
14		$q \neq \pm 1$
15		$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
16		$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva
17		$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva

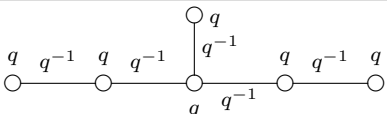
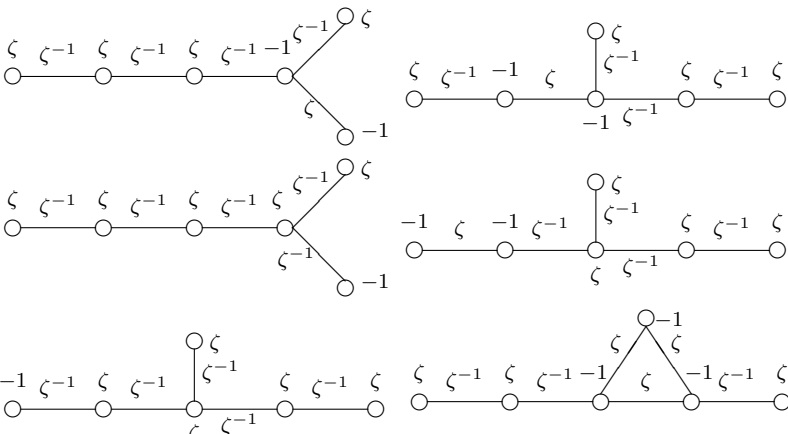
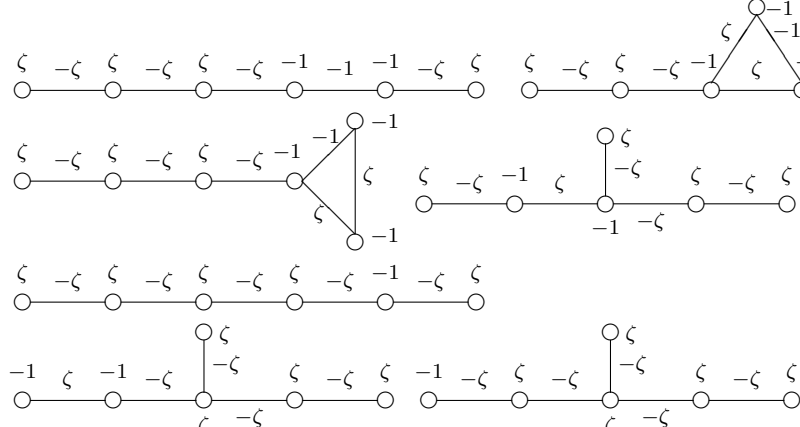
Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
<p>18</p>	<p>$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva</p>
<p>19</p>	<p>$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva</p>
<p>20</p>	<p>$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva</p>
<p>21</p>	<p>$\zeta \in \mathbb{G}_3$ primitiva</p>
<p>22</p>	<p>$\zeta \in \mathbb{G}_4$ primitiva</p>

Tabla 3: diagramas conexos de rango 4.

	Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
1		$q \neq \pm 1, 0 \leq j \leq d$
2		$q \notin \mathbb{G}_4, 0 \leq j < d$
3		$\zeta \in \mathbb{G}_3 \text{ prim.}, 1 \leq j < d$
4		$q \neq \pm 1$
5		$q \neq 1$
6		$q \neq \pm 1$ $1 \leq j < d$
7		$\zeta \in \mathbb{G}_3 \text{ prim.}$

Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
<p>8</p>	$\zeta \in \mathbb{G}_3 \text{ prim.}$
<p>9</p>	$\zeta \in \mathbb{G}_5, \text{ prim.}$

	Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
10		$\zeta \in \mathbb{G}_3$ prim.
11		$\zeta \in \mathbb{G}_4$ prim.

Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
<p>12</p> 	<p>$q \neq 1$</p>
<p>13</p> 	<p>$\zeta \in \mathbb{G}_3$ prim.</p>
<p>14</p> 	<p>$\zeta \in \mathbb{G}_4$ prim.</p>

	Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
15		$\zeta \in \mathbb{G}_3 \text{ prim.}$

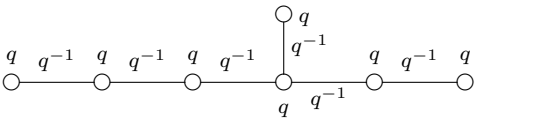
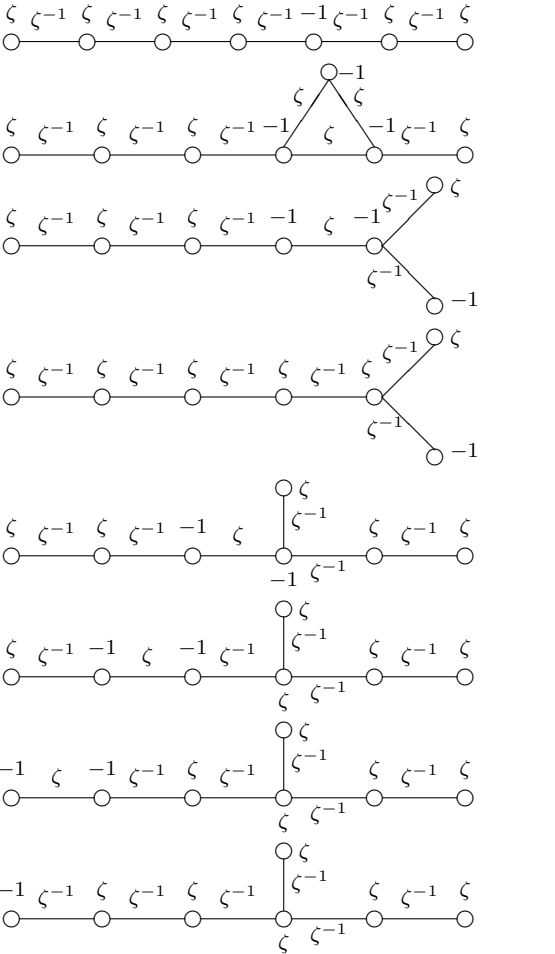
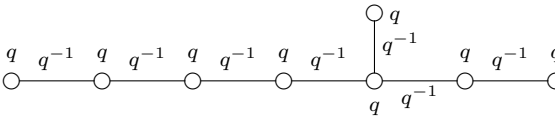
Diagramas de Dynkin generalizados	parámetros
<p>16</p> 	$q \neq 1$
<p>17</p> 	$\zeta \in \mathbb{G}_3$ prim.
<p>18</p> 	$q \neq 1$

Tabla 4: diagramas conexos de rango ≥ 5 .

Capítulo 2

Presentación por generadores y relaciones de álgebras de Nichols de tipo diagonal con sistema de raíces finito

2.1. Sistemas de raíces y subálgebras coideales

En esta sección recordaremos la definición de grupoide de Weyl y los sistemas de raíces generalizados asociados siguiendo [CH1] y [HeY]. Recordaremos también algunas propiedades de tales objetos que usaremos más adelante, y su relación con las álgebras de Nichols de tipo diagonal. Luego daremos una caracterización de los órdenes convexos para subconjuntos de sistemas de raíces de grupoideos de Weyl, que es una generalización de [P]. Consideraremos una familia de subálgebras coideales de cada álgebra de Nichols de tipo diagonal con sistema de raíces finito para probar que el orden de las palabras de Lyndon de una base PBW como en la Sección 1.7 es convexo. Tales resultados utilizan la caracterización de las subálgebras coideales que se presenta en [HS].

2.1.1. Grupoide de Weyl y sistemas de raíces

Usaremos la misma notación que en [CH1]. Fijemos así un conjunto no vacío \mathfrak{X} y un conjunto finito I ; sea $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ la base canónica de \mathbb{Z}^I . Para cada $i \in I$ consideremos una función $r_i : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$, y para cada $X \in \mathfrak{X}$ una matriz generalizada de Cartan $A^X = (a_{ij}^X)_{i,j \in I}$ (ver la definición en [Kac2]).

Definición 2.1.1. [HeY, CH1] El cuádruple $\mathcal{C} := \mathcal{C}(I, \mathfrak{X}, (r_i)_{i \in I}, (A^X)_{X \in \mathfrak{X}})$ es un *esquema de Cartan* si se verifican

- para todo $i \in I$, $r_i^2 = id$, y
- para todo $X \in \mathfrak{X}$ y todo par $i, j \in I$: $a_{ij}^X = a_{ij}^{r_i(X)}$.

Para cada $i \in I$ y cada $X \in \mathfrak{X}$ denotemos s_i^X al automorfismo de \mathbb{Z}^I dado por

$$s_i^X(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}^X \alpha_i, \quad j \in I.$$

El *grupoide de Weyl* de \mathcal{C} es el grupoide $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ cuyo conjunto de objetos es \mathfrak{X} y cuyos morfismos están generados por s_i^X , los cuales se consideran $s_i^X \in \text{Hom}(X, r_i(X))$, $i \in I$, $X \in \mathfrak{X}$.

En general denotaremos $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ simplemente por \mathcal{W} , y para cada $X \in \mathfrak{X}$:

$$\text{Hom}(\mathcal{W}, X) := \cup_{Y \in \mathfrak{X}} \text{Hom}(Y, X), \quad (2.1)$$

$$\Delta^{X \text{ re}} := \{w(\alpha_i) : i \in I, w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, X)\}. \quad (2.2)$$

$\Delta^{X \text{ re}}$ es el conjunto de las *raíces reales* de X . Cada $w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, X_1)$ se escribe como un producto $s_{i_1}^{X_1} s_{i_2}^{X_2} \cdots s_{i_m}^{X_m}$, donde $X_j = r_{i_{j-1}} \cdots r_{i_1}(X_1)$, $j \geq 2$. Denotaremos $w = \text{id}_{X_1} s_{i_1} \cdots s_{i_m}$: esto dice que $w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, X_1)$, dado que cada $X_j \in \mathfrak{X}$ está unívocamente determinado por esta condición. La *longitud* de w se define como

$$\ell(w) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists i_1, \dots, i_n \in I \text{ tales que } w = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_n}\}.$$

Asumiremos de aquí en más que \mathcal{W} es *conexo*: esto es, $\text{Hom}(Y, X) \neq \emptyset$, para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}$.

Definición 2.1.2. [HeY, CH1] Fijemos un esquema de Cartan \mathcal{C} , y para cada $X \in \mathfrak{X}$ un conjunto $\Delta^X \subset \mathbb{Z}^I$. $\mathcal{R} := \mathcal{R}(\mathcal{C}, (\Delta^X)_{X \in \mathfrak{X}})$ es un *sistema de raíces de tipo \mathcal{C}* si

1. para todo $X \in \mathfrak{X}$, $\Delta^X = (\Delta^X \cap \mathbb{N}_0^I) \cup -(\Delta^X \cap \mathbb{N}_0^I)$,
2. para cada $i \in I$ y cada $X \in \mathfrak{X}$, $\Delta^X \cap \mathbb{Z}\alpha_i = \{\pm\alpha_i\}$,
3. para cada $i \in I$ y cada $X \in \mathfrak{X}$, $s_i^X(\Delta^X) = \Delta^{r_i(X)}$,
4. si $m_{ij}^X := |\Delta^X \cap (\mathbb{N}_0\alpha_i + \mathbb{N}_0\alpha_j)|$, entonces $(r_i r_j)^{m_{ij}^X}(X) = (X)$ para cada par $i \neq j \in I$ y cada $X \in \mathfrak{X}$.

$\Delta_+^X := \Delta^X \cap \mathbb{N}_0^I$ es el conjunto de *raíces positivas*, y $\Delta_-^X := -\Delta_+^X$ el de *raíces negativas*.

Observación 2.1.3. A partir de 2. y 3. se deduce que $\Delta^{X \text{ re}} \subset \Delta^X$, para todo $X \in \mathfrak{X}$.

Para cada raíz positiva $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$, llamaremos *soporte* de α al conjunto

$$\text{sop } \alpha := \{i : 1 \leq i \leq \theta, n_i \neq 0\}.$$

Por (3) se tiene que $w(\Delta^X) = \Delta^Y$ para cada $w \in \text{Hom}(X, Y)$. Diremos que \mathcal{R} es *finito* si Δ^X es finito para algún $X \in \mathfrak{X}$. Por [CH1, Lemma 2.11], tal hecho es equivalente a que todos los conjuntos Δ^X son finitos, $X \in \mathfrak{X}$, y a que \mathcal{W} es finito. Además, para cada par $i \neq j \in I$ y cada $X \in \mathfrak{X}$, se tiene que $k\alpha_i + \alpha_j \in \Delta^X$ si y sólo si $0 \leq k \leq -a_{ij}^X$. Así tenemos que

$$a_{ij}^X = -\text{máx}\{k \in \mathbb{N}_0 : k\alpha_i + \alpha_j \in \Delta^X\}. \quad (2.3)$$

El siguiente resultado será fundamental para las conclusiones de la siguiente subsección.

Teorema 2.1.4. [CH2, Thm. 2.10] Sea $\alpha \in \Delta_+^X \setminus \{\alpha_i : i = 1, \dots, \theta\}$. Entonces existen $\beta, \gamma \in \Delta_+^X$ tales que $\alpha = \beta + \gamma$. \square

Recordemos también otros resultados sobre raíces reales, relacionados con la longitud de los elementos de \mathcal{W} .

Lema 2.1.5. [HeY, Cor. 3] Sean $m \in \mathbb{N}$, $X, Y \in \mathfrak{X}$, $i_1, \dots, i_m, j \in I$, y $w = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m} \in \text{Hom}(Y, X)$ tales que $\ell(w) = m$. Entonces,

- $\ell(ws_j) = m + 1$ si y sólo si $w(\alpha_j) \in \Delta_+^X$,
- $\ell(ws_j) = m - 1$ si y sólo si $w(\alpha_j) \in \Delta_-^X$. □

Proposición 2.1.6. [CH1, Prop. 2.12] Para cada $w = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m} \in \mathcal{W}$ tal que $\ell(w) = m$, las raíces $\beta_j = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j}) \in \Delta^X$ son positivas y todas distintas. Si \mathcal{R} es finito y w es un elemento de longitud maximal, entonces $\{\beta_j\} = \Delta_+^X$. En consecuencia, todas las raíces son reales: i.e., para cada $\alpha \in \Delta_+^X$ existen $i_1, \dots, i_k, j \in I$ tales que $\alpha = s_{i_k} \cdots s_{i_1}(x_j)$. □

Como en [HS], consideremos para cada $X \in \mathfrak{X}$, $m \in \mathbb{N}$, $(i_1, \dots, i_m) \in I^m$ los conjuntos:

$$\Lambda^X(i_1, \dots, i_m) := \{\beta_k := \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) : 1 \leq k \leq m\} \subset \Delta^X, \quad (2.4)$$

$$\Lambda_+^X(i_1, \dots, i_m) := \{\beta \in \Delta_+^X : |\{k \in \{1, \dots, m\} : \beta = \pm \beta_k\}| \text{ es impar}\}. \quad (2.5)$$

Por [HS, Prop. 1.9], dados otros elementos $j_1, \dots, j_n \in I$, se tiene

$$\Lambda_+^X(i_1, \dots, i_m) = \Lambda_+^X(j_1, \dots, j_n) \Leftrightarrow \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m} = \text{id}_X s_{j_1} \cdots s_{j_n};$$

más aún, $|\Lambda_+^X(i_1, \dots, i_m)| = \ell(\text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m})$. Así, si $w = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ es una expresión arbitraria de $w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, X)$, podemos definir $\Lambda_+^X(w) := \Lambda_+^X(i_1, \dots, i_m)$.

2.1.2. Órdenes convexos en sistemas de raíces

Caracterizaremos órdenes convexos para sistemas de raíces de grupoides de Weyl finitos, extendiendo así los resultados de [P] para grupos de Weyl finitos.

Definición 2.1.7. Consideremos un sistema de raíces Δ_+^X con un orden total fijo $<$. Diremos que tal orden es

- *convexo* si para cada $\alpha, \beta \in \Delta^+$ tales que $\alpha < \beta$ y $\alpha + \beta \in \Delta^+$, se tiene $\alpha < \alpha + \beta < \beta$.
- *sub-convexo* si para cada $\alpha, \beta \in \Delta^+$ tales que $\alpha < \beta$ y $\alpha + \beta \in \Delta^+$, se tiene $\alpha < \alpha + \beta$.
- *fuertemente convexo* si para cada subconjunto ordenado $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$ de Δ^+ tal que $\alpha := \sum \alpha_i \in \Delta^+$ se verifica $\alpha_1 < \alpha < \alpha_k$.

La siguiente definición fue dada para grupos de Weyl en [P].

Definición 2.1.8. Sea $L = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ un subconjunto ordenado de Δ_+^X . Diremos que L está asociado a $w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, X)$ si existe una expresión reducida $w = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ tal que

$$\beta_j = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j}), \quad \forall 1 \leq j \leq m.$$

Para cada $w \in \text{Hom}(Y, X)$ definimos:

$$R_w := \{\alpha \in \Delta_+^X : w^{-1}(\alpha) \in \Delta_-^Y\}.$$

Generalizaremos ahora algunos resultados sobre grupos de Weyl al contexto de grupoides de Weyl. Para empezar, daremos el análogo a un resultado que Papi atribuye a [Bo].

Proposición 2.1.9. *Cada conjunto ordenado L asociado a w satisface $L = R_w$. En consecuencia, $|R_w| = \ell(w)$ y dos conjuntos ordenados asociados a w difieren a lo sumo en el orden.*

Demostración. Notemos que para cada $\beta_j = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j})$, se tiene $w^{-1}(\beta_j) = -s_{i_m} \cdots s_{i_{j+1}}(\alpha_j)$. $s_{i_m} \cdots s_{i_{j+1}} s_{i_j}$ es una expresión reducida pues está contenida en la expresión reducida de w , de donde $w^{-1}(\beta_j) \in \Delta_-^Y$ por el Lema 2.1.5. Luego $L \subseteq R_w$.

Recíprocamente, sea $\alpha \in R_w$. Como $w^{-1}(\alpha) \in \Delta_-^Y$ y $s_{i_1} \cdots s_{i_m}(w^{-1}(\alpha)) = \alpha \in \Delta_+^X$, consideremos el mayor j tal que $s_{i_j} \cdots s_{i_m} w^{-1}(\alpha)$ es positiva. Entonces $s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_m} w^{-1}(\alpha)$ es negativa, con lo cual $s_{i_j} \cdots s_{i_m} w^{-1}(\alpha) = \alpha_{i_j}$, y tenemos $\alpha_{i_j} = s_{i_j} \cdots s_{i_m} w^{-1}(\alpha)$; o sea, $\alpha = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_j) \in L$. \square

Relacionemos ahora estos conjuntos R_w con los conjuntos (2.5) de [HS]. A pesar que coinciden, nuestra definición nos será más cómoda para probar algunos resultados sobre convexidad.

Lema 2.1.10. *Para cada $w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, X)$, $R_w = \Lambda_+^X(w)$.*

Demostración. Fijemos una expresión reducida $w = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m}$: cada $\beta_j = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j})$ es una raíz positiva, y $\alpha \in \Delta_+^X$ coincide con $\pm\beta_j$ si y sólo si $\alpha = \beta_j$. Luego $\Lambda_+^X(w) = L$. \square

Extendamos ahora resultados de [P]. Notemos que la condición (a) del siguiente Teorema es más débil que la correspondiente al resultado en [P] pero que la prueba es muy parecida. Tal condición simplificará algunas pruebas que se presentarán luego.

Teorema 2.1.11. *Sea L un subconjunto ordenado de Δ_+^X . Existe $w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, X)$ tal que L está asociado a w si y sólo si se satisfacen simultáneamente las condiciones siguientes:*

- (a) *para cada par $\lambda < \mu \in L$ tales que $\lambda + \mu \in \Delta_+^X$, se verifica $\lambda + \mu \in L$ y $\lambda < \lambda + \mu$;*
- (b) *si $\lambda + \mu \in L$ y $\lambda, \mu \in \Delta_+^X$, entonces uno de ellos pertenece a L y es menor que $\lambda + \mu$.*

Demostración. Asumimos primero que L está asociado a $w = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ para algún $w \in \text{Hom}(Y, X)$. Si $\lambda = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$ y $\mu = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j})$ son tales que $1 \leq k < j \leq m$ y $\lambda + \mu \in \Delta_+^X$, tenemos $\lambda + \mu \in L = R_w$, pues $w^{-1}(\lambda + \mu) = w^{-1}(\lambda) + w^{-1}(\mu) \in \Delta_-^Y$.

Supongamos que $\lambda + \mu < \lambda$. Entonces $\lambda + \mu = s_{i_1} \cdots s_{i_{l-1}}(\alpha_{i_l})$ para algún $1 \leq l < k$, de donde $s_{i_l} \cdots s_{i_1}(\lambda + \mu) = -\alpha_l \in \Delta_-^{r_{i_l} \cdots r_{i_1}(X)}$. Pero $l < k < j$, de donde $s_{i_l} \cdots s_{i_1}(\lambda)$, $s_{i_l} \cdots s_{i_1}(\mu) \in \Delta_-^{r_{i_l} \cdots r_{i_1}(X)}$, que es un absurdo. Luego, $\lambda < \lambda + \mu$, y L satisface (a).

Para probar (b), supongamos que $\lambda + \mu \in L$ pero $\lambda, \mu \notin L$: $w^{-1}(\lambda), w^{-1}(\mu) \in \Delta_-^Y$, de donde $w^{-1}(\lambda + \mu)$ es positiva, contradiciendo que $\lambda + \mu \in R_w$. Si $\lambda, \mu \in L$, una prueba similar a (a) nos da que uno de ellos es menor que $\lambda + \mu$. En consecuencia, supongamos que $\lambda \in L$, $\mu \notin L$ y $\lambda + \mu < \lambda$. Si $l < k$ son tales que $\lambda + \mu = s_{i_1} \cdots s_{i_{l-1}}(\alpha_{i_l})$, tenemos que $s_{i_l} \cdots s_{i_1}(\lambda) \in \Delta^+$ y

$$s_{i_l} \cdots s_{i_1}(\lambda) + s_{i_l} \cdots s_{i_1}(\mu) = s_{i_l} \cdots s_{i_1}(\lambda + \mu) = -\alpha_l \in \Delta_-^{r_{i_l} \cdots r_{i_1}(X)};$$

así $s_{i_l} \cdots s_{i_1}(\mu) \in \Delta_-^{r_{i_l} \cdots r_{i_1}(X)}$, y $\mu \in R_{\text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_l}} \subset R_{\text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m}} = L$, que es una contradicción.

Recíprocamente, probemos que un conjunto ordenado L satisfaciendo (a) y (b) está asociado a algún w por inducción en $m := |L|$. Si $m = 1$, sea $\alpha \in L$. Supongamos que α no es simple: por el

Teorema 2.1.4, $\alpha = \beta + \gamma$ para algunas raíces positivas β, γ , y por la condición (b) una de ellas está en L ; absurdo, pues $m = 1$. Luego $L = \{\alpha_j\} = R_{s_j}$, donde $1 \leq j \leq \theta$.

Asumimos ahora $m > 1$ y sean $\beta_1 < \dots < \beta_m$ los elementos de L . Notemos que $L' = \{\beta_1, \dots, \beta_{m-1}\}$ verifica las condiciones (a) y (b): por hipótesis inductiva, existe una expresión reducida $v = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}}$ tal que

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \quad \beta_j = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j}), \quad j = 2, \dots, m-1.$$

Sea $Z = r_{i_{m-1}} \cdots r_{i_1}(X)$. Entonces $v^{-1}(\beta_m) \in \Delta_+^Z$, pues $\beta_m \notin L' = R_v$. Supongamos que $v^{-1}(\beta_m)$ no es simple. Luego, existen $\alpha, \beta \in \Delta_+^Z$ tales que $\alpha + \beta = v^{-1}(\beta_m)$; o sea, $\beta_m = \alpha' + \beta'$, donde $\alpha' = v(\alpha)$, $\beta' = v(\beta) \in \Delta^X$. Así $\alpha' \in \Delta_+^X$ o $\beta' \in \Delta_+^X$. Por otro lado, si ambas son positivas entonces una de ellas es de la forma β_k , $k < m$; digamos $\alpha' = \beta_k$. Entonces $\alpha = v^{-1}(\beta_k) \in \Delta_+^Z$, una contradicción. En consecuencia, podemos considerar $\alpha' \in \Delta_+^X$ y $\beta' \in \Delta_-^X$. En tal caso, $\alpha' \notin R_v = L'$ y $-\beta' \in R_v = L' \subset L$. Como $\alpha' = \beta_m + (-\beta')$, la condición (a) nos dice que $\alpha' \in L$, de donde $\alpha' = \beta_m \in L - L'$, que es una contradicción. Entonces, $v^{-1}(\beta_m) = \alpha_{i_m}$ para algún $i_m \in I$, $w = vs_{i_m} \in \text{Hom}(r_{i_m}(Z), X)$ es una expresión reducida por el Lema 2.1.5, y $L = R_w$. \square

Teorema 2.1.12. *Dado un orden en un sistema de raíces finito Δ_+^X , son equivalentes:*

1. *el orden está asociado a una expresión reducida del elemento de longitud máxima,*
2. *el orden es fuertemente convexo,*
3. *el orden es convexo.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2). Sea $\omega = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ un elemento de longitud máxima en $\text{Hom}(\mathcal{W}, X)$. Por la Proposición 2.1.6, $m = |\Delta_+^X|$ y $\beta_k := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$, $k = 1, \dots, m$, son todos distintos, de donde $\{\beta_k\} = \Delta_+^X$. En consecuencia, la expresión anterior induce un orden sobre Δ_+^X : $\beta_1 < \dots < \beta_m$.

Para probar que este orden es fuertemente convexo, consideremos $\beta, \beta_{k_1}, \dots, \beta_{k_l} \in \Delta_+^X$ tales que $k_1 < \dots < k_l$ y $\beta = \beta_{k_1} + \dots + \beta_{k_l}$. Supongamos que $\beta = \beta_k$ para $k < k_1$. Entonces $u = \text{id}_X s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ satisface $\ell(u) = k$, $\beta \in R_u$ pero $\beta_{k_j} \notin R_u$ para todo $j = 1, \dots, l$, que es un absurdo, pues $u(\beta) \in \Delta_-^{r_{i_k} \cdots r_{i_1} X}$ sería la suma de las raíces positivas $u(\beta_j)$. Una contradicción análoga se obtiene si se supone $k > k_l$. Luego, $k_1 < k < k_l$.

(2) \Rightarrow (3) es directa.

(3) \Rightarrow (1). Asumimos que el orden fijado en Δ_+^X es convexo; así se satisface trivialmente la condición (a) del Teorema 2.1.11 pues $L = \Delta_+^X$. La convexidad implica que se satisface también la condición (b): así el orden está asociado a algún w . Como $\ell(w) = |\Delta_+^X|$ por la Proposición 2.1.9, w debe ser el elemento de longitud máxima. \square

2.1.3. Subálgebras coideales y órdenes convexos para bases PBW

Daremos ahora una descripción de las subálgebras coideales de aquellas álgebras de Nichols con sistema de raíces finito siguiendo [HS]. Usaremos tales resultados para probar que el orden lexicográfico en los generadores PBW de la base dada por Kharchenko es convexo.

Recordemos primero cómo se asocia un grupoide de Weyl a un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal. Dado un espacio vectorial trenzado (V, c) de tipo diagonal, fijemos una base $\{x_1, \dots, x_\theta\}$ y escalares $q_{ij} \in \mathbf{k}^\times$ como en (1.5), que determinan el bicaracter χ como en (1.29). Denotamos Δ_+^V al conjunto de grados de los generadores de una base PBW de $\mathcal{B}(V)$, contados con sus multiplicidades. Tal conjunto no depende de la base PBW, tal como se afirma en [H1] y se prueba en [AA, Lemma 2.18].

De aquí en adelante, **fijaremos un espacio vectorial trenzado (V, c) de tipo diagonal y asumiremos que el sistema de raíces Δ_+^V es finito.** En tal caso podemos asociar un esquema de Cartan \mathcal{C} , un grupoide de Weyl \mathcal{W} y el correspondiente sistema de raíces \mathcal{R} , ver [HS, Thms. 6.2, 6.9] y las referencias allí presentes, que coinciden con el grupoide de Weyl definido en [H1] para cada espacio vectorial trenzado of tipo diagonal. Tal grupoide de Weyl puede construirse como sigue, ver [AA]. Sea \mathfrak{X} el conjunto de bases ordenadas de \mathbb{Z}^θ , y para cada $F = \{f_1, \dots, f_\theta\} \in \mathfrak{X}$, consideramos $\tilde{q}_{ij} = \chi(f_i, f_j)$. Definimos para cada par $1 \leq i \neq j \leq \theta$,

$$m_{ij}(F) := \text{mín} \{n \in \mathbb{N}_0 : (n+1)\tilde{q}_{ii}(1 - \tilde{q}_{ii}^n \tilde{q}_{ij} \tilde{q}_{ji}) = 0\}, \quad (2.6)$$

y también $s_{i,F} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^\theta)$ tal que $s_{i,F}(f_j) = f_j + m_{ij}(F)f_i$, donde $m_{ii} = -2$.

$\mathcal{G} = \text{Aut}(\mathbb{Z}^\theta) \times \mathfrak{X}$ es un grupoide cuyo conjunto de objetos es \mathfrak{X} , y cuyos morfismos son:

$$x \xrightarrow{(g,x)} g(x).$$

El *grupoide de Weyl* $W(\chi)$ de χ es el menor subgrupoide de \mathcal{G} tal que

- $(id, E) \in W(\chi)$,
- si $(id, F) \in W(\chi)$ y además $s_{i,F}$ está definida, entonces $(s_{i,F}, F) \in W(\chi)$.

Denotaremos $\mathcal{P}(\chi) = \{F : (id, F) \in W(\chi)\}$ al conjunto de puntos del grupoide $W(\chi)$.

Recordemos que el *orden de Dufló* (a derecha) en $\text{Hom}(\mathcal{W}, X)$ está definido como sigue: si $x \in \text{Hom}(Y, X)$ e $y \in \text{Hom}(Z, Y)$, entonces $x \leq_D xy$ si y solamente si $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$, [HS, Defn. 1.11]. De acuerdo a [HS, Thm. 1.13], si $v, w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, X)$ tenemos que $v \leq_D w$ si y sólo si $\Lambda_+^X(v) \subset \Lambda_+^X(w)$.

Observación 2.1.13. Sea $w_1 \leq_D w_2 \leq_D \dots \leq_D w_k$ una cadena maximal en $\text{Hom}(\mathcal{W}, X)$. Entonces existe una expresión reducida $\text{id}_X s_{i_1} \dots s_{i_k}$ para algunos $i_1, \dots, i_k \in I$, tales que $w_j = \text{id}_X s_{i_1} \dots s_{i_j}$, para cada $1 \leq j \leq k$.

En particular, una cadena $w_1 \leq_D w_2 \leq_D \dots \leq_D w_k$ tiene longitud máxima si y sólo si está asociada a una expresión reducida del elemento de longitud máxima en $\text{Hom}(\mathcal{W}, X)$, y así $k = |\Delta_+^X|$.

Daremos ahora algunos resultados presentes en [HS] sobre la clasificación de las subálgebras coideales de $\mathcal{B}(V)$. Siguiendo la notación de dicho trabajo, $\mathcal{K}(V)$ denotará el conjunto de todas las subálgebras coideales a izquierda de $\mathcal{B}(V)$, \mathbb{N}_0^θ -graduadas. A pesar que en [HS] los autores trabajan en un contexto más general, daremos estos resultados para trenzas de tipo diagonal.

Los primeros resultados sobre clasificación de subálgebras coideales de algunas álgebras de Nichols fueron obtenidos por Kharchenko y otras personas que han trabajado con él, ver [Kh3, KhL,

Po], para las álgebras envolventes cuantizadas $U_q(\mathfrak{g})$ de tipos A_n , B_n and G_2 , respectivamente: probaron que tales subálgebras coideales admitían una base PBW y luego las clasificaron, deduciendo que existía una correspondencia entre el conjunto de subálgebras coideales y el conjunto de raíces positivas.

Para cada $n = (n_1, \dots, n_\theta) \in \mathbb{N}_0^\theta$, escribiremos $X^n = X_1^{n_1} \cdots X_\theta^{n_\theta}$ en $\mathbf{k}[[x_1, \dots, x_\theta]]$. También denotaremos

$$\mathfrak{q}_h(t) := \frac{t^h - 1}{t - 1} \in \mathbf{k}[t], \quad h \in \mathbb{N}; \quad \mathfrak{q}_\infty(t) := \frac{1}{1 - t} = \sum_{s=0}^{\infty} t^s \in \mathbf{k}[[t]].$$

Para cada \mathbf{k} -espacio vectorial \mathbb{N}_0^θ -graduado $W = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}_0^\theta} W_\alpha$, denotaremos su serie de Hilbert por

$$\mathcal{H}_W := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^\theta} (\dim W_\alpha) X^\alpha \in \mathbf{k}[[x_1, \dots, x_\theta]].$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^\theta$, escribimos $q_\alpha = \chi(\alpha, \alpha)$, donde χ es el bicaracter sobre \mathbb{Z}^θ (1.29), y $N_\alpha = \infty$ si q_α no es una raíz de la unidad.

Teorema 2.1.14. [HS] *Para cada $w \in \text{Hom}(\mathcal{W}, V)$ existe una única subálgebra coideal a izquierda $F(w) \in \mathcal{K}(V)$ tal que su serie de Hilbert es*

$$\mathcal{H}_{F(w)} = \prod_{\beta \in \Lambda_+^V(w)} \mathfrak{q}_{N_\beta}(X^\beta). \quad (2.7)$$

Más aún, la correspondencia $w \mapsto F(w)$ establece una biyección que preserva ambos órdenes entre $\text{Hom}(\mathcal{W}, V)$ y $\mathcal{K}(V)$, donde consideramos el orden de Duflo en $\text{Hom}(\mathcal{W}, V)$ y el orden dado por la inclusión en $\mathcal{K}(V)$; esto es,

$$w_1 \leq_D w_2 \Leftrightarrow F(w_1) \subset F(w_2).$$

Demostración. Notemos que en [HS] se clasifican las subálgebras coideales a derecha, pero E es una subálgebra coideal a derecha si y sólo si $\mathcal{S}(E)$ es una subálgebra coideal a izquierda, donde \mathcal{S} denota la antípoda de $\mathcal{B}(V)$. Más aún, E es \mathbb{N}^θ -graduado si y sólo si $\mathcal{S}(E)$ lo es, siendo además $\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_{\mathcal{S}(E)}$, pues \mathcal{S} es \mathbb{N}^θ -graduado; además el orden dado por la inclusión en la familia de subálgebras coideales a izquierda corresponde al mismo orden en las subálgebras coideales a derecha, pues \mathcal{S} es biyectiva. En este contexto definimos $F(w) = \mathcal{S}(E^V(w))$, donde $E^V(w)$ es el álgebra definida en [HS, Thm. 6.12].

Por [HS, Lemma 6.11], se tiene un isomorfismo de \mathbb{N}_0^θ -espacios graduados

$$F(w) \cong \bigotimes_{\beta \in \Lambda_+^V(w)} \mathcal{B}(V_\beta),$$

donde V_β corresponde a N_β de [HS, Defn. 6.5]. Esto es, V_β es un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal de dimensión 1, generado por un vector no nulo v_β , tal que $c(v_\beta \otimes v_\beta) = q_\beta v_\beta \otimes v_\beta$. Así, $\mathcal{H}_{\mathcal{B}(V_\beta)} = \mathfrak{q}_{N_\beta}(X^\beta)$, de donde obtenemos (2.7).

La unicidad de una subálgebra coideal con una serie de Hilbert dada sigue de [HS, Lemma 6.4]. La aplicación $\text{Hom}(\mathcal{W}, V) \rightarrow \mathcal{K}(V)$ es biyectiva y preserva el orden en ambos sentidos por [HS, Thms. 6.12, 6.15], pues tales resultados valen en particular para trenzas de tipo diagonal (V, c) tales que Δ_+^V es finito. \square

Consideremos la base PBW de palabras de Lyndon del Teorema 1.7.11 para una base fija $\{x_1, \dots, x_\theta\}$ de V . Asumimos que Δ_+^V es finito, de donde todas las raíces son reales, de multiplicidad 1. Luego podemos etiquetar los generadores PBW con los elementos $\beta \in \Delta_+^V$: los denominaremos $x_\beta = [l_\beta]_c$, donde l_β es una palabra de Lyndon de grado β . Así podemos inducir un orden total en las raíces: si $l_{\beta_1} < l_{\beta_2} < \dots < l_{\beta_M}$ están ordenadas lexicográficamente, consideramos $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_M$, donde $M = |\Delta_+^V|$, y en particular $l_{\beta_1} = x_1$, $l_{\beta_M} = x_\theta$. Sea B la base de $\mathcal{B}(V)$ que consiste de las correspondientes hiperpalabras.

Sea $\pi : T(V) \rightarrow \mathcal{B}(V) = T(V)/I(V)$ la proyección canónica. A partir de las subálgebras coideales W_{l_β} del Lema 1.7.8 definimos

$$W_\beta := \pi(W_{l_\beta}), \quad \beta \in \Delta_+^V.$$

Observación 2.1.15. W_β es una subálgebra coideal a izquierda de $\mathcal{B}(V)$, pues π es un morfismo de álgebras de Hopf trenzadas y cada W_{l_β} es una subálgebra coideal a izquierda de $T(V)$. También $W_{\beta_j} \subseteq W_{\beta_i}$ si $i < j$, y

$$W_{\beta_1} = \mathcal{B}(V), \quad W_{\beta_M} = \mathbf{k}\langle x_\theta \rangle.$$

Lema 2.1.16. *Con la notación anterior, $x_{\beta_i} \notin W_{\beta_j}$ si $i < j$.*

En consecuencia, $\mathcal{B}(V) = W_{\beta_1} \supsetneq W_{\beta_2} \supsetneq \dots \supsetneq W_{\beta_M}$.

Demostración. Supongamos que para algún par $i < j$ se tiene $x_{\beta_i} \in W_{\beta_j}$. Entonces, $x_{\beta_i} \in G_{I(V)}$ es una combinación lineal de hiperpalabras mayores o iguales que x_{β_j} en $\mathcal{B}(V)$, lo cual contradice el Corolario 1.7.12. Así, $x_{\beta_i} \notin W_{\beta_j}$, y la segunda afirmación del Lema sigue de la Observación 2.1.15. \square

Probemos entonces el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.1.17. *Siguiendo con la notación anterior, el orden lineal $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_M$ de Δ_+^V es convexo.*

Demostración. Cada W_{β_i} se corresponde con alguna subálgebra $F(w_i)$. Por el lema anterior anterior tenemos una cadena de subálgebras coideales, que se corresponde con una cadena $w_1 \geq_D w_2 \geq_D \dots \geq_D w_M$ por el Teorema 2.1.14.

Los w_i 's son todos distintos, por lo cual tenemos una cadena de longitud máxima, y por la Observación 2.1.13 existe una expresión reducida del elemento de longitud máxima $\omega^V = \text{id}_V s_{i_M} \cdots s_{i_1}$ tal que $w_k = \text{id}_V s_{i_M} \cdots s_{i_k}$ para cada $1 \leq k \leq M$.

Probaremos por inducción (descendiente en j) que $\beta_j = s_{i_M} \cdots s_{i_{j+1}}(\alpha_j)$. En tal caso, queda concluida la prueba usando el Teorema 2.1.12. Para probar el paso inicial, notemos que $\mathcal{H}_{w_M} = \mathfrak{q}_{N_{\alpha_\theta}}(x_\theta)$ por el Teorema 2.1.14, y por la Observación 2.1.15 tenemos $i_m = \theta$.

Asumimos ahora que $k < M$ y que tenemos por hipótesis inductiva $\beta_j = s_{i_M} \cdots s_{i_{j+1}}(\alpha_j)$ para $j = k+1, \dots, M$. Denotemos $\gamma = s_{i_M} \cdots s_{i_{k+1}}(\alpha_k)$, de modo que

$$\mathcal{H}_{W_{\beta_{k+1}}} = \prod_{j=k+1}^M \mathfrak{q}_{N_{\beta_j}}(X^{\beta_j}), \quad \mathcal{H}_{W_{\beta_k}} = \mathfrak{q}_{N_\gamma}(X^\gamma) \left(\prod_{j=k+1}^M \mathfrak{q}_{N_{\beta_j}}(X^{\beta_j}) \right).$$

Por otro lado, $\{x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_k}^{n_k} : 0 \leq n_j < N_{\beta_j}\}$ es un conjunto linealmente independiente de W_{β_k} , con lo cual

$$\mathcal{H}_{W_{\beta_k}} \geq \prod_{j=k}^M \mathfrak{q}_{N_{\beta_j}}(X^{\beta_j}),$$

donde una desigualdad entre las series significa que tenemos la correspondiente desigualdad para todos los coeficientes del mismo grado. Mirando entonces el coeficiente de X^{β_k} obtenemos que existe una expresión

$$\beta_k = n\gamma + \sum_{j=k+1}^M n_j \beta_j, \quad n \in \mathbb{N}, n_j \in \mathbb{N}_0.$$

Notemos que $R_{w_k} = \Lambda_+^V = \{\gamma, \beta_{k+1}, \dots, \beta_M\}$, de modo que si aplicamos w_k a la última igualdad, tenemos que $w_k^{-1}(\beta_k) \in \Delta_m^{r_1 \cdots r_M(V)}$. Entonces $\beta_k \in R_{w_k}$, y como $\beta_k \neq \beta_j$ para todo $j > k$, concluimos que $\beta_k = \gamma$. \square

El siguiente resultado extiende [Le, Prop. 25], donde se consideran álgebras envolventes cuantizadas $U_q(\mathfrak{g})$. Además nos da un modo inductivo de obtener las palabras l_β para cada $\beta \in \Delta_+^V$.

Corolario 2.1.18. *Para cada $\beta \in \Delta_+^V$, $\beta \neq \alpha_1, \dots, \alpha_\theta$,*

$$l_\beta = \text{máx}\{l_{\delta_1} l_{\delta_2} : \delta_1, \delta_2 \in \Delta_+^V, \delta_1 + \delta_2 = \beta, l_{\delta_1} < l_{\delta_2}\}. \quad (2.8)$$

Demostración. Cada factor de un elemento de $G_{I(V)}$ está en $G_{I(V)}$ (ver la Sección 1.7). Luego, si $\text{Sh}(l_\beta) = (u, v)$, en particular $l_\beta = uv$, y así existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \Delta_+^V$ tales que $u = l_{\gamma_1} < v = l_{\gamma_2}$ y $\beta = \gamma_1 + \gamma_2$.

Por otro lado, sean $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_+^V$ tales que $\delta_1 + \delta_2 = \beta$ y $l_{\delta_1} < l_{\delta_2}$. Por el teorema anterior, $l_{\delta_1} < l_\beta < l_{\delta_2}$. Si l_β no comienza con l_{δ_1} , entonces $l_{\delta_1} u < l_\beta$ para cualquier palabra u , y en particular $l_{\delta_1} l_{\delta_2} < l_\beta$. Si l_β comienza con l_{δ_1} , entonces $l_\beta = l_{\delta_1} u$, para alguna palabra u de grado δ_2 . Sea $u = l_p l_{p-1} \cdots l_1$ la descomposición de Lyndon. Luego cada $l_i \in G_{I(V)}$, de modo que $u = l_{\beta_M}^{n_M} \cdots l_{\beta_1}^{n_1}$ para algunos $n_i \in \mathbb{N}_0$. Sea $k = \text{máx}\{j : n_j \neq 0\}$. Como el orden es fuertemente convexo, $x_{\beta_k} \geq x_{\delta_2}$; esto es, $l_{\beta_k} \geq l_{\delta_2}$, de donde $u \geq l_{\delta_2}$ y así $l_\beta = l_{\delta_1} u \geq l_{\delta_1} l_{\delta_2}$. En cualquier caso, $l_\beta = l_{\delta_1} u \geq l_{\delta_1} l_{\delta_2}$. \square

Mostraremos ahora que la familia de subálgebras coideales W_β , las cuales son en particular $\mathcal{B}(V)$ -comódulos a izquierda, se comportan en parte como módulos de peso máximo.

Teorema 2.1.19. *El conjunto $B_k = \{x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_k}^{n_k} : 0 \leq n_j < N_{\beta_j}\}$ es una base de W_{β_k} . Más aún, si $W_{\beta_k} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}_0^\theta} W_{\beta_k}(\alpha)$ denota la descomposición en las componentes \mathbb{N}_0^θ -homogéneas, entonces $\dim W_{\beta_k}(\beta_k) = 1$.*

Demostración. La primer afirmación es válida porque B_k está incluido en W_{β_k} , es un conjunto linealmente independiente y la serie de Hilbert del subespacio que genera B_k coincide con la serie de Hilbert de W_{β_k} .

Para la segunda afirmación, si $\sum_{i=1}^M n_i \beta_i = \beta_k$ para algún $n_i \in \mathbb{N}_0$, entonces $n_i = \delta_{i,k}$ o existe $i < k$ tal que $n_i > 0$, por el Teorema 2.1.12. \square

Como consecuencia de la descripción de las subálgebras coideales W_α como en el teorema anterior, obtenemos una nueva expresión del coproducto de las hiperpalabras que usaremos en la siguiente sección. Para ello consideremos los siguientes conjuntos:

$$C_k := \{x_{\beta_k}^{n_k} x_{\beta_{k-1}}^{n_{k-1}} \cdots x_{\beta_1}^{n_1} : 0 \leq n_j < N_{\beta_j}\}, \quad (2.9)$$

$$D_k := \{x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_1}^{n_1} : 0 \leq n_j < N_{\beta_j}, \exists j \geq k \text{ such that } n_j \neq 0\}. \quad (2.10)$$

Lema 2.1.20. *Sea $a \in B_k - \{1\}$, $b \in B_l$, $l \leq k$. Entonces $ab = 0$ o ab es una combinación lineal de elementos de $B_l \cap D_k$.*

Demostración. Si $l = k$, el enunciado es trivial. Asumimos entonces que $l < k$ y escribimos $b = b_1 b_2$, donde $b_1 \in B_k$ y $b_2 \in C_{k-1} \cap B_l$ (puede ser que $b_1 = 1$). Entonces $ab_1 \in W_{\beta_k}$, pues W_{β_k} es una subálgebra, y está generada por B_k . Finalmente, notemos que si $c \in B_k$, entonces $cb_2 \in B_l \cap D_k$. \square

Definimos también $ht(u) := \sum n_i$, si $u = x_{\beta_M}^{n_M} x_{\beta_{k-1}}^{n_{k-1}} \cdots x_{\beta_1}^{n_1}$.

Lema 2.1.21. *Sea $u = x_{\beta_k}^{n_k} \cdots x_{\beta_l}^{n_l} \in B_l - D_{k+1}$, $l \leq k$, donde $n_k, n_l \neq 0$. Entonces,*

$$\Delta(u) \in \left(\bigoplus_{v \in B, w \in D_k \cap B_l} \mathbf{k} v \otimes w \right) \oplus \left(\bigoplus_{v \in D_k, w \in B_l - D_k} \mathbf{k} v \otimes w \right).$$

Demostración. Lo probaremos por inducción en ht . Si $ht(u) = 1$, $u = x_{\beta_i}$ para algún i . Luego, $\Delta(u) \in u \otimes 1 + 1 \otimes u + \mathcal{B}(V) \otimes W_{\beta_i}$, y vale el enunciado del Lema.

Asumimos ahora que vale para w tales que $ht(w) < n$, y sea $u = x_{\beta_k}^{n_k} \cdots x_{\beta_l}^{n_l}$ tal que $ht(u) = n$. Escribimos entonces $u = x_{\beta_k} w$, de modo que por hipótesis inductiva,

$$\Delta(u) \in \left(\bigoplus_{v \in B, w \in D_s \cap B_l} \mathbf{k} v \otimes w \right) \oplus \left(\bigoplus_{v \in D_s, w \in B_l - D_s} \mathbf{k} v \otimes w \right),$$

donde $s = k - 1$ si $n_k = 1$, o $s = k$ si $n_k > 1$. Calculemos $\Delta(u) = \Delta(x_{\beta_k})\Delta(w)$. Usando que la trenza es diagonal, y el Lema 2.1.20 concluimos que

$$(\Delta(x_{\beta_k}) - x_{\beta_k} \otimes 1)\Delta(w) \in \bigoplus_{v \in B, w \in D_k \cap B_l} \mathbf{k} v \otimes w.$$

También, para cada $v \in B$ tenemos $x_{\beta_k} v \in D_k$, pues si $v \in B_k$ entonces $x_{\beta_k} v \in W_{\beta_k}$ y si $v \in B_i$ para $i < k$ entonces aplicamos el Lema 2.1.20 nuevamente para terminar la prueba. \square

2.2. Presentación por generadores y relaciones de álgebras de Nichols de tipo diagonal

En esta sección usaremos el orden convexo de una base PBW de hiperletras para probar que, cuando la trenza diagonal es simétrica, dicha base PBW es ortogonal para la forma bilineal de la

Proposición 1.4.7. Este hecho nos dará la posibilidad de obtener relaciones que se satisfacen en un álgebra de Nichols, aún cuando la trenza no sea simétrica. Obtendremos entonces una presentación por generadores y relaciones para cualquier álgebra de Nichols de tipo diagonal cuyo sistema de raíces es finito si consideramos cierto conjunto de relaciones.

Seguimos utilizando la notación de la Subsección 2.1.3. Para empezar, probemos que la base PBW es ortogonal con respecto a la forma bilineal de la Proposición 1.4.7. Este resultado extiende [A1, Prop. 5.1], y la prueba es similar.

Proposición 2.2.1. *Consideremos una base PBW de $\mathcal{B}(V)$ como antes, dada por palabras de Lyndon, para una matriz de trenza simétrica. Entonces la base PBW es ortogonal con respecto a la forma bilineal de la Proposición 1.4.7.*

Demostración. Probaremos por inducción en $k = \ell(u) + \ell(v)$ que $(u|v) = 0$, donde $u \neq v$ son hiperpalabras monótonas en los generadores PBW. Si $k = 1$, entonces $u = 1$, $v = x_j$ o $u = x_i$, $v = 1$, para algunos $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$, y $(1|x_j) = (x_i|1) = 0$.

Supongamos que la afirmación vale cuando $\ell(u) + \ell(v) < k$, y sean $u \neq v$ dos hiperpalabras tales que $\ell(u) + \ell(v) = k$. Si ambas son hiperletras, tienen diferentes grados $\alpha \neq \beta \in \mathbb{Z}^\theta$, de donde $u = x_\alpha$, $v = x_\beta$, y $(x_\alpha|x_\beta) = 0$, dado que las componentes homogéneas son ortogonales para $(\cdot|\cdot)$.

Supongamos que $u = x_\alpha$ y $v = x_{\beta_k}^{h_k} x_{\beta_{k-1}}^{h_{k-1}} \dots x_{\beta_i}^{h_i}$, para algunos $1 \leq i \leq k \leq M$ (consideremos $h_k, h_l \neq 0$). Si u, v tienen distinto \mathbb{Z}^θ -grado, son ortogonales. Asumimos entonces que $\alpha = \sum_{j=i}^k h_j \beta_j$, de donde $\beta_i < \alpha$ pues el orden en el sistema de raíces es fuertemente convexo por el Teorema 2.1.17. Usando el Lema 1.7.7 y (1.10),

$$(u|v) = (x_\alpha|w)(1|x_{\beta_i}) + (1|w)(x_\alpha|x_{\beta_i}) + \sum_{l_1 \geq \dots \geq l_p > l_\alpha, l_i \in L} (x_{l_1, \dots, l_p}|w)([l_1]_c \cdots [l_p]_c|x_{\beta_i}),$$

donde $v = wx_{\beta_i}$. Notemos que $(1|x_{\beta_i}) = (1|w) = 0$. También, $[l_1]_c \cdots [l_p]_c$ es una combinación lineal de hiperpalabras mayores del mismo grado y algún elemento de $I(V)$, y por hipótesis inductiva sumado al hecho que $I(V)$ es el radical de la forma bilineal, concluimos que $([l_1]_c \cdots [l_p]_c|x_{\beta_i}) = 0$. Luego, $(u|v) = 0$.

Para el último caso, consideremos

$$u = x_{\beta_k}^{h_k} \dots x_{\beta_i}^{h_i}, \quad 1 \leq i \leq k \leq M, \quad v = x_{\beta_q}^{f_q} \dots x_{\beta_p}^{f_p}, \quad 1 \leq p \leq q \leq M.$$

La forma bilineal es simétrica, por lo cual podemos asumir que $i \leq p$. Por el Lema 1.7.7 y (1.11),

$$(u|v) = (w|1)(x_{\beta_i}|v) + \sum_{j=0}^{f_p} \binom{f_p}{j}_{q_{\beta_p}} (w|x_{\beta_q}^{f_q} \dots x_{\beta_{p-1}}^{f_{p-1}} x_{\beta_p}^j)(x_{\beta_i}|x_{\beta_p}^{f_p-j}) \\ + \sum_{\substack{l_1 \geq \dots \geq l_t > l_{\beta_p}, l_s \in L \\ 0 \leq j \leq f_p}} (w|x_{l_1, \dots, l_t}^{(j)})(x_{\beta_i}|[l_1]_c \cdots [l_t]_c x_{\beta_p}^j)$$

donde $u = wx_{\beta_i}$. Notemos que $(w|1) = 0$, y $[l_1]_c \cdots [l_p]_c x_{\beta_p}^j$ es una combinación de hiperpalabras de la base PBW mayores o iguales que v y un elemento de $I(V)$. Usando la hipótesis inductiva y el

hecho que $I(V)$ es el radical de la forma bilineal, concluimos que $(x_{\beta_i} | [l_1]_c \dots [l_p]_c x_{\beta_p}^j) = 0$. Como también $x_{\beta_i}, x_{\beta_p}^{f_p-j}$ son elementos distintos de la base PBW si $f_p - j \neq 1$, tenemos

$$(u|v) = (f_p)_{q_{\beta_p}}(w|x_{\beta_q}^{f_q} \dots x_{\beta_{p-1}}^{f_{p-1}} x_{\beta_p}^{f_p-1})(x_{\beta_i} | x_{\beta_p}). \quad (2.11)$$

Luego $(u|v) = 0$ si $i < p$, pero también si $i = p$, pues en tal caso $w \neq x_{\beta_q}^{f_q} \dots x_{\beta_{p-1}}^{f_{p-1}} x_{\beta_p}^{f_p-1}$ y usamos la hipótesis inductiva para w . \square

Corolario 2.2.2. Si $u = x_{\beta_M}^{n_M} \dots x_{\beta_1}^{n_1}$, donde $0 \leq n_j < N_{\beta_j}$, entonces

$$c_u := (u|u) = \prod_{j=1}^M n_j! q_{\beta_j} c_{x_{\beta_j}^{n_j}} \neq 0. \quad (2.12)$$

Demostración. Probaremos esta igualdad por inducción en $ht(w)$. Si $ht(w) = 1$, w es una hiperletra, y la igualdad es trivial. Si asumimos que vale para $ht(w) < k$, y tenemos $ht(u) = k$, usamos el hecho que la base PBW es ortogonal y un cálculo como en (2.11) para $v = u$ y obtenemos la igualdad en (2.12) usando la hipótesis inductiva.

Tal escalar es no nulo pues $u \notin I(V)$ y la base PBW genera un complemento \mathbf{k} -lineal de $I(V)$, el radical de la forma bilineal. \square

Observación 2.2.3. Notemos que:

$$(x_{\beta_i} x_{\beta_j} | u) = (x_{\beta_i} | u_{(1)})(x_{\beta_j} | u_{(2)}) = d_{i,j} c_{x_{\beta_i}} c_{x_{\beta_j}},$$

donde $d_{i,j}$ es el coeficiente de $x_{\beta_i} \otimes x_{\beta_j}$ en la expresión de $\Delta(u)$ como combinación lineal de elementos de la base PBW en ambos lados del producto tensorial.

Retornamos ahora al caso general donde la matriz de la trenza no es necesariamente simétrica. Obtendremos algunas relaciones y probaremos entonces que el álgebra de Nichols admite cierta presentación por generadores y relaciones. El paso fundamental es entonces obtener este conjunto de relaciones para dar lugar a la presentación en el Teorema 2.2.10.

Notemos que $B_i \cap C_j$ es el conjunto de hiperpalabras monótonas cuyas hiperletras están entre x_{β_i} y x_{β_j} , ver Teorema 2.1.19 y la definición de los conjuntos C_j (2.9).

Sea (W, d) un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_\theta$ una base de W y $\widehat{q}_{ij} \in \mathbf{k}^\times$ tales que $d(\widehat{x}_i \otimes \widehat{x}_j) = \widehat{q}_{ij} \widehat{x}_j \otimes \widehat{x}_i$. Asumimos que $\widehat{q}_{ij} = \widehat{q}_{ji}$ para cada par $1 \leq i, j \leq \theta$, y que (V, c) y (W, d) son equivalentes por torcimiento: esto es,

$$q_{ij} q_{ji} = \widehat{q}_{ij} \widehat{q}_{ji}, \quad q_{ii} = \widehat{q}_{ii}, \quad 1 \leq i \neq j \leq \theta.$$

Definimos $\widehat{x}_\beta = [l_\beta]_d$: esto es, la hiperletra correspondiente a l_β , pero donde cambiamos la trenza c por d . Por el Corolario 2.1.18, las palabras de Lyndon de las bases PBW de $\mathcal{B}(V)$ y de $\mathcal{B}(W)$ coinciden. Así, el conjunto de todos los \widehat{x}_β , $\beta \in \Delta_+^V = \Delta_+^W$, es un conjunto de generadores de una base PBW como en el Teorema de Kharchenko. Si $u = x_{\beta_M}^{n_M} \dots x_{\beta_1}^{n_1}$, denotaremos

$$\widehat{u} = \widehat{x}_{\beta_M}^{n_M} \dots \widehat{x}_{\beta_1}^{n_1}.$$

Sea $\sigma : \mathbb{Z}^\theta \times \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbf{k}^\times$ la forma bilineal dada por

$$\sigma(g_i, g_j) = \begin{cases} \widehat{q}_{ij} q_{ij}^{-1}, & i \leq j \\ 1, & i > j \end{cases} \quad (2.13)$$

Por [AS1, Prop. 3.9, Rem. 3.10] existe un isomorfismo lineal $\Psi : \mathcal{B}(W) \rightarrow \mathcal{B}(V)$ tal que $\Psi(\widehat{x}_i) = x_i$ y para cada $x \in \mathcal{B}(W)_\alpha$, $y \in \mathcal{B}(W)_\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^\theta$,

$$\Psi(xy) = \sigma(\alpha, \beta) \Psi(x) \Psi(y), \quad (2.14)$$

$$\Psi([x, y]_d) = \sigma(\alpha, \beta) [\Psi(x), \Psi(y)]_c. \quad (2.15)$$

Definimos $t_{\alpha_i} = 1$ para cada $1 \leq i \leq \theta$, e inductivamente

$$t_\beta = \sigma(\beta_1, \beta_2) t_{\beta_1} t_{\beta_2}, \quad \text{Sh}(l_\beta) = (l_{\beta_1}, l_{\beta_2}).$$

Para cada $u = x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_1}^{n_1}$ definimos

$$f(u) := \prod_{1 \leq i < j \leq M} \sigma(\beta_j, \beta_i)^{n_i n_j} \prod_{1 \leq i \leq M} \sigma(\beta_i, \beta_i)^{\binom{n_i}{2}} t_{\beta_i}^{n_i}. \quad (2.16)$$

Lema 2.2.4. Para cada $u = x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_1}^{n_1}$, $\Psi(\widehat{u}) = f(u)u$.

Demostración. Probaremos primero por inducción en $\ell(l_\beta)$, $\beta \in \Delta_+^V$, que $\Psi(\widehat{x}_\beta) = t_\beta x_\beta$. El enunciado sigue por definición para $\ell(l_\beta) = 1$, o sea $\beta = \alpha_i$ para algún $1 \leq i \leq \theta$. Asumimos entonces que vale cuando $\ell(l_\gamma) < k$, y consideremos $\beta \in \Delta_+^V$ tal que $\ell(l_\beta) = k$. Sea $\text{Sh}(l_\beta) = (\beta_1, \beta_2)$. Así,

$$\Psi(\widehat{x}_\beta) = \Psi([\widehat{x}_{\beta_1}, \widehat{x}_{\beta_2}]_d) = \sigma(\beta_1, \beta_2) [\Psi(\widehat{x}_{\beta_1}), \Psi(\widehat{x}_{\beta_2})]_c = \sigma(\beta_1, \beta_2) t_{\beta_1} t_{\beta_2} [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}]_c = t_\beta x_\beta,$$

por (2.15) e hipótesis inductiva.

Probemos ahora que $\Psi(\widehat{u}) = f(u)u$ por inducción en $ht(u)$. Notemos que si $ht(u) = 1$ se reduce a $\Psi(\widehat{x}_\beta) = t_\beta x_\beta$. Asumimos entonces que vale cuando $ht(v) < N$, y consideramos $u = x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_k}^{n_k}$ tal que $ht(u) = N$, donde $n_k > 0$. Denotemos $v = x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_k}^{n_k - 1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Psi(\widehat{u}) &= \sigma \left((n_k - 1)\beta_k + \sum_{i=k+1}^M n_i \beta_i, \beta_k \right) \Psi(\widehat{v}) \Psi(\widehat{x}_{\beta_k}) \\ &= \left(\prod_{i=k+1}^M \sigma(\beta_i, \beta_k)^{n_i} \right) \sigma(\beta_k, \beta_k)^{n_k - 1} f(v) v t_{\beta_k} x_{\beta_k} = f(u)u, \end{aligned}$$

por (2.14) e hipótesis inductiva. □

Definición 2.2.5. Para cada par $1 \leq i < j \leq \theta$ y $u = x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_1}^{n_1}$, sea

$$c_{i,j}^u := \frac{f(u) (\widehat{x}_{\beta_i} \widehat{x}_{\beta_j} | \widehat{u})}{\sigma(\beta_i, \beta_j) t_{\beta_i} t_{\beta_j} c_{\widehat{u}}}, \quad (2.17)$$

donde $(\cdot | \cdot)$ denota la forma bilineal asociada a (W, d) , y $c_{\widehat{u}}$ se calcula como en el Corolario 2.2.2. Notemos que si (q_{ij}) es simétrica y consideramos $q_{ij} = \widehat{q}_{ij}$, entonces $\sigma(\alpha, \beta) = 1$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^\theta$ y así $f(u) = 1$ para cualquier u . En consecuencia, $c_{i,j}^u = (x_{\beta_i} x_{\beta_j} | u) c_{\widehat{u}}^{-1}$.

Usando estos escalares obtendremos un primer conjunto de relaciones para nuestra presentación.

Lema 2.2.6. *Sean $1 \leq i < j \leq M$ tales que $l_{\beta_i} l_{\beta_j} \neq l_{\beta_k}$ para todo k , y $\text{Sh}(l_{\beta_i} l_{\beta_j}) = (l_{\beta_i}, l_{\beta_j})$; consideremos $c_{i,j}^u \in \mathbf{k}$ como antes. Entonces,*

$$[x_{\beta_i}, x_{\beta_j}]_c = \sum_{u \in B_i \cap C_j - \{x_{\beta_j} x_{\beta_i}\}: \deg u = \beta_i + \beta_j} c_{i,j}^u u. \quad (2.18)$$

Demostración. Asumimos primero que la trenza es simétrica. Como $l_{\beta_i} l_{\beta_j} \neq l_{\beta_k}$ para todo k , y $\text{Sh}(l_{\beta_i} l_{\beta_j}) = (l_{\beta_i}, l_{\beta_j})$, se tiene que

$$[l_{\beta_i} l_{\beta_j}]_c = [x_{\beta_i}, x_{\beta_j}]_c = x_{\beta_i} x_{\beta_j} - \chi(\beta_i, \beta_j) x_{\beta_j} x_{\beta_i}$$

es una combinación lineal de hiperpalabras monótonas mayores, por el Corolario 1.7.12.

Como $x_{\beta_i} x_{\beta_j} \in W_{\beta_i}$, es una combinación lineal de elementos en B_i por el Teorema 2.1.19. También, $\mathcal{B}(V)$ es \mathbb{N}_0^θ -graduada, de donde tal combinación lineal es sobre aquellos elementos de B_i de grado $\beta_i + \beta_j$. Más aún, si $c_{i,j}^u \neq 0$ para $u = x_{\beta_k}^{n_k} \cdots x_{\beta_l}^{n_l}$, $l \leq k$ tal que $n_k, n_l \neq 0$, tenemos que $x_{\beta_i} \otimes x_{\beta_j}$ aparece en la expresión de $\Delta(u)$ de la Observación 2.2.3. Notemos que $x_{\beta_i} \otimes x_{\beta_j} \notin D_k \otimes (B_l - D_k)$, pues $i < j$. Por el Lema 2.1.21, tenemos que $x_{\beta_j} \in B_k$, de donde $j \geq k$, y $u \in C_j$.

La fórmula explícita de los coeficientes se deduce de la Proposición 2.2.1.

Si queremos calcular $c_{i,j}^{x_{\beta_j} x_{\beta_i}}$, debemos calcular el coeficiente de $x_{\beta_i} \otimes x_{\beta_j}$ en $\Delta(x_{\beta_j} x_{\beta_i})$, de acuerdo a la Observación 2.2.3 y la fórmula $c_{x_{\alpha_j} x_{\alpha_i}} = c_{x_{\alpha_i}} c_{x_{\alpha_j}}$. Tal coeficiente es $\chi(\beta_j, \beta_i)$, pero como la matriz de la trenza es simétrica, $\chi(\beta_j, \beta_i) = \chi(\beta_i, \beta_j)$. Luego probamos el caso en que la matriz de la trenza es simétrica.

Cuando la trenza no es simétrica, usamos el isomorfismo lineal Ψ considerado antes para reducirlo al caso simétrico. En dicho caso,

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi \left([\widehat{x}_{\beta_i}, \widehat{x}_{\beta_j}]_d - \sum (\widehat{x}_{\beta_i} \widehat{x}_{\beta_j} | \widehat{u}) c_{\widehat{u}}^{-1} \widehat{u} \right) \\ &= \sigma(\beta_i, \beta_j) t_{\beta_i} t_{\beta_j} [x_{\beta_i}, x_{\beta_j}]_c - \sum (\widehat{x}_{\beta_i} \widehat{x}_{\beta_j} | \widehat{u}) c_{\widehat{u}}^{-1} f(u) u, \end{aligned}$$

por (2.15) y el Lema 2.2.4, de donde (2.18) vale en $\mathcal{B}(V)$. \square

Corolario 2.2.7. *Asumimos que i, j verifican las condiciones del Lema 2.2.6, y además $\beta_i + \beta_j = \sum_{k=i}^j n_k \beta_k$, $n_k \in \mathbb{N}_0$ si y sólo si $n_i = n_j = 1$, $n_k = 0$ para $k \neq i, j$. Entonces,*

$$[x_{\beta_i}, x_{\beta_j}]_c = 0. \quad (2.19)$$

Demostración. Es una consecuencia directa del resultado anterior. \square

Probaremos ahora una generalización de [A1, Cor. 5.2]. Recordemos que $N_\beta = \text{ord}(q_\beta) = h(x_\beta)$.

Lema 2.2.8. *Para cada $\beta \in \Delta_+^V$ tal que N_β es finito, se tiene*

$$x_\beta^{N_\beta} = 0, \quad \text{en } \mathcal{B}(V). \quad (2.20)$$

Demostración. Asumimos primero que (q_{ij}) es simétrica. Consideremos $w = \tilde{w}x_\beta^m$, donde $\beta \in \Delta^+$ y \tilde{w} es una hiperpalabra monótona en hiperletras x_γ , $\gamma \in \Delta^+$ tal que $\gamma > \beta$, o $\tilde{w} = 1$. Si $\beta > \alpha$,

$$(x_\alpha^{N_\alpha} | w) = (x_\alpha^{N_\alpha-1} | 1)(x_\alpha | w) + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}_{q_\beta} (x_\alpha^{N_\alpha-1} | \tilde{w}x_\beta^i)(x_\alpha | x_\beta^{m-i}) \\ + \sum_{l_1 \geq \dots \geq l_p > x_\beta, 0 \leq j \leq m} (x_\alpha^{N_\alpha-1} | x_{l_1, \dots, l_p}^{(j)})(x_\alpha | [l_1]_c \dots [l_p]_c x_\beta^j) = 0,$$

donde usamos que $(x_\alpha^{N_\alpha-1} | 1) = (x_\alpha | x_\beta^{m-i}) = (x_\alpha | [l_1]_c \dots [l_p]_c x_\beta^j) = 0$ debido a que la base PBW es ortogonal.

Si $\beta \leq \alpha$, entonces

$$(x_\alpha^{N_\alpha} | w) = (1 | \tilde{w}x_\beta^{m-1})(x_\alpha^{N_\alpha} | x_\beta) + \sum_{i=1}^{N_\alpha} \binom{N_\alpha}{i}_{q_\alpha} (x_\alpha^i | \tilde{w}x_\beta^{m-1})(x_\alpha^{N_\alpha-i} | x_\beta) \\ + \sum_{l_1 \geq \dots \geq l_p > x_\alpha, 0 \leq j \leq N_\alpha} (x_{l_1, \dots, l_p}^{(j)} | \tilde{w}x_\beta^{m-1})([l_1]_c \dots [l_p]_c x_\alpha^j | x_\beta)$$

donde usamos que $q_\alpha \in \mathbb{G}_{N_\alpha}$, el hecho que la base PBW sea ortogonal, y además que $N\beta \notin \Delta^+$ si $N > 1$, por la Proposición 2.1.6 (de donde $(x_\alpha^{N_\alpha} | x_\beta) = 0$).

Luego $(x_\alpha^{N_\alpha} | v) = 0$ para cada v en la base PBW. También $(I(V) | x_\alpha^{N_\alpha}) = 0$, pues $I(V)$ es el radical de la forma bilineal, con lo cual $(T(V) | x_\alpha^{N_\alpha}) = 0$, y así $x_\alpha^{N_\alpha} \in I(V)$: $x_\alpha^{N_\alpha} = 0$ en $\mathcal{B}(V)$.

Para el caso general, usamos nuevamente que toda trenza de tipo diagonal es equivalente por torcimiento a una trenza con matriz simétrica, ver [AS1, Theorem 4.5]. También usamos el isomorfismo lineal Ψ entre las álgebras de Nichols. Por el Lema 2.2.4, los correspondientes x_α 's están relacionados por un escalar no nulo. Así vale $x_\alpha^{N_\alpha} = 0$ en cualquier caso. \square

Antes de probar el teorema principal del capítulo, daremos otro lema técnico.

Lema 2.2.9. *Sea \mathcal{B} un cociente de $T(V)$ donde se verifican las relaciones (2.18). Entonces para cada $i < j$, $x_{\beta_i}x_{\beta_j}$ puede escribirse como combinación lineal de hiperpalabras monótonas mayores que x_{β_i} , cuyas hiperletras son x_{β_k} , $i \leq k \leq j$.*

Demostración. Se prueba de modo análogo al Teorema 1.7.6, ver [R2, Thm. 10]. Para cada $n \geq 2$ consideramos,

$$L_n := \{(x_{\beta_i}, x_{\beta_j}) : i < j, \ell(l_{\beta_i}) + \ell(l_{\beta_j}) = n\}.$$

Ordenamos L_k de la siguiente manera: $(x_{\beta_i}, x_{\beta_j}) < (x_{\beta_k}, x_{\beta_m})$ si $l_{\beta_i}l_{\beta_j} < l_{\beta_k}l_{\beta_m}$, o $l_{\beta_i}l_{\beta_j} = l_{\beta_k}l_{\beta_m}$ y $l_{\beta_i} < l_{\beta_k}$.

Probaremos el enunciado por inducción en $n = \ell(x_{\beta_i}) + \ell(x_{\beta_j})$, e inducción en el orden anterior de L_n . Si $n = 2$, β_i y β_j son simples, y $[x_i, x_j]_c = x_{\alpha_i + \alpha_j}$ o $[x_i, x_j]_c = 0$ en \mathcal{B} .

Fijemos un par $(x_{\beta_i}, x_{\beta_j}) \in L_n$ y asumamos que el enunciado vale para cada $(x_{\beta_k}, x_{\beta_m}) \in L_n$, $(x_{\beta_i}, x_{\beta_j}) > (x_{\beta_k}, x_{\beta_m})$, y para $(x_{\beta_k}, x_{\beta_m}) \in L_{n'}$, $n' < n$. Si $\text{Sh}(l_{\beta_i}l_{\beta_j}) = (l_{\beta_i}, l_{\beta_j})$ el enunciado vale porque

- si $l_{\beta_i} l_{\beta_j} = l_{\beta_k}$ para algún k , necesariamente (por la definición del orden) $i < k < j$, y $[x_{\beta_i}, x_{\beta_j}]_c = x_{\beta_k}$,
- si no, se sigue por la hipótesis: las relaciones (2.18) valen en este cociente.

Si $\text{Sh}(l_{\beta_i} l_{\beta_j}) \neq (l_{\beta_i}, l_{\beta_j})$, sea $\text{Sh}(l_{\beta_i}) = (l_{\beta_p}, l_{\beta_q})$, de donde $x_{\beta_i} = [x_{\beta_p}, x_{\beta_q}]_c$. Entonces $l_{\beta_q} < l_{\beta_j}$ (ver la Sección 1.7). Por (1.31),

$$[x_{\beta_i}, x_{\beta_j}]_c = [x_{\beta_p}, [x_{\beta_q}, x_{\beta_j}]_c]_c - \chi(\beta_p, \beta_q) x_{\beta_q} [x_{\beta_p}, x_{\beta_j}]_c + \chi(\beta_q, \beta_j) [x_{\beta_p}, x_{\beta_j}]_c x_{\beta_q}.$$

Usamos la hipótesis inductiva y expresamos $[x_{\beta_q}, x_{\beta_j}]_c$ como una combinación lineal de hiperpalabras monótonas cuyas hiperletras están entre x_{β_q} y x_{β_j} . Por (1.32) e hipótesis inductiva, podemos expresar $[x_{\beta_p}, [x_{\beta_q}, x_{\beta_j}]_c]_c$ como una combinación lineal de hiperpalabras monótonas cuyas letras están entre x_{β_i} y x_{β_j} . Es importante aquí el orden considerado en L_n , pues en tal combinación lineal puede aparecer una hiperletra x_{β_k} sola, que por hipótesis está entre x_{β_q} y x_{β_j} , de donde $(l_{\beta_i}, l_{\beta_j}) > (l_{\beta_p}, l_{\beta_k})$.

También usamos hipótesis inductiva para expresar $[x_{\beta_p}, x_{\beta_j}]_c$ como combinación lineal de hiperpalabras cuyas hiperletras están entre x_{β_p} y x_{β_j} . Como en el paso previo, podemos reordenar las hiperletras para obtener la expresión buscada, nuevamente por hipótesis inductiva. \square

Podemos entonces probar el principal resultado del capítulo.

Teorema 2.2.10. *Sea (V, c) un espacio vectorial trenzado de dimensión finita de tipo diagonal tal que Δ_+^V es finito. Sea x_1, \dots, x_θ un base de V tal que $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i$, donde $(q_{ij}) \in (\mathbf{k}^\times)^{\theta \times \theta}$ es la matriz de la trenza, y sea $\{x_{\beta_k}\}_{\beta_k \in \Delta_+^V}$ el conjunto de hiperletras asociado.*

Entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, \dots, x_θ , y relaciones

$$x_\beta^{N_\beta} = 0, \quad \beta \in \Delta_+^V, \quad \text{ord}(q_\beta) = N_\beta < \infty, \quad (2.21)$$

$$[x_{\beta_i}, x_{\beta_j}]_c = \sum_{u \in B_i \cap C_j - \{x_{\beta_j} x_{\beta_i}\}: \deg u = \beta_i + \beta_j} c_{i,j}^u u, \quad (2.22)$$

$$1 \leq i < j \leq M, \quad \text{Sh}(l_{\beta_i} l_{\beta_j}) = (l_{\beta_i}, l_{\beta_j}), \quad l_{\beta_i} l_{\beta_j} \neq l_{\beta_k}, \quad \forall k,$$

donde $c_{i,j}^u$ se definen en (2.17). Más aún, $\{x_{\beta_M}^{n_M} \cdots x_{\beta_1}^{n_1} : 0 \leq n_j < N_{\beta_j}\}$ es una base de $\mathcal{B}(V)$.

Observación 2.2.11. Recordemos que $N_{\beta_j} = \text{ord } q_{\beta_j}$ puede no estar definido, en cuyo caso consideramos $N_{\beta_j} = \infty$.

Demostración. El enunciado sobre la base sigue de la teoría de Kharchenko sobre bases PBW (ver la Sección 1.7), la definición de Δ_+^V (ver la Sección 1.7) y el Lema 2.2.8 (que nos define la altura de cada generador), donde las hiperletras x_{β_k} están unívocamente determinadas por el Corolario 2.1.18, para cada orden fijo en la base de V .

Sea $\mathcal{B} := T(V)/I$, donde I es el ideal de $T(V)$ generado por las relaciones (2.21), (2.22): por los Lemas 2.2.6 y 2.2.8, $I \subseteq I(V)$, de modo que la proyección $\pi : T(V) \rightarrow \mathcal{B}(V)$ induce canónicamente una proyección $\pi' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(V)$. Sea W el subespacio de \mathcal{B} generado por B , donde B es la base PBW de $\mathcal{B}(V)$, que identificamos en \mathcal{B} canónicamente; notar que $1 \in W$. Para cada par $1 \leq i < j \leq M$, llamamos $W_{i,j}$ al subespacio de W generado por $B_i \cap C_j$.

Afirmamos que

$$x_{\beta_k} W_{i,j} \subset W_{\min\{i,k\}, \max\{j,k\}}. \quad (2.23)$$

Lo probaremos por inducción en k . Si $k = M$, fijemos $i \leq j$. Para cada $w \in B_i \cap C_j$, tenemos que $x_{\beta_M} w \in B_i \cap C_M = B_i$, o $x_{\beta_M} w = 0$ si $j = M$, $N_M < \infty$ y w empieza con $x_{\beta_M}^{N_M-1}$, de donde $x_{\beta_M} W_{i,j} \subset W_{i,M}$.

Asumimos ahora que (2.23) vale para todo $l > k$, y todo $i \leq j$. Probemos por inducción en j que vale para k . Si $i \leq j \leq k$, para cada $w \in B_i \cap C_j$, se tiene que $x_{\beta_k} w \in B_i \cap C_k$ o $x_{\beta_k} w = 0$ como en el paso inicial, con lo cual $x_{\beta_k} W_{i,j} \subset W_{i,k}$. Consideremos entonces $j > k$, y $w \in B_i \cap C_j$; basta probar que $x_{\beta_k} w \in W_{\min\{i,k\}, j}$. Más aún, podemos asumir que $w = x_{\beta_j} w'$ para alguna hiperpalabra monótona w' en $W_{i,j}$ (si w comienza con otra hiperletra x_{β_l} , $l < j$, consideramos $w \in W_{i,l} \subset W_{i,j}$). Por el Lema 2.2.9, podemos escribir $x_{\beta_k} x_{\beta_j}$ como una combinación lineal de hiperpalabras monótonas cuyas hiperletras pertenecen a $B_k \cap C_j$. Luego el resultado es cierto por hipótesis inductiva: cualquiera de estas hiperpalabras no tiene letras x_{β_k} y usamos la primer hipótesis inductiva (es decir, que vale para $l > k$), o termina con hiperletras x_{β_k} y escribimos $x_{\beta_k} w'$ como una combinación lineal de hiperpalabras en $B_{\min\{i,k\}} \cap C_j$ de acuerdo a la segunda hipótesis inductiva.

De esta forma probamos que W es un ideal a izquierda que contiene a 1, de donde $W = \mathcal{B}$. En tal caso, la proyección π' es un isomorfismo, y $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V)$. \square

Observación 2.2.12. Recordemos que se ha definido para cada par $i \neq j \in \{1, \dots, \theta\}$,

$$m_{ij} := \max\{m : (\text{ad}_c x_i)^m x_j \neq 0\},$$

ver (2.6), y así $m\alpha_i + \alpha_j \in \Delta_+^V$ si y sólo si $0 \leq m \leq m_{ij}$. Más aún asumimos que $i < j$. Entonces $x_{m\alpha_i + \alpha_j} = (\text{ad}_c x_i)^m x_j$, y un par como en Corolario 2.2.7 es $(x_i, x_i^{m_{ij}} x_j)$, de modo que tal corolario implica las famosas relaciones cuánticas de Serre en $\mathcal{B}(V)$: $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0$. Si $i > j$, debemos cambiar el par por $(x_j x_i^{m_{ij}}, x_i)$, pero entonces $0 = [x_{m\alpha_i + \alpha_j}, x_i]_c = a(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j$ para cierto $a \in \mathbf{k}^\times$. En cualquier caso tenemos que

$$(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0.$$

Esto prueba que el conjunto de relaciones (2.18), (2.20) no es minimal: si $\text{ord } q_{ii} = m_{ij} + 1$, entonces $x_i^{m_{ij}+1}$ es una de las relaciones (2.20), y en dicho caso $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j$ pertenece al ideal generado por $x_i^{m_{ij}+1}$.

Observación 2.2.13. En el Capítulo 4 daremos el paso definitivo para obtener una buena presentación por generadores y relaciones, útil en los estudios posteriores de las álgebras de Nichols. La presentación del Teorema 2.2.10 nos da un conjunto completo que utilizaremos fuertemente para obtener una presentación explícita por generadores con un conjunto minimal de relaciones.

Capítulo 3

Sobre la clasificación de las álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita

En el presente capítulo introduciremos dos familias importantes de trenzas de tipo diagonal: las estándares, introducidas en [AA] y que incluyen propiamente a las de tipo Cartan, y las de tipo súper, consideradas en [AAY] y son aquéllas que admiten un sistema de raíces relacionado con una súper álgebra de Lie semisimple contragradiente de dimensión finita.

Tal clasificación está contenida en la clasificación de trenzas diagonales con sistema de raíces finito obtenida por Heckenberger en [H3], pero aquí describiremos estas familias de manera independiente, además de obtener bases PBW y una fórmula explícita para la dimensión. Un punto importante es que todas aquellas trenzas con componentes conexas de rango mayor o igual a 8 pertenecen a estas familias.

3.1. Clasificación de las trenzas de tipo estándar

En un trabajo reciente Heckenberger ha clasificado trenzas diagonales cuyo conjunto de generadores PBW es finito, ver [H3]. Las trenzas estándares forman una subfamilia particular que incluye propiamente a las trenzas de tipo Cartan.

Recordaremos primero la noción de trenza estándar presente en [AA]. Luego daremos su clasificación, además de una base PBW explícita y la dimensión, en caso que sea finita. Además compararemos estas familias con las presentes en [H3].

3.1.1. Trenzas de tipo estándar

Sea $E = (\alpha_1, \dots, \alpha_\theta)$ la base canónica de \mathbb{Z}^θ . Consideremos una matriz $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta} \in (\mathbf{k}^\times)^{\theta \times \theta}$ tal que $q_{ii} \neq 1$ para todo i , y fijemos para el resto de la sección la forma bilineal $\chi : \mathbb{Z}^\theta \times \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbf{k}^\times$ determinada según (1.29). Utilizaremos ahora la definición del grupoide de Weyl asociado a una trenza de tipo diagonal como en el comienzo de la Subsección 2.1.3.

Notemos algunos hechos simples que utilizaremos más adelante.

Observación 3.1.1. Sea $i \in \{1, \dots, \theta\}$ tal que $s_{i,E}$ está definida. Sea $F = s_{i,E}(E)$ y (\tilde{q}_{ij}) la matriz de trenza con respecto a F . Asumimos que

- $q_{ii} = -1$, con lo cual para cada $k \neq i$, $m_{ik} = 0$ si $q_{ik}q_{ki} = 1$, o $m_{ik} = 1$ si $q_{ik}q_{ki} \neq 1$;
- existe $j \neq i$ tal que $q_{jj}q_{ji}q_{ij} = 1$; o sea, $m_{ij} = m_{ji} = 1$.

Entonces $\tilde{q}_{jj} = -1$.

Demostración. Simplemente, $\tilde{q}_{jj} = q_{ii}q_{ij}q_{ji}q_{jj} = q_{ii} = -1$. □

Observación 3.1.2. Si para un i , los enteros $m_{ij}(F)$ satisfacen que $(q_{ii}^F)^{a_{ij}(F)} = q_{ij}^F q_{ji}^F$ para todo $j \neq i$, entonces $(q_{kj}^{s_i(F)})$ es la matriz traspuesta de (q_{kj}^F) y así las matrices de trenza son equivalentes por torcimiento. En consecuencia, $\Delta^{V_{s_i(F)}} = \Delta^{V_F}$.

Definición 3.1.3. [AA] Diremos que χ es *estándar* si para todo $F \in \mathcal{P}(\chi)$ y todo par $1 \leq r, j \leq \theta$, los enteros $m_{rj}(F)$ están definidos, y además $m_{rj}(F) = m_{rj}(s_{i,F}(F))$ para todo i . Claramente basta con asumir que lo anterior vale para la base canónica E .

Ejemplo 3.1.4. Un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal con matriz de trenza (q_{ij}) se dice de *tipo Cartan* si para cada par $i \neq j$ existen enteros $a_{ij} \leq 0$ tales que $q_{ij}q_{ji} = q_{ii}^{a_{ij}}$.

Notar que los a_{ij} están unívocamente determinados si pedimos que $a_{ij} > -\text{ord } q_{ii}$.

Tal familia de espacios trenzados aparece naturalmente como la trenza de las álgebras envolventes cuantizadas, y sus análogos de dimensión finita en el caso en que q_{ii} son raíces de la unidad. Notemos que un espacio vectorial de tipo Cartan es estándar, donde $m_{ij} = -a_{ij}$. Pero tal como veremos en la siguiente subsección, hay espacios trenzados de tipo estándar que no son de tipo Cartan.

Asumimos para lo que resta de la subsección que χ es estándar. Sea $C := (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{\theta \times \theta}$, donde $a_{ij} = -m_{ij}(F)$; C es una matriz generalizada de Cartan.

Sea $\alpha : W(\chi) \rightarrow GL(\theta, \mathbb{Z})$, $\alpha(s, F) = s$ si $(s, F) \in W(\chi)$, y denotemos por $W_0(\chi)$ al subgrupo generado por la imagen de α .

Proposición 3.1.5. [AA, Prop. 3.6] $W_0(\chi) = \langle s_{i,E} : 1 \leq i \leq \theta \rangle$. Más aún, $W_0(\chi)$ actúa libre y transitivamente en $\mathcal{P}(\chi)$. □

Así, $W_0(\chi)$ es un grupo de Coxeter; además, $W_0(\chi)$ y $\mathcal{P}(\chi)$ tienen el mismo cardinal.

Lema 3.1.6. [AA, Rem. 3.5, 3.7] Son equivalentes:

1. El grupoide $W(\chi)$ es finito.
2. El conjunto $\mathcal{P}(\chi)$ es finito.
3. El sistema de raíces generalizado $\Delta(\chi)$ es finito.
4. El grupo $W_0(\chi)$ es finito.

5. La matriz de Cartan C es simetrizable y de tipo finito. \square

Probaremos en el Teorema 3.2.1 que si $\Delta(\chi)$ es finito, entonces la matriz C es simetrizable, por lo tanto de tipo finito. Así, si $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita, la matriz de Cartan C es de tipo finito.

3.1.2. Clasificación de las trenzas de tipo estándares

Clasificaremos ahora trenzas estándares tales que la matriz de Cartan es de tipo finito. De acuerdo al Lema 1.8.2 podemos restringirnos a diagramas conexos. Comenzaremos con las trenzas de tipo C_θ , D_θ , E_l ($l = 6, 7, 8$) y F_4 , las cuales son necesariamente de tipo Cartan.

Proposición 3.1.7. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo estándar, $\theta = \dim V$, y $C = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, \theta\}}$ la correspondiente matriz de Cartan, de tipo C_θ, D_θ, E_l ($l = 6, 7, 8$) o F_4 . Entonces V es de tipo Cartan, asociado a la correspondiente matriz de tipo finito.*

Demostración. Sea V estándar de tipo C_θ , $\theta \geq 3$.

$$\circ^1 \text{ --- } \circ^2 \text{ --- } \circ^3 \text{ \dots } \circ^{\theta-2} \text{ --- } \circ^{\theta-1} \longleftarrow \circ^\theta \quad (3.1)$$

Notemos que $q_{\theta-1, \theta-1} \neq -1$ pues $m_{\theta-1, \theta} = 2$, ver la Observación 3.1.1. Como también $m_{\theta-1, \theta-2} = 1$, se tiene $q_{\theta-1, \theta-1} q_{\theta-1, \theta-2} q_{\theta-2, \theta-1} = 1$. Usando ahora la Observación 3.1.1 para $i = \theta - 2, j = \theta - 1$, como $\tilde{q}_{\theta-1, \theta-1} \neq -1$, al transformar por $s_{\theta-2}$ tenemos $q_{\theta-2, \theta-2} \neq -1$ (pues el espacio vectorial trenzado obtenido es también estándar), de donde

$$q_{\theta-2, \theta-2} q_{\theta-2, \theta-1} q_{\theta-1, \theta-2} = q_{\theta-2, \theta-2} q_{\theta-2, \theta-3} q_{\theta-3, \theta-2} = 1,$$

y así $q_{\theta-1, \theta-1} = q_{\theta-2, \theta-2}$. Inductivamente,

$$q_{kk} q_{k, k-1} q_{k-1, k} = q_{kk} q_{k, k+1} q_{k+1, k} = q_{11} q_{12} q_{21} = 1, \quad k = 2, \dots, \theta - 1$$

y así $q_{11} = q_{22} = \dots = q_{\theta-1, \theta-1}$. Miramos entonces $q_{\theta\theta}$: como $m_{\theta, \theta-1} = 1$, se verifica que $q_{\theta\theta} = -1$ o $q_{\theta\theta} q_{\theta, \theta-1} q_{\theta-1, \theta} = 1$. Asumimos que $q_{\theta\theta} = -1$ (pues en otro caso es claro que es de tipo Cartan), y transformemos por s_θ , de modo que tenemos

$$\tilde{q}_{\theta-1, \theta-1} = -q^{-1}, \quad \tilde{q}_{\theta-1, \theta} \tilde{q}_{\theta, \theta-1} = q^2,$$

y como $m_{\theta-1, \theta-2} = 1$, deducimos que $q^2 = -1$. Luego,

$$q_{\theta\theta} q_{\theta, \theta-1} q_{\theta-1, \theta} = 1, \quad q_{\theta\theta} = q^2,$$

y la trenza es de tipo Cartan en ambos casos.

Sea V estándar de tipo D_θ , $\theta \geq 4$.

$$\begin{array}{ccccccc} \circ^1 & \text{---} & \circ^2 & \text{---} & \circ^3 & \text{\dots} & \circ^{\theta-2} & \text{---} & \circ^\theta \\ & & & & & & & & \circ_{\theta-1} \\ & & & & & & & & | \\ & & & & & & & & \circ_{\theta-1} \end{array} \quad (3.2)$$

Probaremos el enunciado por inducción en θ . Para $\theta = 4$, supongamos que $q_{22} = -1$. Sea (\tilde{q}_{ij}) la matriz de trenza con respecto a $F = s_{2,E}(E)$. Calculamos para cada par $j \neq k \in \{1, 3, 4\}$:

$$\tilde{q}_{jk}\tilde{q}_{kj} = ((-1)q_{2k}q_{j2}q_{jk})((-1)q_{2j}q_{k2}q_{kj}) = (q_{2k}q_{k2})(q_{2j}q_{j2}),$$

donde usamos que $q_{jk}q_{kj} = 1$. Como también $\tilde{q}_{jk}\tilde{q}_{kj} = 1$, deducimos que $q_{2k}q_{k2} = (q_{2j}q_{j2})^{-1}$, si $j \neq k$, de donde $q_{2k}q_{k2} = -1$, $k = 1, 3, 4$, pues $q_{2k}q_{k2} \neq 1$. En tal caso, la trenza es de tipo Cartan, con $q = -1$. Supongamos que $q_{22} \neq -1$. Como $m_{2j} = 1$, tenemos que

$$q_{22}q_{2j}q_{j2} = 1, \quad j = 1, 3, 4.$$

Para cada j , aplicando la Observación 3.1.1 y el hecho que $\tilde{q}_{22} \neq -1$, deducimos que $q_{jj} \neq -1$, de donde $q_{jj}q_{2j}q_{j2} = 1$, $j = 1, 3, 4$, y la trenza es de tipo Cartan.

Supongamos ahora que vale el enunciado para θ . Sea V un espacio vectorial trenzado estándar de tipo $D_{\theta+1}$. El subespacio generado por $x_2, \dots, x_{\theta+1}$ es un espacio vectorial trenzado estándar asociado a la matriz $(q_{ij})_{i,j=2,\dots,\theta+1}$, de tipo D_θ , con lo cual es de tipo Cartan. Para terminar, aplicamos la Observación 3.1.1 para $i = 1, j = 2$, y obtenemos que V es de tipo Cartan con $q = -1$, o si $q_{22} \neq -1$, tenemos que $q_{11} \neq -1$, $q_{11}q_{12}q_{21} = 1$, en cuyo caso también es de tipo Cartan (porque $q_{1k}q_{k1} = 1$ si $k > 2$).

Sea V estándar de tipo E_6 . Notemos que 1, 2, 3, 4, 5 determinan un subespacio trenzado estándar, que es de tipo D_5 , de donde es de tipo Cartan. Luego probamos que $q_{66}q_{65}q_{56} = 1$ por medio de la Observación 3.1.1 como antes.

$$\begin{array}{cccccc} \circ^1 & \text{---} & \circ^2 & \text{---} & \circ^3 & \text{---} & \circ^5 & \text{---} & \circ^6 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \circ^4 & & & & \end{array} \quad (3.3)$$

Sea V estándar de tipo E_7 o E_8 . Como antes podemos reducir al caso E_6 , respectivamente E_7 , y usar la Observación 3.1.1 para el extremo restante.

$$\begin{array}{cccccc} \circ^1 & \text{---} & \circ^2 & \text{---} & \circ^3 & \text{---} & \circ^4 & \text{---} & \circ^6 & \text{---} & \circ^7 \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & \circ^5 & & & & \end{array} \quad (3.4)$$

$$\begin{array}{cccccc} \circ^1 & \text{---} & \circ^2 & \text{---} & \circ^3 & \text{---} & \circ^4 & \text{---} & \circ^5 & \text{---} & \circ^7 & \text{---} & \circ^8 \\ & & & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & & & \circ^6 & & & & & & \end{array} \quad (3.5)$$

Sea V estándar de tipo F_4 . Los vértices 2, 3, 4 determinan un subespacio trenzado estándar, que es de tipo C_3 , por lo cual ese subespacio es de tipo Cartan. Sea (\tilde{q}_{ij}) la matriz de trenza con respecto a $F = s_{2,E}(E)$. Como $\tilde{q}_{13}\tilde{q}_{31} = 1$ y $q_{22}q_{23}q_{32} = 1$, tenemos que $q_{22}q_{12}q_{21} = 1$.

$$\circ^1 \text{ --- } \circ^2 \implies \circ^3 \text{ --- } \circ^4 \quad (3.6)$$

Supongamos entonces que $q_{11} = -1$, y apliquemos la Observación 3.1.1, de donde obtenemos que $q_{22} = -1 = q_{21}q_{12}$, en cuyo caso tenemos un espacio trenzado de tipo Cartan F_4 asociado a $q \in \mathbb{G}_4 \setminus \{\pm 1\}$. Si $q_{11} \neq -1$, entonces $q_{11}q_{12}q_{21} = 1$, y también es de tipo Cartan. \square

Para finalizar la clasificación de las trenzas estándares, describiremos aquellas trenzas estándares que no son de tipo Cartan. Tales trenzas están asociadas a matrices de Cartan de tipo A_θ , B_θ o G_2 . Recordemos la notación utilizada en la Sección 1.8.

Proposición 3.1.8. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal. V es estándar de tipo A_θ si y sólo si su diagrama de Dynkin generalizado es de la forma:*

$$\mathcal{C}(\theta, q; i_1, \dots, i_j). \quad (3.7)$$

Notemos que dicha trenza es de tipo Cartan si y sólo si $j = 0$, o $j = n$ y $q = -1$.

Demostración. Sea V un espacio vectorial trenzado estándar de tipo A_θ . Para cada vértice $1 < i < \theta$ tenemos que $q_{ii} = -1$ o $q_{ii}q_{i,i-1}q_{i-1,i} = q_{ii}q_{i,i+1}q_{i+1,i} = 1$, y además tenemos las correspondientes fórmulas para $i = 1, \theta$. Supongamos que $1 < i < \theta$ y $q_{ii} = -1$. Transformando la trenza según s_i obtenemos

$$\tilde{q}_{i-1,i+1} = -q_{i,i+1}q_{i-1,i}q_{i-1,i+1}, \quad \tilde{q}_{i+1,i-1} = -q_{i,i-1}q_{i+1,i}q_{i+1,i-1},$$

y usando que $m_{i-1,i+1} = \tilde{m}_{i-1,i+1} = 0$ (pues la trenza es estándar), tenemos que $q_{i-1,i+1}q_{i+1,i-1} = 1$ y $\tilde{q}_{i-1,i+1}\tilde{q}_{i+1,i-1} = 1$, con lo cual deducimos que $q_{i,i+1}q_{i+1,i} = (q_{i,i-1}q_{i-1,i})^{-1}$. Luego la matriz (q_{ij}) tiene un diagrama de Dynkin generalizado de la forma (3.7).

Ahora, consideramos un espacio trenzado V de la forma (3.7). Asumimos que $q_{ii} = q^{\pm 1}$; si transformamos la trenza por s_i , entonces el espacio vectorial trenzado V_i es equivalente por torcimiento a V por la Observación 3.1.2. Luego, $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}$.

Asumimos ahora que $q_{ii} = -1$. Si transformamos la trenza por s_i y calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{jj} &= (-1)^{m_{ij}^2} (q_{ij}q_{ji})^{m_{ij}} q_{jj} \\ &= \begin{cases} q_{jj}, & |j-i| > 1; \\ (-1)q^{\mp 1}q^{\pm 1} = -1, & j = i \pm 1, q_{jj} = q^{\pm 1}; \\ (-1)q^{\pm 1}(-1) = q^{\pm 1}, & j = i \pm 1, q_{jj} = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

También, $\tilde{q}_{ij}\tilde{q}_{ji} = q_{ij}q_{ji}$ si $|j-i| > 1$, $\tilde{q}_{ij}\tilde{q}_{ji} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1}$ si $|j-i| = 1$, y

$$\tilde{q}_{kj}\tilde{q}_{jk} = (q_{ik}q_{ki})^{m_{ij}} (q_{ij}q_{ji})^{m_{ik}} q_{kj}q_{jk} = \begin{cases} q_{kj}q_{jk} & |j-i| \text{ o } |k-i| > 1, \\ 1 & j = i-1, k = i+1. \end{cases}$$

Entonces V_i tiene una trenza de la forma anterior, y $(-m_{ij})$ también corresponde a una matriz de Cartan finita de tipo A_θ , con lo cual la trenza (3.7) es estándar de tipo A_θ . Luego, hemos obtenido la familia de todas las trenzas estándares de tipo A_θ . \square

Proposición 3.1.9. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal. Entonces V es estándar de tipo B_θ si y sólo si su diagrama de Dynkin generalizado es uno de los siguientes:*

$$(a) \circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ \zeta, \text{ donde } \zeta \in \mathbb{G}_3, q \in \mathbf{k} \setminus \{0, 1, -1, \zeta, \zeta^2\} \ (\theta = 2);$$

$$(b) \left(C(\theta - 1, q^2; i_1, \dots, i_j) \right) \xrightarrow{q^{-2}} \circ^q, \text{ donde } \theta \in \mathbb{N}, q \in \mathbf{k}^\times \setminus \{\pm 1\};$$

(c) $\left(\overline{C(\theta - 1, -\zeta^2; i_1, \dots, i_j)}\right) \xrightarrow{-\zeta} \circ \zeta$, donde $\theta \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \mathbb{G}_3$.

Notemos que una trenza como antes es de tipo Cartan si y sólo si es del tipo (b) con $j = 0$.

Demostración. Consideremos primero el caso $\theta = 2$. O sea, V es estándar de tipo B_2 . Para ello analizamos las distintas posibilidades:

- $q_{11}^2 q_{12} q_{21} = q_{22} q_{21} q_{12} = 1$: dicha trenza es de tipo Cartan, con $q = q_{11}$, donde se debe tener $q \neq -1$. Tal trenza corresponde al caso (b) con $\theta = 2$, $j = 0$.

- $q_{11}^2 q_{12} q_{21} = 1$, $q_{22} = -1$. Transformando la trenza por s_2 tenemos que

$$\tilde{q}_{11} = -q_{11}^{-1}, \quad \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = q_{12}^{-1} q_{21}^{-1}.$$

Así $\tilde{q}_{11}^2 \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = 1$. Tal trenza corresponde también a (b) pero con $j = 1$.

- $q_{11} \in \mathbb{G}_3$, $q_{22} q_{21} q_{12} = 1$. Ahora transformemos la trenza por s_1 ,

$$\tilde{q}_{22} = q_{11} q_{12} q_{21}, \quad \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = q_{11}^2 q_{12}^{-1} q_{21}^{-1}.$$

Así, $\tilde{q}_{22} \tilde{q}_{21} \tilde{q}_{12} = 1$, lo cual corresponde al caso (a).

- $q_{11} \in \mathbb{G}_3$, $q_{22} = -1$: transformando la trenza por s_1 ,

$$\tilde{q}_{22} = -q_{12}^2 q_{21}^2 q_{11}, \quad \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = q_{11}^2 q_{12}^{-1} q_{21}^{-1}.$$

Si transformamos por s_2 tenemos que

$$\tilde{q}_{11} = -q_{12} q_{21} q_{11}, \quad \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = q_{12}^{-1} q_{21}^{-1}.$$

Luego, $q_{12} q_{21} = \pm q_{11}$, donde el caso $q_{12} q_{21} = q_{11}$ fue considerado antes. Entonces estamos en el caso (c) con $j = 0$.

Recíprocamente, todas las trenzas (a), (b) y (c) son estándares de tipo B_2 .

Sea ahora V estándar de tipo B_θ , donde $\theta \geq 3$. Notemos que los primeros $\theta - 1$ vértices determinan una trenza estándar de tipo $A_{\theta-1}$, y los últimos dos vértices determinan una trenza estándar de tipo B_2 ; así debemos pegar los posibles diagramas de Dynkin generalizados. Los casos posibles son (b), (c) de la Proposición, y además

$$\left(\overline{C(\theta - 2, q; i_1, \dots, i_j)}\right) \xrightarrow{q^{-1}} \circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{G}_3, q \in \mathbf{k} \setminus \{0, 1, -1, \zeta, \zeta^2\}.$$

Para este último diagrama de Dynkin generalizado, si transformamos por s_θ , obtenemos

$$\tilde{q}_{\theta-1, \theta-1} = \zeta q^{-1}, \quad \tilde{q}_{\theta-1, \theta-2} \tilde{q}_{\theta-2, \theta-1} = q^{-1},$$

de donde $1 = \tilde{q}_{\theta-1, \theta-1} \tilde{q}_{\theta-1, \theta-2} \tilde{q}_{\theta-2, \theta-1}$, y así tenemos $q = \pm \zeta^{-1}$, o sea $\tilde{q}_{\theta-1, \theta-1} = -1$. Así, $q = -\zeta^{-1}$ o $q = -1$, de modo que es de la forma anterior.

Para probar que (b), (c) son efectivamente trenzas estándares, usamos el siguiente hecho: si $m_{ij} = 0$ (o sea, $q_{ij} q_{ji} = 1$) y transformamos por s_i , entonces

$$\tilde{q}_{jj} = q_{jj}, \quad \tilde{q}_{jk} \tilde{q}_{kj} = q_{jk} q_{kj} \quad (k \neq i).$$

Así, si $|i - j| > 1$, entonces $m_{ij} = 0$; si $j = i \pm 1$, usamos el hecho que el subdiagrama determinado por estos dos vértices es estándar de tipo B_2 o de tipo A_2 . Así hemos obtenido la familia de todas las trenzas estándares de tipo B_θ . \square

Proposición 3.1.10. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal. Entonces V es estándar de tipo G_2 si y sólo si su diagrama de Dynkin generalizado es uno de los siguientes:*

(a) $\circ^q \xrightarrow{q^{-3}} \circ^{q^3}$, donde $\text{ord } q \geq 4$;

(b) para algún $\zeta \in \mathbb{G}_8$ se tiene

(i) $\circ^{\zeta^2} \xrightarrow{\zeta} \circ^{\zeta^{-1}}$, o

(ii) $\circ^{\zeta^2} \xrightarrow{\zeta^3} \circ^{-1}$, o

(iii) $\circ^{\zeta} \xrightarrow{\zeta^5} \circ^{-1}$.

Notemos que una trenza como antes es de tipo Cartan si y sólo si es como en (a).

Demostración. Sea V trenzado, con trenza estándar de tipo G_2 . Tenemos cuatro casos posibles:

- $q_{11}^3 q_{12} q_{21} = 1$, $q_{22} q_{21} q_{12} = 1$: tal trenza es de tipo Cartan, como en (a), donde $q = q_{11}$. Notemos que si q es una raíz de la unidad, entonces $\text{ord } q \geq 4$, pues $m_{12} = 3$.
- $q_{11}^3 q_{12} q_{21} = 1$, $q_{22} = -1$: transformemos la trenza por s_2 ,

$$\tilde{q}_{11} = -q_{11}^{-2}, \quad \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = q_{12}^{-1} q_{21}^{-1}.$$

Si $1 = \tilde{q}_{11}^3 \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = -q_{11}^{-3}$, entonces $q_{12} q_{21} = -1$, y la trenza es de tipo Cartan con $q_{11} \in \mathbb{G}_6$. En otro caso, $1 = \tilde{q}_{11}^4 = q_{11}^{-8}$ y así $\text{ord } \tilde{q}_{11} = 4$, $\text{ord } q_{11} = 8$. Entonces la trenza puede expresarse como en (b)-(iii).

- $q_{11} \in \mathbb{G}_4$, $q_{22} q_{21} q_{12} = 1$: transformamos ahora la trenza por s_1 ,

$$\tilde{q}_{22} = q_{11} q_{12}^2 q_{21}^2, \quad \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = -q_{12}^{-1} q_{21}^{-1}.$$

Si $1 = \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{21} \tilde{q}_{12} = -q_{11} q_{12} q_{21}$, deducimos que $q_{11}^3 q_{12} q_{21} = 1$, porque $q_{11}^2 = -1$, y tal trenza es de tipo Cartan. Consideramos entonces el caso $-1 = \tilde{q}_{22} = q_{11} q_{12}^2 q_{21}^2$, para el cual tenemos $q_{22}^2 = q_{11}^{-1}$ y $q_{22} \in \mathbb{G}_8$. Luego obtenemos la trenza de la forma (b)-(i).

- $q_{11} \in \mathbb{G}_4$, $q_{22} = -1$: transformamos la trenza por s_2 ,

$$\tilde{q}_{11} = -q_{12} q_{21} q_{11}, \quad \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = q_{12}^{-1} q_{21}^{-1}.$$

Si $\tilde{q}_{11} \in \mathbb{G}_4$, entonces $(q_{12} q_{21})^4 = 1$. Además, $q_{12} q_{21} \notin \{1, q_{11}^{-1}, q_{11}^{-2}\}$ porque $m_{12} = 3$. Así, $q_{12} q_{21} = -1$ o $q_{12} q_{21} = q_{11} = q_{11}^{-3}$, y tales casos fueron considerados antes. Por lo tanto analizamos el caso

$$1 = \tilde{q}_{11}^3 \tilde{q}_{12} \tilde{q}_{21} = q_{11} q_{12}^2 q_{21}^2,$$

para el cual podemos expresar la trenza en la forma (b)-(ii) para algún $\zeta \in \mathbb{G}_8$.

Un cálculo simple prueba que tales trenzas son estándares de tipo G_2 , y por lo tanto son todas las trenzas estándares de tal tipo. \square

Resumiendo, el principal resultado de esta Sección es:

Teorema 3.1.11. *Cualquier espacio trenzado estándar es equivalente por torcimiento a uno de los siguientes:*

- una trenza de tipo Cartan,
- una trenza de tipo A_θ como en la Proposición 3.1.8,
- una trenza de tipo B_θ como en la Proposición 3.1.9,
- una trenza de tipo G_2 como en la Proposición 3.1.10.

Los diagramas de Dynkin generalizados que aparecen en las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.9 de rango arbitrario corresponden a las filas 1,2,3 de la *Tabla 4*. También, el diagrama de rango 2 de tipo B_2 y los diagramas de Dynkin generalizados de la Proposición 3.1.10 son, respectivamente, las filas 5, 10, 11 de la *Tabla 1*. Sin embargo, nuestra clasificación no depende de [H3].

3.2. Álgebras de Nichols con trenza estándar

En esta sección estudiamos las álgebras de Nichols asociados a trenzas estándares. Asumiremos como en la sección previa que los diagramas de Dynkin diagram asociados son conexos. En la subsección 3.2.1 probaremos que el conjunto Δ_+^V está en biyección con Δ_+^C , el conjunto de raíces positivas de la matriz de Cartan de tipo finito C . Describiremos luego un conjunto de generadores PBW explícitamente, de acuerdo al Corolario 2.1.18. En la siguiente subsección, calcularemos la dimensión del álgebra de Nichols asociada a cada espacio trenzado estándar, caso por caso.

3.2.1. Bases PBW de álgebras de Nichols con trenza estándar

Con el siguiente teorema extendemos [H1, Theorem 1], que vale para trenzas de tipo Cartan, al caso en que la trenza es estándar.

Teorema 3.2.1. *Sea V un espacio vectorial trenzado estándar con matriz de Cartan C . Son equivalentes:*

1. *El conjunto Δ^V es finito.*
2. *La matriz de Cartan C es simetrizable y de tipo finito.*

Demostración. Dado que asumimos que V es estándar, el conjunto Δ^V contiene al conjunto de raíces reales Δ^C de la matriz C , ver la Observación 2.1.3, si identificamos las correspondientes raíces simples. Así, si C no es simetrizable o no es de tipo finito, el conjunto de raíces reales es infinito, de acuerdo a la clasificación de los grupos de Coxeter finitos, y así Δ^V es infinito.

Por otro lado, sea C simetrizable y de tipo finito. Luego el conjunto de raíces reales es finito. Sea $\alpha \in \Delta(\mathcal{B}(V))$, y sea $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, \theta\}$ una sucesión de enteros tales que $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ es el elemento de longitud máxima en $W_0(\chi)$. Dado que todas las raíces son positivas o negativas, existe $l \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\beta = s_{i_{l+1}} \cdots s_{i_k}(\alpha)$ es positiva y $s_{i_l}(\beta)$ es negativa. Pero entonces $\beta = \alpha_{i_l}$, y $\alpha = s_{i_k} \cdots s_{i_{l+1}}(\alpha_{i_l})$ es una raíz real. Luego, Δ^V es finito. \square

Corolario 3.2.2. *Sea V un espacio vectorial trenzado estándar, $\theta = \dim V$, y $C = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, \theta\}}$ la correspondiente matriz de Cartan de tipo finito. Entonces*

(a) $\Delta^C = \Delta^V$.

(b) *La multiplicidad de cada raíz en Δ^V es 1.*

Demostración. (a) sigue directamente de la prueba del Teorema anterior, o de observar que en consecuencia cada raíz es real.

(b) se deduce también del hecho que cada raíz es real, y vale en general para tal situación, pues cada raíz α_i es de multiplicidad uno, y la multiplicidad se preserva por las simetrías s_k . \square

Fijaremos en cada caso un orden en las raíces simples. De acuerdo al Corolario 3.2.2, obtenemos una palabra de Lyndon por cada raíz positiva asociada a la correspondiente matriz de Cartan. Hallaremos dichas palabras recursivamente usando la relación (2.8), a partir de las raíces simples.

Tipo A_θ : Considerando la numeración de los vértices de (1.36), las raíces son de la forma

$$\mathbf{u}_{i,j} := \sum_{k=i}^j \alpha_k, \quad 1 \leq i \leq j \leq \theta. \quad (3.8)$$

Por inducción en $s = j - i$, veremos que $l_{\mathbf{u}_{i,j}} = x_i x_{i+1} \dots x_j$. El caso $s = 0$, es decir $i = j$, es trivial, pues la única posibilidad es $l_{\mathbf{u}_{i,i}} = x_i$. Ahora, si $j - i > 0$, podemos escribir $\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,k} + \mathbf{u}_{k,j}$, para cada $k \in \{i, i+1, \dots, j\}$; por hipótesis inductiva $l_{\mathbf{u}_{i,k}} = x_i x_{i+1} \dots x_k$ y $l_{\mathbf{u}_{k,j}} = x_k x_{i+1} \dots x_j$, y todas las descomposiciones dan lugar a la misma palabra de Lyndon: $l_{\mathbf{u}_{i,j}} = x_i x_{i+1} \dots x_j$, con descomposición de Shirshov $(x_i, x_{i+1} \dots x_j)$.

Tipo B_θ : Consideramos la siguiente numeración de los vértices:

$$\circ^1 \text{ --- } \circ^2 \dots \quad \circ^{\theta-2} \text{ --- } \circ^{\theta-1} \implies \circ^\theta. \quad (3.9)$$

En tal caso, las raíces son $\mathbf{u}_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq \theta$, y

$$\mathbf{v}_{i,j} := \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k + 2 \sum_{k=j}^{\theta} \alpha_k = \mathbf{u}_{i,\theta} + \mathbf{u}_{j,\theta}, \quad 1 \leq i < j \leq \theta. \quad (3.10)$$

En el primer caso, se obtienen las mismas palabras de Lyndon que antes, $l_{\mathbf{u}_{i,j}} = x_i x_{i+1} \dots x_j$. En el segundo caso, para $j = \theta$, se obtiene descendiendo por inducción en i que

$$l_{\mathbf{v}_{\theta-1,\theta}} = x_{\theta-1} x_\theta x_\theta, \quad l_{\mathbf{v}_{i,\theta}} = x_i l_{\mathbf{v}_{i+1,\theta}} \quad (i < \theta - 1).$$

Luego, descendiendo en j obtenemos que $l_{\mathbf{v}_{i,j}} = l_{\mathbf{v}_{i,j+1}} x_j$, para cada $i < j < \theta$.

Tipo C_θ : Consideramos una numeración en los vértices como en (3.1). En tal caso las raíces son de dos tipos, $\mathbf{u}_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq \theta$, o

$$\mathbf{w}_{i,j} := \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k + 2 \sum_{k=j}^{\theta-1} \alpha_k + \alpha_\theta, \quad 1 \leq i \leq j < \theta. \quad (3.11)$$

Como antes, $l_{\mathbf{u}_{i,j}} = x_i x_{i+1} \dots x_j$. Para las restantes raíces, notemos que

$$\mathbf{w}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,\theta} + \mathbf{u}_{j,\theta-1} = \mathbf{w}_{i,k} + \mathbf{u}_{j,k} = \mathbf{w}_{j,k} + \mathbf{u}_{i,k} = \mathbf{w}_{i,l} + \mathbf{u}_{l,j}, \quad i \leq l \leq j \leq k.$$

Para $i < j$, nuevamente descendiendo por inducción en j obtenemos que $l_{\mathbf{w}_{i,\theta-1}} = l_{\mathbf{u}_{i,\theta}} x_{\theta-1}$,

$$l_{\mathbf{w}_{i,j}} = l_{\mathbf{w}_{i,j+1}} x_j = x_i x_{i+1} \dots x_{\theta-1} x_{\theta} x_{\theta-1} \dots x_j, \quad j < \theta - 1.$$

Luego, cuando $i = j$ obtenemos que

$$l_{\mathbf{w}_{i,i}} = l_{\mathbf{u}_{i,\theta-1}} l_{\mathbf{u}_{i,\theta}} = x_i x_{i+1} \dots x_{\theta-1} x_i x_{i+1} \dots x_{\theta-1} x_{\theta}.$$

Tipo D_{θ} : de modo análogo, numeramos los vértices como en (3.2), en cuyo caso las raíces son de tres tipos, $\mathbf{u}_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq \theta$, o

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_i &:= \sum_{k=i}^{\theta-2} \alpha_k + \alpha_{\theta}, & 1 \leq i \leq \theta - 2, \\ \mathbf{z}_{i,j} &:= \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k + 2 \sum_{k=j}^{\theta-2} \alpha_k + \alpha_{\theta-1} + \alpha_{\theta}, & i < j \leq \theta - 2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como antes, $l_{\mathbf{u}_{i,j}} = x_i x_{i+1} \dots x_j$ si $j \leq \theta - 1$. Para las raíces de tipo $\bar{\mathbf{u}}_i$, si $i = \theta - 2$ está unívocamente determinada: $l_{\bar{\mathbf{u}}_{\theta-2}} = x_{\theta-2} x_{\theta}$; luego por una inducción análoga a la que se aplica para $l_{\mathbf{u}_{i,j}}$ obtenemos que $l_{\bar{\mathbf{u}}_i} = x_i l_{\bar{\mathbf{u}}_{i+1}} = x_i x_{i+1} \dots x_{\theta-2} x_{\theta}$, si $i < \theta - 2$.

Para hallar $l_{\mathbf{u}_{i,\theta}}$, debemos notar que $\alpha_{\theta-1} + \alpha_{\theta} \notin \Delta_+^C$. Además, las posibles descomposiciones de $\mathbf{u}_{i,\theta}$ como suma de dos raíces positivas son:

$$\mathbf{u}_{i,\theta} = \mathbf{u}_{i,\theta-1} + \alpha_{\theta} = \bar{\mathbf{u}}_{i,\theta} + \alpha_{\theta-1} = \mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_j, \quad i \leq j \leq \theta - 2.$$

Luego deducimos que, entre tales opciones, $l_{\mathbf{u}_{\theta-2,\theta}} = l_{\bar{\mathbf{u}}_{\theta-2}} x_{\theta-1}$, y si $i < \theta - 2$,

$$l_{\mathbf{u}_{i,\theta}} = x_i l_{\mathbf{u}_{i+1,\theta}} = x_i \dots x_{\theta-2} x_{\theta} x_{\theta-1}.$$

Para las restantes raíces, si $i = \theta - 3$, $j = \theta - 2$, tenemos $\mathbf{z}_{\theta-3,\theta-2} = l_{\mathbf{u}_{\theta-3,\theta}} x_{\theta}$. Además, analizando las posibles expresiones de $\mathbf{z}_{i,\theta-2}$ como suma de dos raíces, deducimos inductivamente que

$$l_{\mathbf{z}_{i,\theta-2}} = x_i l_{\mathbf{z}_{i+1,\theta-2}} = x_i \dots x_{\theta-2} x_{\theta} x_{\theta-1} x_{\theta-2}, \quad i < \theta - 3.$$

Luego, descendiendo por inducción en j obtenemos que

$$l_{\mathbf{z}_{i,j}} = x_i l_{\mathbf{z}_{i+1,j}} = x_i \dots x_{\theta-2} x_{\theta} x_{\theta-1} x_{\theta-2} \dots x_j.$$

Tipo E_6 : Consideramos la numeración en los vértices de (3.3). Notemos que si $\alpha = \sum_{j=1}^6 a_j \alpha_j$ y $a_6 = 0$, entonces dicha raíz corresponde al subdiagrama de Dynkin de tipo D_5 determinado por $1, 2, 3, 4, 5$, y obtenemos las correspondientes l_{α} como antes.

Si $a_1 = 0$, α se corresponde a una raíz del subdiagrama de Dynkin de tipo D_5 determinado por $2, 3, 4, 5, 6$ – con el cuidado que la numeración es diferente a la dada en 3.2. En cualquier caso, las raíces quedan definidas de modo similar, y obtenemos la misma lista que [LaR, Fig.1] – en dicho

trabajo se hallan bases PBW con palabras de Lyndon para álgebras envolventes de álgebras de Lie simples. Si $a_4 = 0$, α corresponde a una raíz del subdiagrama de Dynkin de tipo A_5 determinado por 1, 2, 3, 5, 6.

Así nos restringimos a hallar l_α para aquellas $\alpha \in \Delta_+^C$ tales que $a_i \neq 0$, para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Consideraremos cada caso, escribiremos a α como todas las posibles sumas de dos raíces y hallaremos la correspondiente palabra de Lyndon inductivamente, usando (2.8). Así tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_2. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_2x_4. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_2x_4x_3. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_2x_4x_5. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_2x_4x_5x_3. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_2x_4x_5x_3x_4. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_2x_4x_5x_3x_4x_2.
\end{aligned}$$

Tipo E_7 : Nuevamente miramos la numeración dada antes, más exactamente en (3.4). De modo análogo, si $\alpha = \sum_{j=1}^7 a_j \alpha_j$ y se tiene $a_7 = 0$, la raíz corresponde al subdiagrama de Dynkin de tipo D_6 determinado por 1, 2, 3, 4, 5, 6, y l_α se obtiene como antes. Si $a_1 = 0$, la raíz corresponde al subdiagrama de tipo E_6 determinado por 2, 3, 4, 5, 6, 7, y si $a_5 = 0$, α corresponde al subdiagrama de tipo A_6 determinado por 1, 2, 3, 4, 6, 7; todos estos casos ya fueron estudiados.

Así, nos restringimos a hallar l_α cuando $a_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, e inductivamente hallamos, a partir de (2.8):

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_3. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_3. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_3x_4. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_3x_4x_2. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_6. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_6x_3. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_6x_3x_4. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_6x_3x_4x_2. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_6x_3x_4x_5. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_6x_3x_4x_5x_2. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_6x_3x_4x_5x_2x_4. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_7x_2x_4x_5x_6x_3x_4x_5x_2x_4x_3. \\
\alpha = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 : & \quad l_\alpha = x_1x_3x_4x_5x_6x_2x_4x_5x_3x_4x_2x_1x_3x_4x_5x_6x_7.
\end{aligned}$$

Tipo E_8 : Siguiendo el mismo esquema, consideramos la numeración de los vértices de (3.5), y

las raíces positivas escritas como $\alpha = \sum_{j=1}^8 a_j \alpha_j$; si $a_8 = 0$, la raíz corresponde al subdiagrama de tipo D_7 determinado por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Si $a_1 = 0$, la raíz corresponde al subdiagrama de tipo E_7 determinado por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Si $a_6 = 0$, entonces α corresponde al subdiagrama de tipo A_7 determinado por 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8. Para todos estos casos ya vimos cuáles son las l_α 's correspondientes

Así resta considerar aquellos casos en que $a_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, los cuales resolvemos inductivamente caso por caso como lo hicimos para E_7 . Como antes, la lista de palabras obtenidas es la misma que en [LaR, Fig.1]

Tipo F_4 : Miramos la numeración fijada en (3.6), y escribimos $\alpha = \sum_{j=1}^4 a_j \alpha_j$. De modo análogo, si $a_4 = 0$, la raíz corresponde al subdiagrama de tipo B_3 determinado por 1, 2, 3. Si $a_1 = 0$, α corresponde al subdiagrama de tipo C_3 determinado por 2, 3, 4. Ambos casos ya fueron considerados, y ya conocemos las correspondientes palabras de Lyndon.

Consideramos entonces aquellos casos en que $a_i \neq 0$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$, y las hallamos como antes de modo inductivo vía (2.8):

$$\begin{array}{ll}
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_2. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_2 x_3. \\
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_4. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_4 x_2. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_4 x_2 x_3. \\
\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_4 x_2 x_3^2. \\
\alpha = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_4 x_2 x_3^2 x_2. \\
\alpha = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_2.
\end{array}$$

Tipo G_2 : en este caso, $\Delta_+^C = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$, y usando la numeración

$$o^1 \Longrightarrow o^2 \tag{3.13}$$

todas las palabras excepto una son las únicas palabras de Lyndon del correspondiente grado:

$$l_{\alpha_1} = x_1, \quad l_{\alpha_2} = x_2, \quad l_{m\alpha_1 + \alpha_2} = x_1^m x_2, \quad m = 1, 2, 3.$$

Para $\alpha = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, se tienen dos descomposiciones como suma de dos raíces positivas:

$$\alpha = (3\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 = (2\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2),$$

y usando (2.8), deducimos que $l_\alpha = l_{2\alpha_1 + \alpha_2} l_{\alpha_1 + \alpha_2} = x_1^2 x_2 x_1 x_2$.

3.2.2. Dimensión de las álgebras de Nichols estándares

Ahora calcularemos explícitamente la dimensión de cada álgebra de Nichols con trenza estándar. Para empezar, consideramos las trenzas estándares de tipos C_θ , D_θ , E_k ($k = 6, 7, 8$) y F_4 , las cuales son necesariamente de tipo Cartan, de acuerdo a la Proposición 3.1.7.

Proposición 3.2.3. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo Cartan, donde $q_{44} \in \mathbb{G}_N$ es primitiva si V es de tipo F_4 , o $q_{11} \in \mathbb{G}_N$ es primitiva para las restantes, $N \in \mathbb{N}$. El álgebra de Nichols asociada $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita; más aún,*

$$\text{Tipo } C_\theta: \dim \mathcal{B}(V) = \begin{cases} N^{\theta^2} & N \text{ impar,} \\ N^{\theta^2}/2^\theta & N \text{ par;} \end{cases}$$

$$\text{Tipo } F_4: \dim \mathcal{B}(V) = \begin{cases} N^{24} & N \text{ impar,} \\ N^{24}/2^{12} & N \text{ par;} \end{cases}$$

$$\text{Tipos } D_\theta, E_6, E_7, E_8: \dim \mathcal{B}(V) = N^{|\Delta^+|}.$$

Notemos que el último caso corresponde a diagramas de Dynkin con aristas simples.

Demostración. Notemos que si N es impar, entonces $\text{ord } q^2 = \text{ord } q = N$, pero si N es par, se tiene $\text{ord } q^2 = N/2$. También, como la trenza es de tipo Cartan,

$$q_{s_i(\alpha)} = \chi(s_i(\alpha), s_i(\alpha)) = \tilde{\chi}(\alpha, \alpha) = \chi(\alpha, \alpha) = q_\alpha.$$

Usando esta igualdad, debemos determinar cuántas raíces hay en la órbita de cada raíz simple para la acción del grupo de Weyl, y mirar el correspondiente $q_{ii} = q_{\alpha_i}$.

Si V es de tipo C_θ , $q_{ii} = q$, excepto para $q_{\theta\theta} = q^2$. Las raíces en la órbita de α_θ por la acción del grupo de Weyl son $q_{\mathbf{w}_i}$ para $1 \leq i < \theta$, mientras que las restantes están en la órbita de α_j , para algún $j < \theta$. Luego, hay θ raíces tales que $q_\alpha = q^2$, y para las restantes se tiene $q_\alpha = q$.

Si V es de tipo F_4 , tenemos que $q_{11} = q_{22} = q^2$, y $q_{33} = q_{44} = q$. Hay exactamente 12 raíces en las órbitas correspondientes a α_1 y α_2 , y las restantes 12 están en las órbitas correspondientes a α_3 y α_4 . Luego,

$$|\{\alpha \in \Delta^+ : q_\alpha = q\}| = |\{\alpha \in \Delta^+ : q_\alpha = q^2\}| = 12.$$

Si V es de tipo D o E , se tiene $q_\alpha = q$ para toda $\alpha \in \Delta_+^C$, pues se verifica $q_{ii} = q$, para todo $1 \leq i \leq \theta$.

La fórmula para la dimensión es una consecuencia del Corolario 3.2.2, donde se describen las raíces, y del Corolario 1.7.13, donde se determina la altura de cada generador. \square

Ahora calculamos la dimensión cuando son de tipo A_θ , B_θ o G_2 .

Proposición 3.2.4. *Sea V un espacio vectorial trenzado estándar de tipo A_θ como en la Proposición 3.1.8. El álgebra de Nichols asociada $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita si y sólo si q es una raíz de la unidad de orden $N \geq 2$. En tal caso,*

$$\dim \mathcal{B}(V) = 2^a N^b, \tag{3.14}$$

donde $t = \theta + 1 - \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} i_k$, $a = \binom{\theta+1}{2} - \binom{t}{2} - \binom{\theta+1-t}{2}$, $b = \binom{t}{2} + \binom{\theta+1-t}{2}$.

Demostración. El hecho que $\dim \mathcal{B}(V) < \infty$ si y sólo si q es una raíz de la unidad de orden $N \geq 2$ se deduce de la caracterización de la altura de cada generador PBW como el orden del correspondiente q_α . Para calcular la dimensión, determinaremos q_α para cada $\alpha \in \Delta_+^C$. Podría usarse un argumento mediante la acción del grupo de Weyl, pero lo haremos de modo más explícito.

Denotamos como antes $\mathbf{u}_{ij} = \sum_{k=i}^j \alpha_k$, $i \leq j$, de modo que

$$\Delta(\mathcal{B}(V)) = \{\mathbf{u}_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq \theta\}.$$

Para cada par $1 \leq i \leq j \leq \theta$, definimos $\kappa_{ij} := \#\{k \in \{i, \dots, j\} : q_{kk} = -1\}$.

Probemos por inducción en $j - i$ que

- si κ_{ij} es impar, entonces $q_{\mathbf{u}_{ij}} = -1$;
- si κ_{ij} es par, entonces $q_{\mathbf{u}_{ij}} = q_{j,j+1}^{-1} q_{j+1,j}^{-1}$,

donde definimos $q_{\theta,\theta+1} q_{\theta+1,\theta} = q_{\theta\theta}^{-2} q_{\theta,\theta-1}^{-1} q_{\theta-1,\theta}^{-1}$.

Si $j - i = 0$, entonces $q_{\mathbf{u}_{ii}} = q_{ii}$; en tal caso,

- $\kappa_{ii} = 1$ si $q_{ii} = -1$, o
- $\kappa_{ii} = 0$ si $q_{ii} = (q_{i,i+1} q_{i+1,i})^{-1} \neq -1$.

Así, asumimos que, fijado i , la fórmula vale para j , y calculamos para $j + 1$, usando hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{u}_{i,j+1}} &= \chi(\mathbf{u}_{ij} + \alpha_{j+1}, \mathbf{u}_{ij} + \alpha_{j+1}) = q_{\mathbf{u}_{ij}} \chi(\mathbf{u}_{ij}, \alpha_{j+1}) \chi(\alpha_{j+1}, \mathbf{u}_{ij}) q_{j+1,j+1} \\ &= q_{\mathbf{u}_{ij}} q_{j,j+1} q_{j+1,j} q_{j+1,j+1} \\ &= \begin{cases} q_{\mathbf{u}_{ij}} & q_{j+1,j+1} \neq -1 \text{ } (\kappa_{i,j+1} = \kappa_{ij}), \\ (-1) q q^{-1} = -1 & q_{j+1,j+1} = -1, \kappa_{ij} \text{ par}, \\ (-1) q (-1) = q & q_{j+1,j+1} = -1, \kappa_{ij} \text{ impar}. \end{cases} \end{aligned}$$

Así hemos probado el paso inductivo, y para calcular la dimensión de $\mathcal{B}(V)$ debemos contar el número de raíces \mathbf{u}_{ij} tales que

$$q_{\mathbf{u}_{ij}} = q_{i,i+1}^{-1} q_{i+1,i}^{-1} = q^{\pm 1},$$

esto es, $\#\{\kappa_{ij} : i \leq j, \kappa_{ij} \text{ es par}\}$.

Consideremos un tablero de tamaño $1 \times (\theta + 1)$, numerado de 1 a $\theta + 1$, y pintemos sus casilleros de blanco o negro, de acuerdo a las siguientes reglas:

- el cuadrado $\theta + 1$ es blanco,
- el i -ésimo casillero es del mismo color que el $(i + 1)$ -ésimo casillero si $q_{ii} \neq -1$, o de diferente color si $q_{ii} = -1$.

Todas las coloraciones posibles del tablero están en correspondencia biyectiva con las elecciones de $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq \theta$ para los diferentes j (esto es, las posiciones donde ponemos un -1 en el correspondiente q_{ii} de la trenza), y el número de casilleros blancos es

$$t = 1 + (\theta - i_j) + (i_{j-1} - i_{j-2}) + \dots = \theta + 1 - \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} i_k$$

Ahora $\#\{\kappa_{ij} : i \leq j, \kappa_{ij} \text{ par}\}$ es el número de pares (a, b) , con $1 \leq a < b \leq \theta + 1$ ($a = i$ y $b = j + 1$) tales que los casilleros en las posiciones a y b son del mismo color, esto es,

$$\binom{t}{2} + \binom{\theta + 1 - t}{2}.$$

A partir de este cálculo obtenemos la fórmula (3.14) para la dimensión de $\mathcal{B}(V)$ mirando la correspondiente base PBW. \square

Proposición 3.2.5. *Sea V un espacio vectorial trenzado estándar de tipo B_θ como en la Proposición 3.1.9. Si la trenza es como en el caso (a), respectivamente (b), de dicha Proposición, el álgebra de Nichols asociada $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita si y sólo si q es una raíz de la unidad de orden $N \geq 2$ (respectivamente, $N > 2$).*

En tal caso, la dimensión del álgebra de Nichols correspondiente es:

- si la trenza es como en (a) de la Proposición 3.1.9,

$$\dim \mathcal{B}(V) = \begin{cases} 3^3 N^2 & \text{si 3 no divide a } N, \\ 3^2 N^2 & \text{si 3 divide a } N, \text{ ord}(\zeta^{-1}q) = N, \\ 3N^2 & \text{si 3 divide a } N, \text{ ord}(\zeta^{-1}q) = N/3; \end{cases} \quad (3.15)$$

- si la trenza es como en (b),

$$\dim \mathcal{B}(V) = \begin{cases} 2^{2t(\theta-t)+\theta} k^{\theta^2-2t\theta+2t^2} & N = 2k, \\ 2^{(2t+1)(\theta-t)+1} N^{\theta^2-2t\theta+2t^2} & N = 2k + 1; \end{cases} \quad (3.16)$$

- si la trenza es como en (c),

$$\dim \mathcal{B}(V) = 2^{\theta(\theta-1)} 3^{\theta^2-2t\theta+2t^2}; \quad (3.17)$$

donde denotamos $t = \theta - \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} i_k$.

Demostración. La primer afirmación se deduce como en la Proposición anterior.

Procedemos entonces a calcular $\dim \mathcal{B}(V)$, asumiendo que q es una raíz de la unidad de orden N . Por el Corolario 3.2.2, debemos determinar q_α para todos los $\alpha \in \Delta^C$, y multiplicar sus órdenes, pues son las alturas de los generadores de una base PBW. Sea como antes $\mathbf{u}_{ij} = \sum_{k=i}^j \alpha_k$, para $1 \leq i \leq j \leq \theta$ y $\mathbf{v}_{i,j} := \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k + 2 \sum_{k=j}^{\theta} \alpha_k = \mathbf{u}_{i,\theta} + \mathbf{u}_{j,\theta}$, $1 \leq i < j \leq \theta$. Calculamos $q_{\mathbf{u}_{ij}}$, para $1 \leq i \leq j < \theta$ como antes, pues tales raíces corresponden a una trenza estándar de tipo $A_{\theta-1}$, y

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{v}_{ij}} &= \chi(\mathbf{v}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}) = q_{\mathbf{u}_{j,\theta}}^4 \chi(\mathbf{u}_{i,j-1}, \mathbf{u}_{j,\theta})^2 \chi(\mathbf{u}_{j,\theta}, \mathbf{u}_{i,j-1})^2 q_{\mathbf{u}_{i,j-1}} \\ &= q_{\theta\theta}^4 q_{\theta,\theta-1}^2 q_{\theta-1,\theta}^2 \left(\prod_{k=j}^{\theta-1} q_{kk}^2 q_{k-1,k} q_{k-1,k} q_{k+1,k} q_{k+1,k} \right)^2 q_{\mathbf{u}_{i,j-1}} = q_{\mathbf{u}_{i,j-1}}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que

- $q_{ij}q_{ji} = 1$ si $|i - j| > 1$,
- $q_{11}^4 q_{12}^2 q_{21}^2 = 1$, y además
- $q_{kk}^2 q_{k-1,k} q_{k-1,k} q_{k+1,k} q_{k+1,k} = 1$ si $2 \leq k \leq \theta - 1$.

Ahora calculamos la dimensión para cada caso:

(a) Notemos que $q_{\alpha_2} = \zeta$, $q_{\alpha_1 + \alpha_2} = \zeta$, $q_{\alpha_1 + 2\alpha_2} = \zeta q^{-1}$ y $q_{\alpha_1} = q$; consideramos entonces $N' = \text{ord}(q\zeta^{-1})$:

- $N' = 3N$, si 3 no divide a N ;
- $N' = N$ o $N' = N/3$, si 3 divide a N .

(b) Tenemos que

$$q_{\mathbf{u}_{k\theta}} = q^{-1} q_{\mathbf{u}_{k,\theta-1}} = \begin{cases} q^2 q^{-1} = q & \kappa_{k,\theta-1} \text{ par,} \\ -q^{-1} & \kappa_{k,\theta-1} \text{ impar;} \end{cases}$$

y $q_{\theta\theta} = q$. Además, $\kappa_{k,\theta-1}$ es par si y sólo si $k \in \{i_j + 1, \dots, \theta - 1\}$, o $k \in \{i_{j-2} + 1, \dots, i_{j-1}\}$, y así seguimos. Luego hay

$$t = (\theta - i_j) + (i_{j-1} - i_{j-2}) + \dots = \theta - \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} i_k$$

posiciones tales que $\kappa_{i,\theta-1}$ es par. En consecuencia, hay

- $2 \binom{t}{2} + \binom{\theta-t}{2}$ raíces tales que $q_\alpha = q^2$,
- $2 \left(\binom{\theta}{2} - \binom{t}{2} - \binom{\theta-t}{2} \right)$ raíces tales que $q_\alpha = -1$,
- $t + 1$ raíces tales que $q_\alpha = q$, y
- $\theta - 1 - t$ raíces tales que $q_\alpha = -q^{-1}$.

Como antes, si $N = 2k$ se tiene que $\text{ord}(-q^{-1}) = 2k$ y $\text{ord}(q^2) = k$, de donde

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{B}(V) &= 2^{(\theta-1)\theta-t(t-1)-(\theta-t)(\theta-t-1)} k^{t(t-1)+(\theta-t)(\theta-t-1)} (2k)^\theta \\ &= 2^{2t(\theta-t)+\theta} k^{\theta^2-2t\theta+2t^2}, \end{aligned}$$

pero si N es impar, se tiene $\text{ord}(-q^{-1}) = 2N$, $\text{ord}(q^2) = N$, de donde

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{B}(V) &= 2^{\theta(\theta-1)-t(t-1)-(\theta-t)(\theta-1-t)} N^{t(t-1)+(\theta-t)(\theta-1-t)+t+1} (2N)^{\theta-1-t} \\ &= 2^{(2t+1)(\theta-t)+1} N^{\theta^2-2t\theta+2t^2}. \end{aligned}$$

(c) De modo análogo al caso anterior,

$$q_{\mathbf{u}_{i,\theta}} = (-\zeta^2) q_{\mathbf{u}_{i,\theta-1}} = \begin{cases} (-\zeta^2)^2 = \zeta & \kappa_{i,\theta-1} \text{ par,} \\ (-1)(-\zeta^2) = \zeta^2 & \kappa_{i,\theta-1} \text{ impar;} \end{cases}$$

siendo además $q_{\theta\theta} = \zeta$. Hay entonces

- $2 \binom{t}{2} + \binom{\theta-t}{2}$ raíces tales que $q_\alpha = -\zeta^2$,
- $2 \left(\binom{\theta}{2} - \binom{t}{2} - \binom{\theta-t}{2} \right)$ raíces tales que $q_\alpha = -1$,
- $t + 1$ raíces tales que $q_\alpha = \zeta$, y
- $\theta - 1 - t$ raíces tales que $q_\alpha = \zeta^2$.

Como $\text{ord } \zeta = \text{ord } \zeta^2 = 3$ y $\text{ord}(-\zeta^2) = 6$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{B}(V) &= 2^{\theta(\theta-1)-t(t-1)-(\theta-t)(\theta-1-t)} 6^{t(t-1)+(\theta-t)(\theta-1-t)} 3^\theta \\ &= 2^{\theta(\theta-1)} 3^{\theta^2-2t\theta+2t^2}. \end{aligned}$$

Así hemos completado la prueba. □

Proposición 3.2.6. *Sea V un espacio vectorial trenzado estándar de tipo G_2 como en la Proposición 3.1.10. Si la trenza es como en el caso (a) de dicha Proposición, el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita si y sólo si q es una raíz de la unidad de orden $N \geq 4$, y si es como en (b), $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita.*

En dicho caso, la dimensión del álgebra de Nichols es:

- en el caso (a) de la Proposición 3.1.10,

$$\dim \mathcal{B}(V) = \begin{cases} N^6 & \text{si 3 no divide a } N, \\ 27k^6 & \text{si } N = 3k; \end{cases} \quad (3.18)$$

- en el caso (b), $\dim \mathcal{B}(V) = 2^{12}$.

Demostración. Para (a) notemos que q debe ser una raíz de la unidad para que $\mathcal{B}(V)$ sea de dimensión finita, pues x_1 debe tener altura finita. Además

- $q_\alpha = q$ si $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\}$,
- $q_\alpha = q^3$ si $\alpha \in \{\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$,

con lo cual $\dim \mathcal{B}(V) = N^6$ si 3 no divide a N , y $\dim \mathcal{B}(V) = 27k^6$ si $N = 3k$. Para (b) calculamos las alturas de cada generador PBW directamente, y se tiene que

tipo	q_{x_2}	$q_{x_1x_2}$	$q_{x_1^3x_2^2}$	$q_{x_1^2x_2}$	$q_{x_1^3x_2}$	q_{x_1}	$\dim \mathcal{B}(V)$
$\circ \zeta^2 \xrightarrow{\zeta} \circ \zeta^{-1}$	8	4	2	8	2	4	2^{12}
$\circ \zeta^2 \xrightarrow{\zeta^3} \circ^{-1}$	2	8	2	4	8	4	2^{12}
$\circ \zeta \xrightarrow{\zeta^5} \circ^{-1}$	2	4	8	4	2	8	2^{12}

de modo que completamos la prueba. □

3.3. Trenzas de tipo súper

En la siguiente sección trabajaremos con las trenzas de tipo súper. El estudio de tales trenzas se hará de modo muy similar al de las trenzas estándares. Primero las clasificaremos para luego calcular su dimensión.

3.3.1. Sistemas de raíces y trenzas de tipo súper

Ejemplo 3.3.1. De acuerdo a [HeY, Example 3], el sistema de raíces asociado a una súper álgebra de Lie contragradiente de dimensión finita es un sistema de raíces generalizado como en la Definición 2.1.2. Dicha observación viene de consideraciones previas hechas en [Se]. Describiremos cada uno de estos sistemas de raíces, considerando sólo los irreducibles; es decir los que corresponden a diagramas conexos, pues la familia de todos los sistemas de raíces de este tipo se obtiene por medio de tales componentes conexas. Diremos que son *sistemas de raíces de tipo súper*.

Tipo A_θ : Necesitamos considerar una función de paridad en las raíces simples $p(\alpha_i)$, y extenderlo a un morfismo de grupos $p : \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbb{Z}_2$; en general denotaremos $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$. El conjunto \mathcal{X} puede describirse como sigue: si $p(\alpha_i) = -1$, entonces la reflexión s_i desde el punto X va a un punto diferente \hat{X} . La nueva función de paridad \hat{p} está determinada a partir de p y s_i :

$$\hat{p}(\alpha_k) = p(s_i(\alpha_k)) = p(\alpha_k + m_{ik}\alpha_i) = p(\alpha_k)(-1)^{m_{ik}}.$$

O sea, cambiamos la paridad de aquellos vértices k que están conectados con i , y mantenemos la paridad de los vértices que no están conectados mediante una arista con i . De esta manera, \mathcal{X} puede tener más de un elemento, dependiendo de la paridad en las raíces simples. Sin embargo, para cada $X \in \mathcal{X}$ tenemos el mismo conjunto de raíces positivas,

$$\Delta_+^X = \{\mathbf{u}_{ij} := \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j : 1 \leq i \leq j \leq \theta\}. \quad (3.19)$$

Tipo B_θ : Como antes, \mathcal{X} puede tener más de un elemento, pues debemos considerar también una paridad y las reflexiones que van de un punto a otro diferente son aquéllas que corresponden a vértices impares, donde la nueva función de paridad se define como para el tipo A_θ . Sin embargo, nuevamente tenemos el mismo conjunto de raíces positivas para cada $X \in \mathcal{X}$,

$$\Delta_+^X = \{\mathbf{u}_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq \theta\} \cup \{\mathbf{v}_{ij} := \mathbf{u}_{i,\theta} + \mathbf{u}_{j,\theta} : 1 \leq i < j \leq \theta\}. \quad (3.20)$$

Tipos C_θ, D_θ : Nuevamente consideramos una función de paridad $p : \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbb{Z}_2$. De acuerdo a [Kac1], ver también [Y], podemos considerar conjuntos de tipo C , $\Delta_+^{X(C)}$, y conjuntos de tipo D , $\Delta_+^{X(D)}$, los cuales se describen como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta_+^{X(C)} = & \{\mathbf{u}_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq \theta\} \\ & \cup \{\mathbf{w}_{ij} := \mathbf{u}_{i,\theta} + \mathbf{u}_{j,\theta-1} : 1 \leq i < j \leq \theta - 1\} \\ & \cup \{\tilde{\mathbf{w}}_i := \mathbf{u}_{i,\theta-1} + \mathbf{u}_{i,\theta} : 1 \leq i \leq \theta - 1, p(\mathbf{u}_{i,\theta-1}) = 1\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_+^{X(D)} = & \{\mathbf{u}_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq \theta, (i, j) \neq (\theta - 1, \theta)\} \\ & \cup \{\alpha_{\theta-1} + \alpha_\theta : p(\alpha_{\theta-1}) = -1\} \\ & \cup \{\tilde{\mathbf{u}}_i := \mathbf{u}_{i,\theta-2} + \alpha_\theta : 1 \leq i \leq \theta - 2\} \\ & \cup \{\mathbf{z}_{ij} := \mathbf{u}_{i,\theta} + \mathbf{u}_{j,\theta-2} : 1 \leq i < j \leq \theta - 2\} \\ & \cup \{\tilde{\mathbf{z}}_i := \mathbf{u}_{i,\theta} + \mathbf{u}_{i,\theta-2} : 1 \leq i \leq \theta - 2, p(\mathbf{u}_{i,\theta-1}) = -1\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Notemos la similitud de tales conjuntos con los correspondientes sistemas de raíces estándares: de hecho, los sistemas estándares de tipo C , D corresponden a los sistemas súper del mismo tipo cuando la paridad es trivial.

Tipo $D(2, 1; \alpha)$: Para este tipo hay cuatro conjuntos de raíces posibles,

$$\Delta_+^{X_0} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}, \quad (3.23)$$

$$\Delta_+^{X_k} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_k\} \cup \{\alpha_k + \alpha_j : j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}\}, \quad (3.24)$$

donde $k \in \{1, 2, 3\}$. Notemos que $s_k(\Delta^{X_0}) = \Delta^{X_k}$, y además $s_j(\Delta^{X_k}) = \Delta^{X_k}$ si $j \neq k$. Tales relaciones determinan entre qué puntos se consideran las diferentes reflexiones.

Tipo $F(4)$: En este caso, $|\mathcal{X}| = 6$. Uno de los conjuntos de raíces es

$$\begin{aligned} \Delta_+^X = \{ & \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \\ & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3, \\ & \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Los otros conjuntos (y en consecuencia los otros puntos de X) se obtienen aplicando las reflexiones s_i , una vez que determinamos a_{ij}^X de acuerdo a (2.3). Por ejemplo, para X como en (3.25),

$$a_{12}^X = a_{21}^X = a_{23}^X = a_{34}^X = a_{43}^X = 1, \quad a_{32}^X = 2, \quad a_{ij}^X = 0 \text{ si } |i - j| > 1.$$

Tipo $G(3)$: En este último caso, $|\mathcal{X}| = 4$, y uno de los conjuntos de raíces positivas es

$$\begin{aligned} \Delta_+^X = \{ & \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \\ & \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ & \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Obtenemos los otros conjuntos de raíces positivas (y así también los otros elementos de \mathcal{X}) determinando a_{ij}^X de acuerdo a (2.3) y aplicando las reflexiones s_i .

Describiremos ahora la familia de todos los espacios trenzados cuyas álgebras de Nichols tienen un sistema de raíces como el asociado a alguna súper álgebra de Lie contragradiante de dimensión finita; es decir, clasificaremos los *espacios vectoriales trenzados de tipo súper*. Antes de proceder con la clasificación, notemos el siguiente hecho:

Observación 3.3.2. Si $a_{ij}^F = 0$, entonces para todo $k \neq i, j$,

$$q_{jj}^{s_i(F)} = q_{jj}^F, \quad q_{jk}^{s_i(F)} q_{kj}^{s_i(F)} = q_{jk}^F q_{kj}^F.$$

Teorema 3.3.3. *Sea (V, c) un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, con matriz de trenza (q_{ij}) . Asumimos que su diagrama de Dynkin generalizado es conexo. Entonces $\mathcal{B}(V)$ admite un sistema de raíces de tipo súper si y sólo si su diagrama de Dynkin generalizado es uno de los siguientes:*

Tipo A_θ :

$$C(\theta, q; i_1, \dots, i_j), \quad \theta \in \mathbb{N}, q \in \mathbf{k}^\times, q^2 \neq 1, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq \theta. \quad (3.27)$$

Tipo B_θ :

$$\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{G}_3, \quad q \in \mathbf{k} \setminus \{0, 1, -1, \zeta, \zeta^2\}, \quad (3.28)$$

$$\boxed{C(\theta - 1, q^2; i_1, \dots, i_j)} \xrightarrow{q^{-2}} \circ^q, \quad \theta \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbf{k}^\times, \quad q \neq \pm 1, \quad (3.29)$$

$$\boxed{C(\theta - 1, -\zeta^2; i_1, \dots, i_j)} \xrightarrow{-\zeta} \circ \zeta, \quad \theta \in \mathbb{N}, \quad \zeta \in \mathbb{G}_3. \quad (3.30)$$

Tipo C_θ , $\theta \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbf{k}^\times$, $q^4 \neq 1$:

$$\boxed{C(\theta - 1, q; i_1, \dots, i_j)} \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{q^2}. \quad (3.31)$$

Tipo D_θ , $\theta \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbf{k}^\times$, $q^2 \neq 1$:

$$\boxed{C(\theta - 2, q^{-1}; i_1, \dots, i_j)} \begin{array}{l} \xrightarrow{q} \circ^{q^{-1}}, \\ \downarrow q \\ \circ^{q^{-1}} \end{array} \quad (3.32)$$

$$\boxed{C(\theta - 2, q; i_1, \dots, i_j)} \begin{array}{l} \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1}. \\ \downarrow \begin{array}{l} q^{-1} \\ \swarrow q^2 \end{array} \\ \circ^{-1} \end{array} \quad (3.33)$$

Tipo $D(2, 1; \alpha)$, $q, r, s \in \mathbf{k}^\times \setminus \{1\}$, $qrs = 1$:

$$\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{r^{-1}} \circ^r, \quad (3.34)$$

$$\begin{array}{ccc} & \circ^{-1} & \\ q \swarrow & & \searrow r \\ \circ^{-1} & \xrightarrow{s} & \circ^{-1} \end{array} \quad (3.35)$$

Tipo F(4), $q \in \mathbf{k}^\times$, $q^2, q^3 \neq 1$:

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q^{-1}} \circ q \xrightarrow{q^{-2}} \circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ q^2, \quad (3.36)$$

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^{-1} \xrightarrow{q^{-2}} \circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ q^2, \quad (3.37)$$

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q^2} \circ^{-1} \xrightarrow{q^{-2}} \circ q^2, \quad (3.38)$$

$$\begin{array}{c} \swarrow q^{-1} \\ \circ q \\ \downarrow q^{-1} \\ \circ q \end{array}$$

$$\circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{-1} \xrightarrow{q^2} \circ^{-1}, \quad (3.39)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow q \\ \circ^{-1} \end{array} \begin{array}{c} \swarrow q^{-3} \\ \circ^{-1} \end{array}$$

$$\circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{q^3} \circ q^{-3}, \quad (3.40)$$

$$\circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{-1} \xrightarrow{q^3} \circ q^{-3}. \quad (3.41)$$

Tipo G(3), $q \in \mathbf{k}^\times$, $q^2, q^3 \neq 1$:

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q^{-1}} \circ q \xrightarrow{q^{-3}} \circ q^3, \quad (3.42)$$

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^{-1} \xrightarrow{q^{-3}} \circ q^3, \quad (3.43)$$

$$\begin{array}{c} \circ^{-1} \\ \swarrow q^{-1} \quad \searrow q^3 \\ \circ q \quad \quad \quad \circ^{-1} \\ \quad \quad \quad \downarrow q^{-2} \\ \circ^{-q^{-1}} \quad \quad \quad \circ^{-1} \end{array}, \quad (3.44)$$

$$\circ^{-q^{-1}} \xrightarrow{q^2} \circ^{-1} \xrightarrow{q^{-3}} \circ q^3. \quad (3.45)$$

Demostración. Cuando la trenza es de tipo A_θ o B_θ , la prueba sigue de las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.9. Lo único que podría notarse en tal caso es que una reflexión en un vértice impar cambia la paridad tal como cambia la trenza cada vez que hace la reflexión en un vértice tal que $q_{ii} = -1$, ver la Observación 3.1.1, por lo cual definimos la paridad en las cadenas de tipo A_θ como

$$p(\alpha_i) = \begin{cases} -1, & q_{ii} = -1 \\ 1, & q_{ii} = q \neq -1, \end{cases}$$

y para el vértice θ en el tipo B_θ la definimos arbitrariamente. Sólo se cambia dicho escalar cuando el vértice $\theta - 1$ es impar y se hace la reflexión en él, pasando del escalar q al escalar $-q^{-1}$; aunque una simetría en el vértice θ no cambia la trenza por más que sea impar, lo cual está de acuerdo con el hecho que $m_{\theta,j} = 0$ o 2 (o sea, siempre es par).

La prueba para los otros casos es completamente análoga a la de dichas Proposiciones, por lo cual sólo mostraremos los detalles en el caso C_θ . Para empezar, notemos que la submatriz $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta-1}$

es de tipo $A_{\theta-1}$, con lo cual es estándar y tiene como diagrama de Dynkin generalizado alguno de los presentes en la Proposición 3.1.8, y la submatriz $\begin{pmatrix} q_{\theta-1,\theta-1} & q_{\theta-1,\theta} \\ q_{\theta,\theta-1} & q_{\theta\theta} \end{pmatrix}$ es de tipo B_2 .

También, si existe un vértice $1 \leq i \leq \theta - 1$ tal que $p(\alpha_i) = -1$, entonces la reflexión s_i cambia el conjunto de raíces, y por la Observación 3.1.2, tenemos que $q_{ii} = -1 \neq q_{i,i-1}q_{i-1,i}, q_{i,i+1}q_{i+1,i}$.

Si $p(\alpha_i) = 1$ para todo i , entonces el sistema de raíces es de tipo finito C_θ , y por la Proposición 3.1.7 ya sabemos que es de tipo Cartan. En caso contrario, podemos asumir que $p(\alpha_{\theta-1}) = -1$ pues tal hecho se tendrá a menos de aplicar una sucesión adecuada de reflexiones s_i . Aplicando entonces $s_{\theta-1}$, α_θ se transforma en un vértice impar para la nueva función de paridad, y más aún la reflexión s_θ no cambia el sistema de raíces, con lo cual en la trenza original $q_{\theta\theta} \neq -1$ por las Observaciones 3.1.2 y 3.1.1.

Podemos también considerar que $p(\alpha_{\theta-1}) = 1$ a menos de aplicar algunas reflexiones. En tal caso, como $a_{\theta-1,\theta} = -2$, $a_{\theta-1,\theta-2} = -1$, aplicando la reflexión $s_{\theta-1}$ los vértices $\theta - 2$, θ no están conectados por una arista (pues $\alpha_{\theta-2} + \alpha_\theta$ no es una raíz). En consecuencia, si (\tilde{q}_{ij}) denota la matriz de trenza después de aplicar la reflexión $s_{\theta-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{q}_{\theta-2,\theta}\tilde{q}_{\theta,\theta-2} = \chi(\alpha_{\theta-2} + \alpha_{\theta-1}, \alpha_\theta + 2\alpha_{\theta-1}) + \chi(\alpha_\theta + 2\alpha_{\theta-1}, \alpha_{\theta-2} + \alpha_{\theta-1}) \\ &= q_{\theta-1,\theta-1}^4 q_{\theta-2,\theta-1}^2 q_{\theta-1,\theta-2}^2 q_{\theta\theta,\theta-1} q_{\theta-1,\theta}. \end{aligned}$$

Si asumimos que $q_{\theta-1,\theta-1}^2 \neq q_{\theta\theta}$, mirando las posibles matrices de tipo B_2 bajo estas condiciones, deberíamos tener que $\tilde{q}_{\theta-2,\theta}\tilde{q}_{\theta,\theta-2} = -1$, lo cual es una contradicción. Entonces $q_{\theta-1,\theta-1}^2 = q_{\theta\theta}$, y la trenza tiene como diagrama de Dynkin generalizado a (3.31). Calculando directamente las posibles reflexiones (para lo cual podemos usar las Observaciones 3.3.2, 3.1.1 y 3.1.2), probamos que la trenza anterior es de tipo C_θ . \square

Observación 3.3.4. Notemos que estos diagramas se corresponden con las siguientes clases en la clasificación de Heckenberger:

- la fila 7 para los diagramas de tipo $G(3)$, y las filas 9, 10, 11 para los de tipo $D(2, 1; \alpha)$ de la *Tabla 2*,
- la fila 9 de la *Tabla 3* para los de tipo $F(4)$,
- de la *Tabla 4*, la fila 1 para los diagramas de tipo A_θ , las filas 2, 3 para los de tipo B_θ , y las filas 4, 5, 6 para los de tipo C_θ, D_θ .

3.3.2. Una base PBW para los diagramas de tipo súper

Trabajaremos de modo análogo al caso estándar, hallando los generadores de una base PBW para un orden fijo de las raíces simples; recordemos que las palabras de Lyndon están unívocamente determinadas por el Corolario 3.2.2.

Tipo súper A_θ : Dado que las raíces son las mismas que en el caso estándar de tipo A_θ , determinamos las mismas palabras de Lyndon.

Tipo súper B_θ : Al igual que antes, el conjunto de palabras de Lyndon coincide con los del tipo B_θ estándares.

Tipo súper C_θ : El sistema de raíces de este tipo se obtiene de sacar algunas de las raíces del sistema de raíces de tipo C_θ ; más exactamente, sacamos las raíces $\tilde{\mathbf{w}}_i = \mathbf{u}_{i,\theta-1} + \mathbf{u}_{i,\theta}$ tales que $p(\mathbf{u}_{i,\theta-1}) = -1$. De este modo, basta con tomar el conjunto de palabras de Lyndon correspondientes al sistema de tipo C_θ , y quitar las palabras $l_{\tilde{\mathbf{w}}_i}$ tales que $p(\mathbf{u}_{i,\theta-1}) = -1$

Tipo súper D_θ : Nuevamente, hallamos el conjunto de generadores PBW de acuerdo al Corolario 3.2.2 para este tipo de diagrama relacionándolo con el correspondiente conjunto de generadores PBW de tipo D_θ , a menos de algunas raíces. Por ejemplo, debemos agregar la raíz $\alpha_{\theta-1} + \alpha_\theta$ si $p(\alpha_{\theta-1}) = -1$, y la palabra de Lyndon correspondiente es $l_{\alpha_{\theta-1} + \alpha_\theta} = x_{\theta-1}x_\theta$.

Tipo súper $D(2, 1; \alpha)$: Como ya hemos visto en otros casos, $l_{\alpha_i} = x_i$ y $l_{\alpha_k + \alpha_j} = x_k x_j$, si $k < j$. Además,

$$l_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \begin{cases} x_1 x_2 x_3 & \text{para } X_k, k = 1, 2, 3; \\ x_1 x_3 x_2 & \text{para } X_0; \end{cases}$$

Así nos resta determinar una palabra de Lyndon en los casos X_k , $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{array}{ll} X_1 : & l_{2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = x_1 x_2 x_1 x_3; \\ X_2 : & l_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3} = x_1 x_2 x_3 x_2; \\ X_3 : & l_{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3} = x_1 x_3 x_2 x_3. \end{array}$$

Tipo súper $F(4)$: Consideramos el caso visto en (3.25), para el cual ya tenemos determinadas las palabras de Lyndon que corresponden a diagramas súper de tipo B_3 o C_3 de los posibles subdiagramas conexos de rango 3. Así nos resta determinar solamente las palabras que corresponden a las raíces $\alpha = \sum_{i=1}^4 a_i \alpha_i$ con $a_i \neq 0$ para todo i . Luego,

$$\begin{array}{ll} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4, \\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3, \\ \alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_2, \\ \alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_2 x_3. \end{array}$$

Tipo súper $G(3)$: Consideramos también uno de tales diagramas, para el cual tenemos las raíces en (3.26). Como antes, nos resta considerar aquellas raíces $\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3$, con $a_i \neq 0$ para todo i . En tales casos:

$$\begin{array}{ll} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3, \\ \alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_2, \\ \alpha = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_2 x_2, \\ \alpha = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_2 x_2 x_3, \\ \alpha = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 : & l_\alpha = x_1 x_2 x_3 x_2 x_2 x_3 x_2. \end{array}$$

3.3.3. Cálculo de las dimensiones de las álgebras de Nichols con trenza de tipo súper

Dado que las trenzas de tipo súper A_θ y B_θ corresponden a trenzas estándares del mismo tipo, calcularemos la dimensión de las álgebras de Nichols para los restantes tipos.

Proposición 3.3.5. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo súper C_θ como en el Teorema 3.3.3. Entonces, $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita si y sólo si q es una raíz de la unidad. En tal caso, si N denota el orden de q , se tiene que*

$$\dim \mathcal{B}(V) = \begin{cases} 2^{2t(\theta-t-1)} N^{t^2+(\theta-1-t)(\theta-2-t)}, & \text{si } N \text{ es impar,} \\ 2^{t(2\theta-2t-3)} N^{t^2+(\theta-1-t)(\theta-2-t)}, & \text{si } N \text{ es par,} \end{cases}$$

donde $t = \theta - 1 - \sum k = 1^j (-1)^{j-k} i_k$.

Demostración. Se prueba de modo muy similar a la Proposición 3.2.5. Primero, para las raíces $\alpha = \mathbf{u}_{ij}$, $1 \leq i \leq j \leq \theta - 1$, se tiene que $\binom{t}{2} + \binom{\theta-1-t}{2}$ de ellas satisfacen $q_\alpha = q^{\pm 1}$, y las restantes satisfacen que $q_\alpha = -1$. También,

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{w}_{ij}} &= \chi(\mathbf{w}_{ij}, \mathbf{w}_{ij}) = \chi(\mathbf{u}_{i,j-1} \mathbf{u}_{i,j-1}) \left(\prod_{k=j}^{\theta-1} q_{kk}^2 q_{k,k-1} q_{k-1,k} q_{k,k+1} q_{k+1,k} \right)^2 = q_{\theta\theta} q_{\theta,\theta-1} q_{\theta-1,\theta} = q_{\mathbf{u}_{i,j-1}}, \\ q_{\tilde{\mathbf{w}}_i} &= \chi(\tilde{\mathbf{w}}_i, \tilde{\mathbf{w}}_i) = \chi(\alpha_i + \tilde{\mathbf{w}}_{i,i+1}, \alpha_i + \tilde{\mathbf{w}}_{i,i+1}) = (q_{ii}^2 q_{i,i+1} q_{i+1,i})^2 = q^2, \\ q_{\mathbf{u}_{i\theta}} &= \chi(\mathbf{u}_{i\theta}, \mathbf{u}_{i\theta}) = \chi(\mathbf{u}_{i,\theta-1} + \alpha_\theta, \mathbf{u}_{i,\theta-1} + \alpha_\theta) = q_{\mathbf{u}_{i,\theta-1}}. \end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos la siguiente situación:

- $2 \left(\binom{t}{2} + \binom{\theta-1-t}{2} \right) = t(t-1) + (\theta-1-t)(\theta-2-t)$ raíces del tipo \mathbf{u}_{ij} , $\mathbf{w}_{i,j+1}$ o $\mathbf{u}_{i,\theta}$ satisfacen que $q_\alpha = q^{\pm 1}$,
- $2 \left(\binom{\theta-1}{2} - \binom{t}{2} - \binom{\theta-1-t}{2} \right) = (\theta-1)(\theta-2) - t(t-1) - (\theta-1-t)(\theta-2-t)$ raíces de los mismos tipos que antes satisfacen que $q_\alpha = -1$, y
- las t raíces $\tilde{\mathbf{w}}_i$ satisfacen $q_{\tilde{\mathbf{w}}_i} = q^2$.

La fórmula para la dimensión se sigue de que $\text{ord } q^2 = \begin{cases} N, & \text{si } N \text{ es impar,} \\ N/2, & \text{si } N \text{ es par.} \end{cases} \quad \square$

Proposición 3.3.6. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo súper D_θ como en el Teorema 3.3.3. Entonces, $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita si y sólo si q es una raíz de la unidad. En tal caso, si N denota el orden de q , se tiene que*

$$\dim \mathcal{B}(V) = \begin{cases} 2^{2t(\theta-t-1)} N^{t^2+(\theta-1-t)(\theta-2-t)}, & \text{si } N \text{ es impar,} \\ 2^{t(2\theta-2t-3)} N^{t^2+(\theta-1-t)(\theta-2-t)}, & \text{si } N \text{ es par,} \end{cases}$$

donde $t = \theta - 1 - \sum k = 1^j (-1)^{j-k} i_k$.

Demostración. Podemos probar caso por caso cuál es el valor de q_α para las diferentes raíces $\alpha \in \Delta_+^{X(D)}$, o reducir al caso C_θ (si el diagrama no es de tipo Cartan, en cuyo caso la dimensión ya fue calculada), utilizando que la dimensión es invariante por la acción del grupoide de Weyl. Así obtenemos la fórmula anterior. \square

Proposición 3.3.7. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo súper $D(2, 1; \alpha)$ como en el Teorema 3.3.3. Entonces, $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita si y sólo si q, r, s son raíces de la unidad. En tal caso, si M, N, P denotan los órden de q, r, s , respectivamente, se tiene que*

$$\dim \mathcal{B}(V) = 2^4 MNP.$$

Demostración. Calcularemos la dimensión para el diagrama X_0 , (3.35), y usaremos el hecho que la dimensión se preserva por la acción del grupoide de Weyl. Para ello, notemos que $q_{\alpha_1+\alpha_2} = q$, $q_{\alpha_2+\alpha_3} = r$, $q_{\alpha_1+\alpha_3} = s$, y

$$q_\alpha = -1 \quad \text{si} \quad \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}.$$

Luego, la dimensión es el producto de los órdenes de estos escalares. \square

Proposición 3.3.8. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo súper $F(4)$ como en el Teorema 3.3.3. Entonces, $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita si y sólo si q es una raíz de la unidad. En tal caso, si N, M, P denotan los órdenes de q, q^2, q^3 , respectivamente, se tiene que*

$$\dim \mathcal{B}(V) = 2^7 N^3 M^6 P.$$

Demostración. Calculamos q_α para el conjunto de raíces (3.25),

$$\begin{aligned} q_\alpha = q & \quad \text{para } \alpha \in \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3\}, \\ q_\alpha = q^2 & \quad \text{para } \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2\}, \\ q_\alpha = -1 & \quad \text{para } \alpha \in \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \\ & \quad \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4\}, \\ q_\alpha = q^{-3} & \quad \text{para } \alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4. \end{aligned}$$

Así calculamos la dimensión para este diagrama como el producto de los órdenes de los escalares q_α por el Corolario 1.7.13, y la misma fórmula vale para los otros diagramas de tipo $F(4)$, pues la dimensión se preserva por la acción del grupoide de Weyl. \square

Proposición 3.3.9. *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo súper $G(3)$ como en el Teorema 3.3.3. Entonces, $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita si y sólo si q es una raíz de la unidad. En tal caso, si N, M, P denotan los órdenes de $q, -q^{-1}, q^3$, respectivamente, se tiene que*

$$\dim \mathcal{B}(V) = 2^6 MN^3 P^3.$$

Demostración. Calculando los correspondientes q_α para (3.26), tenemos que

- $q_\alpha = -1$ si $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3\}$,
- $q_\alpha = q$ si $\alpha \in \{\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3\}$,

- $q_\alpha = -q^{-1}$ si $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$,
- $q_\alpha = q^3$ si $\alpha \in \{3\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3\}$.

Luego, la fórmula de la dimensión se sigue de la teoría de bases PBW de Kharchenko. Y vale para los otros diagramas de tipo G_3 pues la dimensión se preserva por la acción del grupoide de Weyl. \square

Capítulo 4

Presentación explícita de álgebras de Nichols de tipo diagonal y la conjetura de Andruskiewitsch-Schneider

En el presente capítulo utilizaremos las relaciones obtenidas en el Capítulo 2 para obtener una presentación por generadores y relaciones de las álgebras de Nichols de dimensión finita, con una cantidad mínima de relaciones. Para ello consideraremos isomorfismos de Lusztig que relacionarán los dobles de Drinfeld de ciertas álgebras trenzadas que se proyectan sobre las álgebras de Nichols. De hecho, tales isomorfismos son los mismos que los presentes en [H4], pero donde agregamos la menor cantidad de relaciones que permitan definirlos. Esta idea ya fue usada para obtener una presentación de las álgebras de Nichols de tipo Cartan en [A1], en la cual ya aparecían varias de las relaciones que consideramos en el caso general.

Luego daremos algunos ejemplos, algunos de ellos importantes por el tipo de trenza que involucran. Para terminar, consideramos una conjetura de Andruskiewitsch-Schneider, presente en [AS2], la cual había sido respondida positivamente en algunos casos, ver [AS6, AGI] por ejemplo, y usando las mismas técnicas que en dichos trabajos extendemos la respuesta para cualquier álgebra de Hopf punteada de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero, cuyo corradical es el álgebra de un grupo abeliano.

4.1. Isomorfismos de Lusztig para álgebras de Nichols de tipo diagonal

En esta sección presentaremos resultados de [H4] sobre una generalización de los isomorfismos de Lusztig para álgebras envolventes cuantizadas, ver [Lu]. Para ello se usarán diferentes cocientes del álgebra tensorial de un espacio trenzado V de tipo diagonal, sus dobles de Drinfeld y las caracterizaciones del álgebra de Nichols.

Notación: Sea $\chi : \mathbb{Z}^\theta \times \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbf{k}^\times$ un bicarácter, $q_{ij} = \chi(\alpha_i, \alpha_j)$. Entonces, χ^{op} y χ^{-1} denotarán los bicaracteres:

$$\chi^{\text{op}}(\alpha, \beta) := \chi(\beta, \alpha), \quad \chi^{-1}(\alpha, \beta) := \chi(\alpha, \beta)^{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^\theta.$$

También, para cada automorfismo $s : \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbb{Z}^\theta$, denotaremos por $s^* \chi$ al bicaracter definido por

$$(s^* \chi)(\alpha, \beta) := \chi(s^{-1}(\alpha), s^{-1}(\beta)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^\theta. \quad (4.1)$$

Para empezar, consideraremos el doble de Drinfeld del álgebra tensorial correspondiente a un espacio vectorial trenzado V de tipo diagonal de dimensión θ . Como ya fue notado en el Capítulo inicial, $T(V)$ puede considerarse canónicamente como un álgebra en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$. La referencia para los resultados de la presente sección es [H4, Section 4.1].

Definición 4.1.1. El doble de Drinfeld $\mathcal{U}(\chi)$ del álgebra de Hopf $T(V) \# \mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$ es el álgebra generada por los elementos $E_i, F_i, K_i^\pm, L_i^\pm, 1 \leq i \leq \theta$, y relaciones

$$\begin{aligned} XY &= YX, & X, Y &\in \{K_i^\pm, L_i^\pm : 1 \leq i \leq \theta\}, \\ K_i K_i^{-1} &= L_i L_i^{-1} = 1, \\ K_i E_j K_i^{-1} &= q_{ij} E_j, & L_i E_j L_i^{-1} &= q_{ji}^{-1} E_j, \\ K_i F_j K_i^{-1} &= q_{ij}^{-1} F_j, & L_i F_j L_i^{-1} &= q_{ji} F_j, \\ E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{i,j} (K_i - L_i). \end{aligned}$$

Admite una estructura de álgebra de Hopf, donde la comultiplicación satisface

$$\begin{aligned} \Delta(K_i) &= K_i \otimes K_i, & \Delta(E_i) &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \\ \Delta(L_i) &= L_i \otimes L_i, & \Delta(F_i) &= F_i \otimes L_i + 1 \otimes E_i, \end{aligned}$$

y en consecuencia, $\varepsilon(K_i) = \varepsilon(L_i) = 1, \varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0$.

Notar que $\mathcal{U}(\chi)$ es un álgebra de Hopf \mathbb{Z}^θ -graduada, donde la graduación está caracterizada por:

$$\deg(K_i) = \deg(L_i) = 0, \quad \deg(E_i) = \alpha_i, \quad \deg(F_i) = -\alpha_i.$$

Denotemos por $\mathcal{U}^+(\chi)$ (respectivamente, $\mathcal{U}^-(\chi)$) a la subálgebra generada por E_i (respectivamente, F_i), $1 \leq i \leq \theta$, $\mathcal{U}^+0(\chi)$ (respectivamente, $\mathcal{U}^-0(\chi)$) a la subálgebra generada por K_i (respectivamente L_i), $1 \leq i \leq \theta$, y $\mathcal{U}^0(\chi)$ a la subálgebra generada por K_i y L_i . Primero, $\mathcal{U}^0(\chi)$ es isomorfa a $\mathbf{k}\mathbb{Z}^{2\theta}$ como álgebras de Hopf. Además, la subálgebra de Hopf generada por $\mathcal{U}^+(\chi)$ y K_i , $1 \leq i \leq \theta$, es isomorfa a $T(V) \# \mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$, de modo que $\mathcal{U}^+(\chi)$ es isomorfa a $T(V)$ como álgebra de Hopf trenzada en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$, donde

$$K_i \cdot E_i = q_{ij} E_i, \quad \delta(E_i) = K_i \otimes E_i.$$

Tomaremos una familia de morfismos de álgebras de [H4, Section 4.1] que utilizaremos luego para simplificar la notación.

Proposición 4.1.2. (a) Para cada $\underline{a} = (a_1, \dots, a_\theta) \in (\mathbf{k}^\times)^\theta$ existe un único automorfismo de álgebras $\varphi_{\underline{a}}$ de $\mathcal{U}(\chi)$ tal que

$$\varphi_{\underline{a}}(K_i) = K_i, \quad \varphi_{\underline{a}}(L_i) = L_i, \quad \varphi_{\underline{a}}(E_i) = a_i E_i, \quad \varphi_{\underline{a}}(F_i) = a_i^{-1} F_i. \quad (4.2)$$

(b) Existe un único automorfismo de álgebras ϕ_1 de $\mathcal{U}(\chi)$ tal que

$$\phi_1(K_i) = K_i^{-1}, \quad \phi_1(L_i) = L_i^{-1}, \quad \phi_1(E_i) = F_i L_i^{-1}, \quad \phi_1(F_i) = K_i^{-1} E_i. \quad (4.3)$$

(c) Existe un único isomorfismo de álgebras $\phi_2 : \mathcal{U}(\chi) \rightarrow \mathcal{U}(\chi^{-1})$ tal que

$$\phi_2(K_i) = K_i, \quad \phi_2(L_i) = L_i, \quad \phi_2(E_i) = F_i, \quad \phi_2(F_i) = -E_i. \quad (4.4)$$

(d) Existe un único isomorfismo de álgebras de Hopf $\phi_3 : \mathcal{U}(\chi) \rightarrow \mathcal{U}(\chi^{\text{op}})^{\text{cop}}$ tal que

$$\phi_3(K_i) = L_i, \quad \phi_3(L_i) = K_i, \quad \phi_3(E_i) = F_i, \quad \phi_3(F_i) = E_i. \quad (4.5)$$

(e) Existe un único antiautomorfismo de álgebras ϕ_4 de $\mathcal{U}(\chi)$ tal que

$$\phi_4(K_i) = K_i, \quad \phi_4(L_i) = L_i, \quad \phi_4(E_i) = F_i, \quad \phi_4(F_i) = E_i. \quad (4.6)$$

(f) Sea $\underline{a} = (-1, \dots, -1)$. La antípoda de $\mathcal{U}(\chi)$ está dada por $\mathcal{S} = \phi_1 \phi_4 \varphi_{\underline{a}}$. Además, $\phi_4^2 = \text{id}$.

Otro punto importante en dicho trabajo ha sido considerar las siguientes derivaciones torcidas. Como en dicho trabajo, denotamos por $\underline{\Delta}$ a la comultiplicación trenzada de $\mathcal{U}^+(\chi)$, la cual es \mathbb{N} -graduada: si $E \in \mathcal{U}^+(\chi)$ tiene grado n , y $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, denotaremos por $\underline{\Delta}_{n-k, k}(E)$ a la componente en $\mathcal{U}^+(\chi)_{n-k} \otimes \mathcal{U}^+(\chi)_k$.

Proposición 4.1.3. Para cada $i \in \{1, \dots, \theta\}$ existen endomorfismos lineales $\partial_i^K, \partial_i^L$ de $\mathcal{U}^+(\chi)$ tales que

$$EF_i - F_i E = \partial_i^K(E) K_i - L_i \partial_i^L(E) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{U}^+(\chi).$$

Tales endomorfismos están caracterizados por las ecuaciones

$$\underline{\Delta}_{n-1, 1}(E) = \sum_{i=1}^{\theta} \partial_i^K(E) \otimes E_i, \quad \underline{\Delta}_{1, n-1}(E) = \sum_{i=1}^{\theta} E_i \otimes \partial_i^L(E), \quad E \in \mathcal{U}^+(\chi)_n,$$

y satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \partial_i^K(1) &= \partial_i^L(1) = 0, \\ \partial_i^K(E_j) &= \partial_i^L(E_j) = \delta_{i,j}, \\ \partial_i^K(E E') &= \partial_i^K(E)(K_i \cdot E') + E \partial_i^K(E'), \\ \partial_i^L(E E') &= \partial_i^L(E) E' + (L_i^{-1} \cdot E) \partial_i^L(E'), \end{aligned}$$

para todo $j \in \{1, \dots, \theta\}$, y todo par de elementos $E, E' \in \mathcal{U}^+(\chi)$. □

Antes de introducir los isomorfismos de Lusztig, daremos otro resultado importante de [H4, Section 4.1], mediante el cual caracteriza cocientes del álgebra $\mathcal{U}(\chi)$ que admiten descomposición triangular. Primero recordemos que por [H4, Prop. 4.14], la multiplicación

$$m : \mathcal{U}^+(\chi) \otimes \mathcal{U}^0(\chi) \otimes \mathcal{U}^-(\chi) \rightarrow \mathcal{U}(\chi) \quad (4.7)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales \mathbb{Z}^θ -graduados.

Proposición 4.1.4. Sean $\mathcal{I}^+ \subset \mathcal{U}^+ \cap \ker \varepsilon$ (respectivamente, $\mathcal{I}^- \subset \mathcal{U}^- \cap \ker \varepsilon$) un ideal de $\mathcal{U}^+(\chi)$ (respectivamente, $\mathcal{U}^-(\chi)$). Son equivalentes:

- La multiplicación (4.7) induce un isomorfismo

$$m : \mathcal{U}^+(\chi)/\mathcal{I}^+ \otimes \mathcal{U}^0(\chi) \otimes \mathcal{U}^-(\chi)/\mathcal{I}^- \rightarrow \mathcal{U}(\chi)/(\mathcal{I}^+ + \mathcal{I}^-).$$

- Los espacios vectoriales $\mathcal{I}^+\mathcal{U}^0(\chi)\mathcal{U}^-(\chi)$ y $\mathcal{U}^+(\chi)\mathcal{U}^0(\chi)\mathcal{I}^-$ son ideales de $\mathcal{U}(\chi)$.
- Para cada $X \in \mathcal{U}^0(\chi)$ y cada $i \in \{1, \dots, \theta\}$ se tiene

$$\begin{aligned} X \cdot \mathcal{I}^+ &\subset \mathcal{I}^+, & \partial_i^K(\mathcal{I}^+) &\subset \mathcal{I}^+, & \partial_i^K(\phi_4(\mathcal{I}^-)) &\subset \phi_4(\mathcal{I}^-), \\ X \cdot \mathcal{I}^- &\subset \mathcal{I}^-, & \partial_i^L(\mathcal{I}^+) &\subset \mathcal{I}^+, & \partial_i^L(\phi_4(\mathcal{I}^-)) &\subset \phi_4(\mathcal{I}^-). \end{aligned}$$

□

En tal sentido, un resultado útil para encontrar ideales que satisfagan estas condiciones es el siguiente:

Lema 4.1.5. [H4, Cor. 4.20] Sea I^+ un bi-ideal trenzado de $\mathcal{U}^+(\chi)$, que es también un submódulo de Yetter-Drinfeld con respecto a $\mathcal{U}^0(\chi)$, y que satisface $I^+ \subset \bigoplus_{n \geq 2} \mathcal{U}^+(\chi)_n$. Entonces $I^+\mathcal{U}^0(\chi)\mathcal{U}^-(\chi)$ es un ideal de Hopf de $\mathcal{U}(\chi)$. □

Fijemos $p \in \{1, \dots, \theta\}$. Para cada $i \neq p$ definimos como en [H4],

$$E_{i,0(p)}^+, E_{i,0(p)}^- := E_i, \quad F_{i,0(p)}^+, F_{i,0(p)}^- := F_i,$$

y recursivamente,

$$E_{i,m+1(p)}^+ := E_p E_{i,m(p)}^+ - (K_p \cdot E_{i,m(p)}^+) E_p = (\text{ad}_c E_p)^{m+1} E_i, \quad (4.8)$$

$$E_{i,m+1(p)}^- := E_p E_{i,m(p)}^- - (L_p \cdot E_{i,m(p)}^-) E_p, \quad (4.9)$$

$$F_{i,m+1(p)}^+ := F_p F_{i,m(p)}^+ - (L_p \cdot F_{i,m(p)}^+) F_p, \quad (4.10)$$

$$F_{i,m+1(p)}^- := F_p F_{i,m(p)}^- - (K_p \cdot F_{i,m(p)}^-) F_p. \quad (4.11)$$

Cuando p esté fijo, simplemente denotaremos $E_{i,m(p)}^\pm$ por $E_{i,m}^\pm$, para simplificar la notación. De acuerdo a [H4, Cor. 5.4] se tiene para cada $m \in \mathbb{N}_0$ la siguiente identidad:

$$E_{i,m}^+ F_i - F_i E_{i,m}^+ = (m)_{q_{pp}} (q_{pp}^{m-1} q_{pi} q_{ip} - 1) L_p E_{i,m-1}^+. \quad (4.12)$$

Recordaremos un resultado de [A1] que nos será útil en la siguiente sección. Fijemos un álgebra de Hopf trenzada graduada $\mathcal{B} \cong T(V)/I$, donde I es un ideal de Hopf trenzado graduado generado por elementos de grado ≥ 2 . Para cada $1 \leq j \leq \theta$, $p \neq j$, definimos

$$M_{p,j}^\pm(\mathcal{B}) := \left\{ E_{j,m}^\pm : m \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (4.13)$$

Para el resto de la sección tomaremos como convención $\text{ord}(1) = 1$.

Observación 4.1.6. Si $x_i^N = 0$ en \mathcal{B} , donde N es minimal (dicho número se dice el orden de nilpotencia de x_i), entonces q_{ii} es una raíz de la unidad de orden N . Más aún, $(\text{ad}_c x_i)^N x_j = 0$.

El siguiente resultado extiende [H1, Prop. 1, Eqn. (18)].

Lema 4.1.7. *Para cada $p \in \{1, \dots, \theta\}$, sea $\mathcal{B}_{\pm p}$ la subálgebra generada por $\cup_{j \neq p} M_{p,j}^{\pm}(\mathcal{B})$ y denotemos $n_p = \text{ord}(q_{pp})$. Existen isomorfismos de espacios vectoriales graduados*

- $\ker(\partial_p^K) \cong \mathcal{B}_{+p} \otimes \mathbf{k}[E_p^{n_p}]$, $\ker(\partial_p^L) \cong \mathcal{B}_{-p} \otimes \mathbf{k}[E_p^{n_p}]$, si $1 < \text{ord}(q_{pp}) < \infty$, pero E_p no es nilpotente, o
- $\ker(\partial_p^K) \cong \mathcal{B}_{+p}$, $\ker(\partial_p^L) \cong \mathcal{A}_p^-$, si $\text{ord}(q_{pp})$ es el orden de nilpotencia de E_p o $q_{pp} = 1$.

Más aún, la multiplicación da lugar a un isomorfismo de espacios graduados

$$\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_p^{\pm} \otimes \mathbf{k}[x_p]. \quad (4.14)$$

Demostración. Para simplificar la notación fijamos $p = 1$ y consideramos la base PBW del Teorema 1.7.11. Notemos que $E_1 \in S_I$, y más aún es el menor elemento de S_I , de modo que cada elemento de la base B'_I es de la forma $[u_1]_c^{s_1} \dots [u_k]_c^{s_k} E_1^s$, donde $u_k < \dots < u_1, u_i \in S_I \setminus \{E_1\}$, $0 < s_i < h_I(u_i)$, $0 \leq s < h_I(E_1)$. Denotemos $S' := S_I \setminus \{E_1\}$, y

$$B_2 := B(1 + I, [S']_c + I, \langle, h_I|_{S'}),$$

esto es, el conjunto PBW generado por $[S']_c + I$, cuya altura es la restricción de la función altura sobre S_I . Tenemos que

$$\mathcal{B} \cong \mathbf{k}B_2 \otimes \mathbf{k}[E_1].$$

Notemos que, por inducción, se tiene $E_{j,m}^+ \in \ker(\partial_1^K)$; como ∂_1^K es una derivación torcida, se tiene que $\mathcal{B}_{+1} \subseteq \ker(\partial_1^K)$. Notemos que también $\text{ad}_c E_1$ es una derivación torcida de \mathcal{B} , con lo cual dicha derivación se restringe a un endomorfismo de la subálgebra \mathcal{B}_{+1} .

Probaremos por inducción en la longitud de u que $[u]_c \in \mathcal{B}_{+1}$ para cada $u \in L \setminus \{E_1\}$. Notemos que si $u = x_j$, $j > 1$, entonces $[u]_c = x_j \in \mathcal{B}_{+1}$. Ahora, sea $u \in L \setminus \{E_1\}$ de longitud ≥ 1 , y (v, w) su descomposición de Lyndon. Entonces,

- si $v \neq E_1$, se tiene $[v]_c, [w]_c \in \mathcal{B}_1$ por hipótesis inductiva, de modo que

$$[u]_c = [v]_c[w]_c - \chi(\deg v, \deg w)[w]_c[v]_c \in \mathcal{B}_{+1};$$

- si $v = E_1$, entonces $[u]_c = \text{ad}_c E_1([w]_c) \subset \text{ad}_c E_1(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$, pues por hipótesis inductiva $[w]_c \in \mathcal{B}_{+1}$.

Probamos entonces que $[L]_c \setminus \{E_1\} \subseteq \mathcal{A}_1$, y que B_2 está generado por $[L]_c \setminus \{E_1\}$; esto es, $\mathbf{k}B_2 \subseteq \mathcal{B}_{+1}$, y $\partial_1^K(B_2) = 0$.

Si $u \in \ker(\partial_1^K)$, podemos escribir $[u]_c = \sum_{w \in B'_I} \alpha_w [w]_c$. Si w no finaliza con E_1 , entonces $w \in B_2$, y $\partial_1^K([w]_c) = 0$. Pero si $w = u_w E_1^{t_w}$, $[u_w]_c \in B_2$, $0 < t_w < h_I(E_1)$, tenemos que

$$\partial_1^K([w]_c) = (t_w)_{q_{11}^{-1}} [u_w]_c E_1^{t_w-1},$$

donde $(t_w)_{q_{11}^{-1}} \neq 0$ si n_i no divide a t_w . Entonces,

$$0 = \partial_1^K([u]_c) = \sum_{w \in B'_1/t_w > 0} \alpha_w (t_w)_{q_{11}^{-1}} [u_w]_c E_1^{t_w-1},$$

Pero $[u_w]_c E_1^{t_w-1} \in B_2$, y B_2 es una base, de donde $\alpha_w = 0$ para cada w tal que n_i no divide a t_w . Entonces, $\ker(\partial_1^K) = \mathcal{B}_{+1} \mathbf{k}[E_i^{n_i}]$, de donde $\ker(\partial_1^K) \simeq \mathcal{B}_{+1} \otimes \mathbf{k}[E_i^{n_i}]$ como \mathbf{k} -espacios vectoriales graduados. Usando la primer parte finalizamos la prueba para \mathcal{B}_{+p} .

La prueba para \mathcal{B}_{-p} sigue de modo similar, pero considerando a E_p como la mayor de todas las letras y usando que $E_{j,m}^- \in \ker \partial_p^L$. □

En lo que resta del capítulo asumimos que todos los enteros m_{ij} como en (2.6) asociados a la matriz de escalares (q_{ij}) están definidos. En tal caso consideramos el automorfismo $s_{p,\chi} : \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbb{Z}^\theta$, $s_p(\alpha_i) = \alpha_i + m_{pi}\alpha_p$. Definimos además

$$\lambda_i(\chi) := (m_{pi})_{q_{pp}} \prod_{s=0}^{m_{pi}-1} (q_{pp}^s q_{pi} q_{ip} - 1), \quad i \neq p. \tag{4.15}$$

Denotamos por $\underline{E}_i, \underline{F}_i, \underline{K}_i, \underline{L}_i$ a los generadores de $\mathcal{U}(s_p^*\chi)$, y por $(\underline{q}_{ij} = s_p^*\chi(\alpha_i, \alpha_j))$ a la matriz de trenza correspondiente a $s_p^*\chi$.

Definición 4.1.8. Diremos que $p \in \{1, \dots, \theta\}$ es un *vértice de Cartan* si satisface

$$\text{ord } q_{pp} \neq m_{pj} + 1, \text{ para todo } j \neq p.$$

Así, como asumimos que existen los enteros m_{pj} , se tiene que $q_{pp}^{m_{pj}} q_{pj} q_{jp} = 1$.

Denotaremos por $\mathcal{O}(\chi)$ a la unión de las órbitas por la acción del grupoide de Weyl de las raíces α_p , con p vértice de Cartan.

Fijemos un vértice p . Sea $N_p = \text{ord } q_{pp}$. Luego, definimos [H4] $\mathcal{I}_p^+(\chi)$ (respectivamente, $\mathcal{I}_p^-(\chi)$) como el ideal de $\mathcal{U}^+(\chi)$ (respectivamente, $\mathcal{U}^-(\chi)$) generado por

- (a) $E_p^{N_p}$ (respectivamente, $F_p^{N_p}$), si no es un vértice de Cartan,
- (b) $E_{i,m_{pi}+1}^+$ (respectivamente, $F_{i,m_{pi}+1}^+$), para todo i tal que $N_p > m_{pi} + 1$.

Notar que en (b) podríamos haber tomado los $E_{i,m_{pi}+1}^+$, para todo i , sin cambiar el ideal; ver por ejemplo la Observación 2.2.12. Denotaremos:

$$\mathcal{U}_p(\chi) := \mathcal{U}(\chi) / (\mathcal{I}_p^+(\chi) + \mathcal{I}_p^-(\chi)), \quad \mathcal{U}_p^+(\chi) := \mathcal{U}^+(\chi) / \mathcal{I}_p^+(\chi), \quad \mathcal{U}_p^-(\chi) := \mathcal{U}^-(\chi) / \mathcal{I}_p^-(\chi).$$

Denotemos también por $I^+(\chi)$ el ideal de $\mathcal{U}^+(\chi)$ tal que el cociente $\mathcal{U}^+(\chi) / I^+(\chi)$ es isomorfo al álgebra de Nichols; es decir, el mayor ideal de Hopf trenzado, de acuerdo a la Definición 1.4.4. En tal caso, sea $I^-(\chi) = \phi_4(I^+(\chi))$, donde ϕ_4 está definido por (4.6). Denotaremos

$$\mathbf{u}^\pm(\chi) := \mathcal{U}^\pm(\chi) / I^\pm(\chi), \quad \mathbf{u}(\chi) := \mathcal{U}(\chi) / (I^-(\chi) + I^+(\chi)).$$

En tal caso, $\mathbf{u}(\chi)$ resulta ser el doble de Drinfeld del álgebra $\mathbf{u}^+(\chi) \# \mathcal{U}^{+0}(\chi)$, la bosonización del álgebra de Nichols correspondiente a V por el álgebra de grupo $\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta = \mathcal{U}^{+0}(\chi)$.

Usando [H4, Lemma 6.5, Theorem 6.12], se tienen los siguientes isomorfismos de Lusztig.

Teorema 4.1.9. *Existen morfismos de álgebras*

$$T_p, T_p^- : \mathcal{U}_p(\chi) \rightarrow \mathcal{U}_p(s_p^* \chi) \quad (4.16)$$

unívocamente determinados por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} T_p(K_p) &= T_p^-(K_p) = \underline{K}_p^{-1}, & T_p(K_i) &= T_p^-(K_i) = \underline{K}_p^{m_{pi}} \underline{K}_i, \\ T_p(L_p) &= T_p^-(L_p) = \underline{L}_p^{-1}, & T_p(L_i) &= T_p^-(L_i) = \underline{L}_p^{m_{pi}} \underline{L}_i, \\ T_p(E_p) &= \underline{E}_p \underline{L}_p^{-1}, & T_p(E_i) &= \underline{E}_{i, m_{pi}}^+, \\ T_p(F_p) &= \underline{K}_p^{-1} \underline{E}_p, & T_p(F_i) &= \lambda(s_p^* \chi)^{-1} \underline{E}_{i, m_{pi}}^+, \\ T_p^-(E_p) &= \underline{K}_p^{-1} \underline{F}_p, & T_p^-(E_i) &= \lambda(s_p^* \chi^{-1})^{-1} \underline{E}_{i, m_{pi}}^-, \\ T_p^-(F_p) &= \underline{E}_p \underline{L}_p^{-1}, & T_p^-(F_i) &= \underline{E}_{i, m_{pi}}^-. \end{aligned}$$

para cada $i \neq p$. Ambos son isomorfismos que satisfacen

$$T_p T_p^- = T_p^- T_p = \text{id}, \quad T_p(\mathcal{U}_{+p}^+(\chi)) = \mathcal{U}_{-p}^+(s_p^* \chi).$$

Además, existe $\lambda \in (\mathbf{k}^\times)^\theta$ tal que

$$T_p \circ \phi_4 = \phi_4 \circ T_p^- \varphi_\lambda. \quad (4.17)$$

Dichos isomorfismos inducen isomorfismos de álgebras (que denotamos por el mismo nombre):

$$T_p, T_p^- : \mathfrak{u}(\chi) \rightarrow \mathfrak{u}(s_p^* \chi).$$

□

Observación 4.1.10. Si los elementos homogéneos $X, Y \in \mathcal{U}_p^+(\chi)$ son tales que $T_p(X), T_p(Y) \in \mathcal{U}_p^+(s_p^* \chi)$, entonces

$$T_p([X, Y]_c) = [T_p(X), T_p(Y)]_c$$

Esto se deduce del hecho que $\deg T_p(X) = s_p(\deg X)$.

4.2. Presentación explícita por generadores y relaciones de álgebras de Nichols de tipo diagonal

Utilizaremos ahora los isomorfismos anteriores para un cociente de $\mathcal{U}(\chi)$ por un ideal más chico que $(I^-(\chi) + I^+(\chi))$. Tal ideal estará generado por relaciones obtenidas a partir del Teorema 2.2.10, y será mínimo de modo que nos permita definir los isomorfismos anteriores libremente sobre el grupoide de Weyl. De esta forma obtendremos una relación entre las distintas series de Hilbert de las álgebras de una componente conexa del grupoide de Weyl que se traducirá en una caracterización del sistema de raíces, el cual está unívocamente determinado si el sistema es finito, de acuerdo a lo visto anteriormente. Daremos primero el Teorema central de esta sección, y luego de varios resultados previos daremos su prueba. Ésto nos permitirá introducir el conjunto de relaciones que generará el ideal, para luego trabajar con él.

Para enunciar las relaciones con mayor comodidad, denotaremos por $x_{(m+1)\alpha_i + m\alpha_j}$, donde $m \in \mathbb{N}$, a los elementos definidos por

- si $m = 1$, $x_{2\alpha_i + \alpha_j} := (\text{ad}_c x_i)^2 x_j$,
- recursivamente, $x_{(m+2)\alpha_i + (m+1)\alpha_j} := [x_{(m+1)\alpha_i + m\alpha_j}, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c$.

Teorema 4.2.1. *Sea V un espacio trenzado de tipo diagonal de dimensión finita, con matriz de trenza $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$, $\theta = \dim V$. Sea χ el bicarácter asociado a (q_{ij}) . Asumimos que el sistema de raíces Δ^χ es finito. Entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, \dots, x_θ y relaciones:*

$$x_\alpha^{N_\alpha} = 0, \quad \alpha \in \Delta_+^\chi \setminus \mathcal{O}(\chi); \quad (4.18)$$

$$(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0, \quad q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1; \quad (4.19)$$

$$x_i^{N_i} = 0, \quad i \text{ vértice no Cartan}; \quad (4.20)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = q_{jj} = -1$,

$$((\text{ad}_c x_i)x_j)^2 = 0; \quad (4.21)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{jj} = -1$, $q_{ik}q_{ki} = q_{ij}q_{ji}q_{jk}q_{kj} = 1$,

$$[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c = 0; \quad (4.22)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{jj} = -1$, $q_{ii}q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_6$, y además $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$ o $m_{ij} \geq 3$,

$$[(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c = 0; \quad (4.23)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{ii} = \pm q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ik}q_{ki} = 1$, y además $-q_{jj} = q_{ji}q_{ij}q_{jk}q_{kj} = 1$ o $q_{jj}^{-1} = q_{ji}q_{ij} = q_{jk}q_{kj} \neq -1$,

$$[(\text{ad}_c x_i)^2 (\text{ad}_c x_j)x_k, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c = 0; \quad (4.24)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{ik}q_{ki}, q_{ij}q_{ji}, q_{jk}q_{kj} \neq 1$,

$$[x_i, (\text{ad}_c x_j)x_k]_c - \frac{1 - q_{jk}q_{kj}}{q_{kj}(1 - q_{ik}q_{ki})} [(\text{ad}_c x_i)x_k, x_j]_c - q_{ij}(1 - q_{kj}q_{jk}) x_j (\text{ad}_c x_i)x_k = 0; \quad (4.25)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que

- $q_{ii} = q_{jj} = -1$, $(q_{ij}q_{ji})^2 = (q_{jk}q_{kj})^{-1}$, $q_{ik}q_{ki} = 1$, o
- $q_{jj} = q_{kk} = q_{jk}q_{kj} = -1$, $q_{ii} = -q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ik}q_{ki} = 1$, o
- $q_{ii} = q_{jj} = q_{kk} = -1$, $q_{ij}q_{ji} = q_{kj}q_{jk} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ik}q_{ki} = 1$, o
- $q_{ii} = q_{kk} = -1$, $q_{jj} = -q_{kj}q_{jk} = (q_{ij}q_{ji})^{\pm 1} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ik}q_{ki} = 1$,

$$[[(\text{ad}_c x_i)x_j, (\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k]_c, x_j]_c = 0; \quad (4.26)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{ii} = q_{jj} = -1$, $(q_{ij}q_{ji})^3 = (q_{jk}q_{kj})^{-1}$, $q_{ik}q_{ki} = 1$,

$$[[(\text{ad}_c x_i)x_j, [(\text{ad}_c x_i)x_j, (\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k]_c]_c, x_j]_c = 0; \quad (4.27)$$

▷ si $i, j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{jj}q_{ij}q_{ji} = q_{jj}q_{kj}q_{jk} = 1$, $(q_{kj}q_{jk})^2 = (q_{lk}q_{kl})^{-1} = q_{ll}$, $q_{kk} = -1$, $q_{ik}q_{ki} = q_{il}q_{li} = q_{jl}q_{lj} = 1$,

$$[[[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)(\text{ad}_c x_k)x_l, x_k]_c, x_j]_c, x_k]_c = 0; \quad (4.28)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{jj} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1} = q_{jk}q_{kj} \in \mathbb{G}_3$,

$$[[[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c, x_j]_c = 0; \quad (4.29)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{jj} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1} = q_{jk}q_{kj} \in \mathbb{G}_4$,

$$[[[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c, x_j]_c, x_j]_c = 0; \quad (4.30)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{ii} = -1$, $q_{jj}^{-1} = -q_{ij}q_{ji}q_{jk}q_{kj} \notin \{-1, q_{ij}q_{ji}\}$, $q_{ik}q_{ki} = 1$,

$$[(\text{ad}_c x_i)x_j, (\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k]_c = 0; \quad (4.31)$$

▷ si $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{jk}q_{kj} = 1$, $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ij}q_{ji}$, $q_{ki}q_{ik} \neq q_{ii}^{-1}$,

$$[(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i)^2 x_k]_c = 0; \quad (4.32)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $-q_{ii}$, $-q_{jj}$, $q_{ii}q_{ij}q_{ji}$, $q_{jj}q_{ji}q_{ij} \neq 1$,

$$(1 - q_{ij}q_{ji})q_{jj}q_{ji} [x_i, [(\text{ad}_c x_i)x_j, x_j]_c]_c - (1 + q_{jj})(1 - q_{jj}q_{ji}q_{ij}) ((\text{ad}_c x_i)x_j)^2 = 0; \quad (4.33)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{jj} = -1$, $q_{ii}q_{ij}q_{ji} \notin \mathbb{G}_6$, y además $m_{ij} \in \{4, 5\}$, o $m_{ij} = 3$, $q_{ii} \in \mathbb{G}_4$,

$$[x_i, [(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c]_c - \frac{1 - q_{ii}q_{ij}q_{ji} - q_{ii}^2 q_{ji}^2 q_{ij}^2 q_{jj}}{(1 - q_{ii}q_{ij}q_{ji})q_{ji}} ((\text{ad}_c x_i)^2 x_j)^2 = 0; \quad (4.34)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $4\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^\chi$, $q_{jj} = -1$ o $m_{ji} \geq 2$, y además $m_{ij} \geq 3$, o $m_{ij} = 2$, $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$,

$$[x_{3\alpha_i + 2\alpha_j}, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c = 0; \quad (4.35)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^\chi$, $5\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^\chi$, y $q_{ii}^3 q_{ij}q_{ji}$, $q_{ii}^4 q_{ij}q_{ji} \neq 1$,

$$[(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, x_{3\alpha_i + 2\alpha_j}]_c = 0; \quad (4.36)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $4\alpha_i + 3\alpha_j \in \Delta_+^\chi$, $5\alpha_i + 4\alpha_j \notin \Delta_+^\chi$,

$$[x_{4\alpha_i + 3\alpha_j}, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c = 0; \quad (4.37)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $5\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^\chi$, $7\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^\chi$,

$$[[(\text{ad}_c x_i)^3 x_j, (\text{ad}_c x_i)^2 x_j], (\text{ad}_c x_i)^2 x_j]_c = 0; \quad (4.38)$$

▷ si $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ son tales que $q_{jj} = -1$, $5\alpha_i + 4\alpha_j \in \Delta_+^\chi$,

$$[x_{2\alpha_i + \alpha_j}, x_{4\alpha_i + 3\alpha_j}]_c - \frac{b - (1 + q_{ii})(1 - q_{ii}\zeta)(1 + \zeta + q_{ii}\zeta^2)q_{ii}^6 \zeta^4}{a q_{ii}^3 q_{ij}^2 q_{ji}^3} x_{3\alpha_i + 2\alpha_j}^2 = 0, \quad (4.39)$$

donde $\zeta = q_{ij}q_{ji}$, $a = (1 - \zeta)(1 - q_{ii}^4 \zeta^3) - (1 - q_{ii}\zeta)(1 + q_{ii})q_{ii}\zeta$, $b = (1 - \zeta)(1 - q_{ii}^6 \zeta^5) - a q_{ii}\zeta$.

Notemos que en el enunciado del Teorema denotamos por x_i a los generadores del álgebra de Nichols. En lo que sigue usaremos reiteradas veces el isomorfismo $\mathcal{B}(V) \cong \mathfrak{u}^+(\chi)$ vía la aplicación $x_i \mapsto E_i$, de modo que también identificaremos a $\mathcal{B}(V)$ como subálgebra de $\mathfrak{u}(\chi)$.

Definimos para cada bicarácter χ con sistema de raíces finito el ideal $\mathcal{J}^+(\chi)$ de $\mathcal{U}^+(\chi)$ como el ideal generado por todas las relaciones del Teorema 4.2.1, excepto (4.18). Sean $\mathcal{J}^-(\chi) := \phi_4(\mathcal{J}^+(\chi))$, $\mathcal{J}(\chi) := (\mathcal{J}^+(\chi) + \mathcal{J}^-(\chi))$,

$$U(\chi) := \mathcal{U}(\chi)/\mathcal{J}(\chi), \quad U^\pm(\chi) := \mathcal{U}^\pm(\chi)/\mathcal{J}^\pm(\chi).$$

Probaremos en primer lugar que $\mathcal{J}^+(\chi)$ está contenido en el ideal de relaciones de la correspondiente álgebra de Nichols. El lema siguiente, presente en un trabajo en desarrollo con Agustín García Iglesias, también se usa implícitamente en varios trabajos.

Lema 4.2.2. *Sea $I \subset T(V)$ un bi-ideal trenzado de $T(V)$, de modo que se tiene un morfismo suryectivo de álgebras de Hopf canónico $\pi : R := T(V)/I \rightarrow \mathcal{B}(V)$. Sea $\mathbf{x} \in \ker \pi$, $\mathbf{x} \neq 0$ de grado mínimo, digamos $k \geq 2$. Entonces \mathbf{x} es primitivo.*

Demostración. Dado que π es un morfismo biálgebras trezadas, $\ker \pi$ es un bi-ideal:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n b_j \otimes c_j \in \ker \pi \otimes R + R \otimes \ker \pi,$$

para algunos elementos homogéneos $b_j, c_j \in \bigoplus_{i=1}^{k-1} R_i$, que satisfacen $\deg(b_j) + \deg(c_j) = k$. Podemos considerar para cada j que $b_j \in \ker \pi$ o $c_j \in \ker \pi$. Si $b_j \in \ker \pi$, entonces $b_j = 0$ por la hipótesis de minimalidad de k . Lo mismo vale si $c_j \in \ker \pi$; en consecuencia, \mathbf{x} es primitivo en R . \square

Dado que trabajaremos con ideales \mathbb{N}_0^θ -graduados, será útil introducir la siguiente notación: dados $\beta = \sum_i b_i \alpha_i$, $\gamma = \sum_i c_i \alpha_i$, donde $b_i, c_i \in \mathbb{N}_0$, diremos que $\beta \geq \gamma$ (respectivamente, $\beta > \gamma$) si $b_i \geq c_i$ (respectivamente, $b_i > c_i$) para todo $i \in \{1, \dots, \theta\}$.

Proposición 4.2.3. *$\mathcal{J}^+(\chi)$ es un bi-ideal trenzado de $\mathcal{U}^+(\chi)$, y existe una proyección canónica de álgebras de Hopf $\pi_\chi : U(\chi) \rightarrow \mathfrak{u}(\chi)$ tal que $\pi(U^\pm(\chi)) = \mathfrak{u}^\pm(\chi)$.*

Más aún, la multiplicación $m : U^+(\chi) \otimes U^0(\chi) \otimes U^-(\chi) \rightarrow U(\chi)$ es un isomorfismo de espacios graduados.

Demostración. Podemos ordenar las relaciones de acuerdo a su \mathbb{N} -graduación. Luego de cocientar por las relaciones de grado $n - 1$, las relaciones de grado n son primitivas de acuerdo al Lema 4.2.2, pues se observa en cada caso que se verifican las relaciones del Teorema 2.2.10 que tienen grado menor. Más aún, observamos que basta con que se satisfagan las relaciones que tienen menor graduación en \mathbb{N}^θ . Por ejemplo, cada relación cuántica de Serre es primitiva, lo mismo que cada $x_i^{\mathbb{N}_i}$; así, en el cociente por estas relaciones se tiene que $\mathbf{x} = [(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i) x_j]_c$ es primitivo, bajo las condiciones que se piden para esta relación en (4.23), pues ya hemos cocientado por x_i^3, x_j^2 , de modo que se verifican

$$(\text{ad}_c x_i)^3 x_j = (\text{ad}_c x_j)^2 x_i = 0.$$

De modo similar se trabaja con las restantes relaciones, y así cada cociente parcial es una biálgebra trenzada (y por lo tanto álgebra de Hopf); finalmente, $U^+(\chi)$ es una biálgebra trenzada, de donde $\mathcal{J}^+(\chi)$ es un bi-ideal trenzado.

Por la definición de álgebra de Nichols se tiene que $\mathcal{J}^+(\chi) \subseteq I^+(\chi)$. De acuerdo al Lema 4.1.5, $\mathcal{J}^+(\chi)\mathcal{U}^0(\chi)\mathcal{U}^-(\chi)$ es un ideal de Hopf de $\mathcal{U}(\chi)$, y por lo tanto se verifican las condiciones equivalentes de la Proposición 4.1.4. Así, existe una proyección de álgebras de Hopf y una descomposición triangular como en el enunciado. \square

Ahora probaremos que los isomorfismos de la primer parte del Teorema 4.1.9 inducen isomorfismos entre las correspondientes álgebras $U(\chi)$. Para ello debemos empezar probando que $T_p(\mathcal{J}(\chi)) \subset \mathcal{J}(s_p^*\chi)$. Lo haremos probando que vale la inclusión para cada relación que genera el ideal, para lo cual primero daremos algunos lemas generales que nos permitirán reducir la cantidad de cálculos explícitos.

Lema 4.2.4. *Sea l una palabra de Lyndon tal que $[l]_c \cong \sum_{w \in S_{I^+(\chi)}, w \succ l} a_w w \pmod{I^+(\chi)}$, para algunos escalares $a_w \in \mathbf{k}$. Sea I un ideal de Hopf trenzado \mathbb{N}^θ -graduado de $\mathcal{U}^+(\chi)$ tal que los conjuntos de palabras buenas $S_{I^+(\chi)}$, S_I coinciden en los términos $w \succ l$, y l se escribe como combinación lineal de palabras mayores módulo I . Entonces, $[l]_c \cong \sum_{w \in S_{I^+(\chi)}, w \succ l} a_w w \pmod{I}$.*

Demostración. Es una consecuencia directa del Corolario 1.7.12, pues por dicho resultado $[l]_c$ se escribe como combinación lineal de hiperpalabras buenas módulo I , mayores según el orden \succ . Tales hiperpalabras coinciden con las correspondientes hiperpalabras buenas para $I^+(\chi)$ por hipótesis, y además $I \subseteq I^+(\chi)$, de donde la combinación lineal debe ser la misma, pues las hiperpalabras buenas forman una base para un complemento del ideal en $\mathcal{U}^+(\chi)$. \square

Lema 4.2.5. *Sea I un ideal \mathbb{N}_0^θ -homogéneo de $T(V)$, $\theta = \dim V$. Sean S, T dos conjuntos minimales de generadores homogéneos de I . Asumimos que para cada $\alpha \in \mathbb{N}^\theta$ existe a lo sumo un generador en S (respectivamente en T) de grado α , y denotamos $I(S, \alpha)$ (respectivamente, $I(T, \alpha)$) al ideal generado por los elementos de S (respectivamente, T) de grado $\beta < \alpha$.*

Para cada $s \in S$ de grado $\alpha \in \mathbb{N}_0^\theta$, existe $t \in T$ de grado α y un escalar $c \in \mathbf{k}^\times$ tal que $s \cong c t \pmod{I(S, \alpha)}$. Además, $I(S, \alpha) = I(T, \alpha)$.

Demostración. Lo probaremos por inducción en el grado de los generadores. Sea s de grado α minimal para el orden parcial definido antes en \mathbb{N}_0^θ . Luego, $\dim I_\alpha = 1$, de donde existe un elemento de T que pertenece a este subespacio de dimensión 1 de I .

Si el grado de s no es minimal, podemos aplicar hipótesis inductiva para los generadores de grados menores, de modo que para cada s' de grado menor existe el correspondiente $t' \in T$ del mismo grado que satisface las condiciones del enunciado, y así $I(S, \alpha) = I(T, \alpha)$. Así,

$$\dim I(S, \alpha)_\alpha = \dim I(T, \alpha)_\alpha = \dim I_\alpha - 1,$$

pues S es un conjunto minimal de generadores, y por hipótesis existe un único generador de grado α . Como T también es un conjunto de generadores de I , existe $t \in I - I(T, \alpha) = I - I(S, \alpha)$, de grado α , de donde se sigue el enunciado. \square

Observación 4.2.6. Este Lema nos permite identificar, salvo escalares y relaciones de grados menores, las correspondientes relaciones de un cierto grado tales que, en los grados menores, hay a lo sumo una única relación de dicho grado. De esta forma se necesita considerar relaciones como en el Teorema 2.2.10 para un orden de las letras, de modo que se tenga un conjunto minimal, y las correspondientes relaciones a otro orden tienen el mismo grado. Por ejemplo, si $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$ para un par de vértices i, j , entonces la relación cuántica de Serre $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j$ está en un conjunto minimal correspondiente al orden en las letras $x_i < x_j$, de modo que la palabra correspondiente al orden $x_i > x_j$ satisface:

$$[x_j x_i^{m_{ij}+1}]_c = [\cdots [(\text{ad}_c x_j) x_i, x_i]_c, \cdots]_c, x_i]_c = a (\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j,$$

para algún escalar $a \in \mathbf{k}^\times$.

También, si $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ij} q_{ji} \in \{\pm q_{ii}, -1\}$, $q_{jj} = -1$ (es decir, algunas de las trenzas estándares de tipo B_2), notamos que

$$[(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i) x_j]_c \cong b [(\text{ad}_c x_j) x_i, [(\text{ad}_c x_j) x_i, x_i]_c]_c \pmod{I},$$

para algún escalar $b \in \mathbf{k}^\times$, donde I es el ideal generado por x_i^3 y x_j^2 , pues tales relaciones corresponden a distintos conjuntos de relaciones minimales, y son las únicas (en los respectivos conjuntos) de grado $3\alpha_i + 2\alpha_j$.

Lema 4.2.7. Sean $Y, Z \in \mathcal{U}_p^+(\chi)$ elementos homogéneos de grados $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^\theta$, respectivamente, tales que $(\text{ad}_c E_p)Y = 0$. Entonces,

$$[(\text{ad}_c E_p)Z, Y]_c = (\text{ad}_c E_p) [Z, Y]_c. \quad (4.40)$$

Si además $\chi(\alpha_p, \beta)\chi(\beta, \alpha_p) = 1$, entonces

$$\chi(\alpha_p, \beta) [Y, (\text{ad}_c E_p)Z]_c = (\text{ad}_c E_p) [Y, Z]_c. \quad (4.41)$$

Demostración. Ambas identidades se deducen de (1.31). Por ejemplo, para la segunda,

$$\begin{aligned} (\text{ad}_c E_p) [Y, Z]_c &= [E_p, [Y, Z]_c]_c = [[E_p, Y]_c, Z]_c + \chi(\alpha_p, \beta) Y [E_p, Z]_c - \chi(\beta, \gamma) [E_p, Z]_c Y \\ &= \chi(\alpha_p, \beta) (Y (\text{ad}_c E_p) Z - \chi(\beta, \gamma) \chi(\beta, \alpha_p) (\text{ad}_c E_p) Z Y) = \chi(\alpha_p, \beta) [Y, (\text{ad}_c E_p) Z]_c, \end{aligned}$$

donde usamos la condición $\chi(\alpha_p, \beta)\chi(\beta, \alpha_p) = 1$. La primer identidad es directa. \square

Lema 4.2.8. Sean $i, p \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $m_{pi} \geq 2$ y $m_{ip} = 1$. Entonces, en $U(s_p^* \chi)$,

$$\left[\underline{E}_{i, m_{pi}}^+, \underline{E}_{i, m_{pi}-1}^+ \right]_c = [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}} \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}-1} \underline{E}_i]_c = 0.$$

Observación 4.2.9. Notemos que tal relación pertenece al ideal $I^+(s_p^* \chi)$: como $2\alpha_i + \alpha_p \notin \Delta_+^\chi$, se tiene $s_p(2\alpha_i + \alpha_p) = 2\alpha_i + (2m_{pi} - 1)\alpha_p \notin \Delta_+^\chi$, de modo que se verifica tal relación en la correspondiente álgebra de Nichols $\mathbf{u}^+(s_p^* \chi)$, de acuerdo al Corolario 2.2.7.

Por otro lado, ya hemos pedido en la definición del ideal $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$ algunas de tales relaciones, como ocurre en (4.23). Lo que probamos aquí es que las restantes relaciones que no pedimos en la definición del ideal $\mathcal{J}^+(\chi)$ son redundantes; es decir, están generadas por relaciones de grado menor.

Demostración. Miramos los distintos valores que puede tomar m_{pi} ; para empezar, sea $m_{pi} = 2$. Así, $q_{pp} \in \mathbb{G}_3$ o $q_{pp}^2 q_{ip} q_{pi} = 1$, y también $q_{ii} = -1$ o $q_{ii} q_{ip} q_{pi} = 1$. Si $\underline{m}_{ip} = 1$ para $s_p^* \chi$, entonces mirando la prueba de la Proposición 3.1.9 vemos que p, i determinan un subdiagrama estándar. Si $q_{pp}^3 \neq 1$ o $q_{ii} \neq -1$ entonces $E_p^2 E_i E_p E_i$ se escribe como combinación de palabras mayores módulo el ideal $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$, a partir de las correspondientes relaciones cuánticas de Serre, pues en el primer caso $E_p^2 E_i E_p$ aparece con coeficiente no nulo en $(\text{ad}_c E_p)^3 E_i$, de modo que $E_p^2 E_i E_p E_i$ es combinación de palabras mayores excepto por $E_p^3 E_i^2$, la cual está en el ideal si $q_{ii} = -1$, o $E_p E_i^2$ aparece con coeficiente no nulo en $(\text{ad}_c E_i)^2 E_p$, de modo que despejamos $E_p^2 E_i E_p E_i$ como combinación de palabras mayores. A partir del Lema 4.2.4, $[\underline{E}_{i,2}^+, \underline{E}_{i,1}^+]_c = 0$. Una prueba similar se obtiene si $q_{pp}^3 = 1$ pero $q_{ii} \neq -1$. Si $q_{pp}^3 = 1$, $q_{ii} = -1$, la relación corresponde a (4.23), un generador de $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Ahora, si $m_{pi} = 2$, y $\underline{m}_{ip} > 1$ para $s_p^* \chi$, entonces en $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$ se tiene la relación (4.33), de la cual se obtiene a $E_p E_i E_p E_i$ como combinación lineal de otras palabras, donde la única que es mayor es $E_p^2 E_i^2$. A partir de tal relación se trabaja como antes y se obtiene que $[\underline{E}_{i,2}^+, \underline{E}_{i,1}^+]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Si $m_{pi} = 3$, entonces $\underline{m}_{ip} = 1$ para $s_p^* \chi$, o existe $\zeta \in \mathbb{G}_{24}$ tal que $q_{pp} = \zeta^6$, $q_{ii}^{-1} = q_{pi} q_{ip} = \zeta$. En el primer caso, se deduce primero que (4.34) vale incluso si $q_{pp} \notin \mathbb{G}_4$, pues se deduce de la relación cuántica de Serre $(\text{ad}_c E_p)^4 E_i = 0$ que $\underline{E}_p^3 E_i \underline{E}_p E_i$ es combinación lineal de palabras mayores y se aplica el Lema 4.2.4; usando esta relación se trabaja como antes, escribiendo primero a $E_p^2 E_i E_p^2 E_i$ como combinación lineal de otras palabras y de allí deduciendo que $E_p^3 E_i E_p^2 E_i$ es combinación lineal de palabras mayores, de modo que podemos aplicar nuevamente el Lema 4.2.4. En el segundo caso, expresamos $\underline{E}_p^3 E_i \underline{E}_p^2 E_i$ como combinación lineal de palabras mayores a partir de las relaciones cuánticas de Serre, o a partir de (4.34), obteniendo la misma conclusión.

Si $m_{pi} = 4, 5$, entonces $\underline{m}_{ip} = 1$ para $s_p^* \chi$. En tal caso, trabajamos como en los casos anteriores y obtenemos dicha relación a partir de (4.34) o (4.23), según $3\alpha_p + 2\alpha_i$ pertenezca o no a $\Delta_+^{s_p^* \chi}$. Ambas situaciones nos permiten escribir a $\underline{E}_p^4 E_i \underline{E}_p^3 E_i$ o $\underline{E}_p^5 E_i \underline{E}_p^4 E_i$, según corresponda, como combinación lineal de palabras mayores, y entonces aplicamos el Lema 4.2.4. \square

Probaremos a continuación que T_p aplica cada generador del ideal $\mathcal{J}^+(\chi)$ en un elemento de $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$, lo cual será el primer paso para inducir isomorfismos entre miembros de la familia de álgebras $U(\chi)$.

Lema 4.2.10. *Sea i un vértice que no es de Cartan. Entonces $T_p(E_i^{N_i}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.*

Además, si i, j son tales que $q_{ii} = q_{ij} q_{ji} = q_{jj} = -1$, entonces $T_p((\text{ad}_c E_i) E_j^2) \in \mathcal{J}(s_p^ \chi)$.*

Demostración. Consideremos la primer relación. Si $i = p$, entonces p no es Cartan para χ , de donde p tampoco es Cartan para $s_p^* \chi$. Luego, por la definición del ideal $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$,

$$T_p(E_p^{N_p}) = \underline{E}_p^{N_p} = \phi_4(\underline{E}_p^{N_p}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Nos resta probarlo para $i \neq p$. En tal caso, $T_p(E_p^{N_p}) = (\underline{E}_{i, m_{pi}}^+)^{N_i}$.

Si $m_{pi} = 0$, entonces $\underline{E}_{i,0}^+ = E_i$ y $q_{ip} q_{pi} = 1$, de donde para cada $j \neq p$ se tiene $\underline{q}_{ij} \underline{q}_{ji} = q_{ij} q_{ji}$. Luego, i no es Cartan para $s_p^* \chi$, y se tiene $T_p(E_i^{N_i}) = \underline{E}_i^{N_i} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Consideramos $m_{pi} \neq 0$. Como i no es Cartan, existe $j \neq i$ tal que $N_i - 1 = m_{ij} \geq 1$.

Asumimos primero que $j = p$, es decir $m_{ip} + 1 = N_i$. Si $m_{ip} = 1$, es decir $q_{ii} = -1$, hay dos posibilidades. Si $q_{ip}q_{pi} \neq 1$, usamos el Lema 4.2.8, la identidad (1.31) y la relación cuántica de Serre $(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p)^{m_{pi}+1} \underline{E}_i = 0$ para calcular en $U(s_p^* \chi)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\underline{E}_p, \left[\underline{E}_{i,m_{pi}}^+, \underline{E}_{i,m_{pi}-1}^+ \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \\ &= (s_p^* \chi(\alpha_p, m_{pi} \alpha_p + \alpha_i) - s_p^* \chi(m_{pi} \alpha_p + \alpha_i, (m_{pi} - 1) \alpha_p + \alpha_i)) \left(\underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \right)^2 \\ &= (\chi(-\alpha_p, \alpha_i) - \chi(\alpha_i, \alpha_p + \alpha_i)) \left(\underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \right)^2 = q_{pi}^{-1} (1 + q_{ip} q_{pi}) \left(\underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \right)^2, \end{aligned}$$

de donde deducimos que $T_p(E_i^2) = \left(\underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \right)^2 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$. Si $q_{pi}q_{ip} = -1$ hay 3 posibilidades para el subdiagrama que determinan i, p : es estándar como en la Proposición 3.1.9 (a) con $q = -1$, o es Cartan B_2 para $q \in \mathbb{G}_4$, o es Cartan G_2 para $q \in G_6$. Cada uno de ellos se deduce como antes usando (4.23), o las relaciones cuánticas de Serre junto con los Lemas anteriores.

Si $m_{ip} > 1$ y $m_{pi} = 1$, calculamos a partir de (1.31) y de $(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i = 0$,

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p \left[\underline{E}_{i,1}^+, \underline{E}_i \right]_{\underline{c}} &= (s_p^* \chi(\alpha_p, \alpha_i + \alpha_p) - s_p^* \chi(\alpha_i + \alpha_p, \alpha_i)) \left(\underline{E}_{i,1}^+ \right)^2 \\ &= q_{pi}^{-1} (1 - q_{ii} q_{ip} q_{pi}) \left(\underline{E}_{i,1}^+ \right)^2. \end{aligned}$$

A partir de tal relación y nuevamente (1.31) calculamos también

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p \left[\underline{E}_{i,1}^+, \left[\underline{E}_{i,1}^+, \underline{E}_i \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} &= (q_{pi}^{-1} - q_{ii} q_{ip}) (s_p^* \chi(\alpha_p, \alpha_i + \alpha_p) - s_p^* \chi(\alpha_i + \alpha_p, 2\alpha_i + \alpha_p)) \left(\underline{E}_{i,1}^+ \right)^3 \\ &= q_{pi}^{-2} (1 - q_{ii} q_{ip} q_{pi}) (1 - q_{ii}^2 q_{ip} q_{pi}) \left(\underline{E}_{i,1}^+ \right)^3. \end{aligned}$$

Luego, si $m_{ip} = 2$ y $m_{pi} = 1$, se tiene $\alpha_p + 3\alpha_i \notin \Delta_+^X$, con lo cual

$$s_p(\alpha_p + 3\alpha_i) = 3\alpha_i + 2\alpha_p \notin \Delta_+^{s_p^* \chi}.$$

A partir del Lema anterior deducimos que $[(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i)^2 \underline{E}_p, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i) \underline{E}_p]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}^+(s_p^* \chi)$, con lo cual

$$\left[\underline{E}_{i,1}^+, \left[\underline{E}_{i,1}^+, \underline{E}_i \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi),$$

al aplicar el Lema 4.2.5 si es minimal ($q_{ii}^2 q_{ip} q_{pi} \neq 1$, de donde $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$), o por cálculo directo en otro caso, pues es Cartan de tipo B_2 o estándar con $q_{pp} = -1$. Luego,

$$T_p(E_i^3) = \left(\underline{E}_{i,1}^+ \right)^3 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Si $m_{ip} = 3$, $m_{pi} = 1$, se tiene $s_p(\alpha_p + 4\alpha_i) = 4\alpha_i + 3\alpha_p \notin \Delta_+^{s_p^* \chi}$, de modo que

$$\left[\underline{E}_{i,1}^+, \left[\underline{E}_{i,1}^+, \left[\underline{E}_{i,1}^+, \underline{E}_i \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi),$$

relación que se obtiene escribiendo $(\underline{E}_p \underline{E}_i)^3 \underline{E}_i$ como combinación lineal de palabras mayores (para el orden $p < i$) a partir de (4.35). Nuevamente, se deduce como en el caso anterior que $(\underline{E}_{i,1}^+)^4 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Si $m_{ip} = 4$, entonces necesariamente $q_{ii}^4 q_{ip} q_{pi} \neq 1$, de donde se obtiene $(\underline{E}_{i,1}^+)^5 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$ de modo análogo a partir de (4.37). Notamos también que no existen diagramas para $m_{ip} \geq 5$ tales que $q_{ii}^{m_{ip}+1} = 1$.

Ahora, si $m_{ip}, m_{pi} > 1$, tenemos 3 posibilidades:

- $m_{ip} = m_{pi} = 2$, en cuyo caso notamos que en $s_p^* \chi$ se verifica (4.35), y además que $q_{pp} \in \mathbb{G}_3$. A partir de tal relación escribimos a $\underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i$ como combinación lineal de otras palabras que comienzan con \underline{E}_p o que contienen a \underline{E}_p^3 . Al multiplicar por \underline{E}_p^2 a izquierda, notamos que $\underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i$ es combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$, pues $\underline{E}_p^3 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, de donde $T_p(E_i^3) = ((\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i)^3 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.
- $m_{ip} = 3, m_{pi} = 2$, en cuyo caso $q_{ii} = \zeta^6, q_{pp} = \zeta^8, q_{ip} q_{pi} = \zeta^{11}$ para $\zeta \in \mathbb{G}_{24}$, y se satisface (4.39) para $s_p^* \chi$. A partir de tal relación escribimos $\underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i$ como combinación lineal de otras palabras que comienzan con \underline{E}_p o que contienen a \underline{E}_p^3 . Multiplicamos por \underline{E}_p^2 a izquierda, y así $(\underline{E}_p^2 \underline{E}_i)^4$ se escribe como combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$, pues $\underline{E}_p^3 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, de donde $T_p(E_i^4) = ((\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i)^4 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.
- $m_{ip} = 2, m_{pi} = 3$, situación válida para dos diagramas, donde en $s_p^* \chi$ se verifica (4.38). Usando dicha relación escribimos a $\underline{E}_i \underline{E}_p^3 \underline{E}_i \underline{E}_p^3 \underline{E}_i$ como combinación lineal de otras palabras que comienzan con \underline{E}_p o que contienen a \underline{E}_p^4 . Al multiplicar por \underline{E}_p^3 a izquierda, notamos que $\underline{E}_p^3 \underline{E}_i \underline{E}_p^3 \underline{E}_i \underline{E}_p^3 \underline{E}_i$ es combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$, pues $\underline{E}_p^4 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$ para uno de los diagramas y $(\text{ad}_c \underline{E}_p)^4 \underline{E}_i \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$ para el otro, de donde, en ambos casos, $T_p(E_i^3) = ((\text{ad}_c \underline{E}_p)^3 \underline{E}_i)^3 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Para finalizar esta parte de la prueba, supongamos que $j \neq p$, de modo que $q_{ii}^{m_{ip}} q_{ip} q_{pi} = 1$, $m_{ip} < N_i - 1$, y así $1 \leq m_{ip} < m_{ij}$. Luego, i, j, p determinan un diagrama conexo, con i vértice que no es de Cartan, conectado a j y p , y q_{ii} es una raíz de la unidad de orden $N_i \geq 2$. Mirando los posibles subdiagramas encontramos las siguientes posibilidades:

- $q_{ii} \in \mathbb{G}_3, q_{pp} \in \{q_{ii}, -1\}, m_{ip} = m_{pi} = 1, m_{ij} = 2, m_{pj} = m_{jp} = 0$, o
- $q_{ii} \in \mathbb{G}_4, q_{pp} = -1, q_{ip} q_{pi} q_{ii} = 1, q_{ij} q_{ji} = q_{ii}, m_{pj} = m_{jp} = 0, m_{ij} = 3$ (el primer diagrama de tipo súper $G(3)$, donde $q \in \mathbb{G}_4$).

Ambos casos se resuelven de modo muy similar a los casos en que $m_{pi} = 1$.

Consideremos ahora la segunda relación. Usando que $q_{ij} q_{ji} = -1$, tenemos que

$$((\text{ad}_c E_j) E_i)^2 = ((\text{ad}_c E_i) E_j)^2 + 2q_{ij} (E_i E_j^2 E_i + E_j E_i^2 E_j).$$

Como $T_p(E_i^2), T_p(E_j^2) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$ por la primer parte, y T_p es un morfismo de álgebras, basta probar que $T_p(((\text{ad}_c E_i) E_j)^2) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$ para que también se verifique $T_p(((\text{ad}_c E_j) E_i)^2) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$. De

hecho, lo anterior también prueba que basta tener una de estas relaciones si buscamos tener un conjunto minimal de relaciones.

Si $p = j$, se tiene que

$$\begin{aligned} T_p \left(((\text{ad}_c E_i) E_p)^2 \right) &= \left(\underline{E}_{i,1}^+ \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} - q_{ip} \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} \underline{E}_{i,1}^+ \right)^2 \\ &= \left(\left(\underline{F}_p \underline{E}_{i,1}^- 2 \underline{L}_p \underline{E}_i \right) \underline{L}_p^{-1} - q_{ip} q_{pp} q_{ip} \underline{F}_p \underline{E}_{i,1}^+ \underline{L}_p^{-1} \right)^2 \\ &= \left(-2 q_{ip}^{-1} \underline{E}_i \right)^2 = 4 q_{ip}^2 \underline{E}_i^2 \in \mathcal{J}(s_p^* \chi), \end{aligned}$$

pues $q_{pp} = q_{pi} q_{ip} = q_{ii} = -1$. Consideramos entonces el caso $p \neq i, j$ (el caso $p = i$ es análogo como ya se ha explicado). Si $m_{pi}, m_{pj} \neq 0$, tenemos dos posibilidades:

- $q_{pp} = -1$, $q_{ip} q_{pi} q_{jp} q_{pj} = -1$ y tenemos un diagrama de tipo súper $D(2, 1; \alpha)$, o
- $q_{pp} = q_{ip}^{-1} q_{pi}^{-1} = -q_{jp} q_{pj} \in \mathbb{G}_3 \cup \mathbb{G}_4 \cup \mathbb{G}_6$.

En el primer caso o en el segundo caso con $q_{pp} \in \mathbb{G}_4$,

$$T_p \left(((\text{ad}_c E_i) E_j)^2 \right) = [(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_j]_{\underline{c}}^2.$$

A partir de la relación (4.22) si $q_{pp} = -1$ o de las relaciones cuánticas de Serre $(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i = (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j = 0$ si $q_{pp} \in \mathbb{G}_4$, $\underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j \underline{E}_p$ es combinación lineal de palabras mayores, de donde $(\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j)^2$ es combinación lineal de palabras mayores. Luego,

$$[(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_j]_{\underline{c}}^2 \in \mathcal{J}^+(s_p^* \chi),$$

pues usamos el Lema 4.2.4, el cual vale también para potencias de palabras elevadas a su altura, y además el Lema 2.2.8, que nos dice que tal relación está en $I^+(s_p^* \chi)$.

En el segundo caso con $q_{pp} \in \mathbb{G}_3 \cup \mathbb{G}_6$ se tiene

$$T_p \left(((\text{ad}_c E_i) E_j)^2 \right) = [(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j]_{\underline{c}}^2.$$

Como antes, se escribe $(\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j)^2$ como combinación lineal de palabras mayores a partir de las relaciones cuánticas de Serre junto con (4.25), de donde se deduce que $T_p \left(((\text{ad}_c E_i) E_j)^2 \right) \in \mathcal{J}^+(s_p^* \chi)$ también en este caso. \square

Lema 4.2.11. Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$. Entonces $T_p \left((\text{ad}_c E_i)^{m_{ij}+1} E_j \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Demostración. (i) El caso $p = i$ ya fue considerado en la primer parte del Teorema 4.1.9.

(ii) Sea $p = j$: consideraremos los diferentes m_{ip} posibles. Para $m_{ip} = 0$, usando que $q_{ip} q_{pi} = 1$,

$$T_p \left((\text{ad}_c E_i) E_p \right) = \underline{E}_i \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} - q_{ip} \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} \underline{E}_i = (\underline{E}_i \underline{F}_p - \underline{F}_p \underline{E}_i) \underline{L}_p^{-1} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Consideremos $m_{ip} = 1$; a partir de (4.12) se tiene

$$\begin{aligned}
T_p((\text{ad}_c E_i)E_p) &= \underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} - q_{ip} \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} \underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \\
&= \left(\underline{F}_p \underline{E}_{i,m_{pi}}^+ + (m_{pi})_{q_{pp}} (q_{pp}^{m_{pi}-1} q_{pi} q_{ip} - 1) \underline{L}_p \underline{E}_{i,m_{pi}-1}^+ \right) \underline{L}_p^{-1} \\
&\quad - q_{ip} s_p^+ \chi(m_{pi} \alpha_p + \alpha_i, \alpha_p) \underline{F}_p \underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \underline{L}_p^{-1} \\
&= (m_{pi})_{q_{pp}} (q_{pp}^{m_{pi}-1} q_{pi} q_{ip} - 1) s_p^+ \chi((m_{pi}-1) \alpha_p + \alpha_i, \alpha_p)^{-1} \underline{E}_{i,m_{pi}-1}^+ \\
&\quad + \underline{F}_p \underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \underline{L}_p^{-1} - q_{ip} \chi(\alpha_i, -\alpha_p) \underline{F}_p \underline{E}_{i,m_{pi}}^+ \underline{L}_p^{-1} \\
&= (m_{pi})_{q_{pp}} (q_{pp}^{-1-m_{pi}} q_{pi}^{-1} q_{ip}^{-1} - 1) q_{ip} q_{pp} \underline{E}_{i,m_{pi}-1}^+
\end{aligned} \tag{4.42}$$

A partir de esta relación y la Observación 4.1.10 obtenemos, para $m_{pi} = 1$,

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^2 E_p) = T_p([E_i, (\text{ad}_c E_i)E_p]_c) = [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, a_1 \underline{E}_i]_{\underline{c}},$$

donde denotamos $a_{m_{pi}} = (m_{pi})_{q_{pp}} (q_{pp}^{-1-m_{pi}} q_{pi}^{-1} q_{ip}^{-1} - 1) q_{ip} q_{pp} \in \mathbf{k}^\times$. Tal elemento está en $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$ pues también se tiene $m_{ip} = 1$, de donde $(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_p \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$. Sea entonces $m_{pi} \geq 2$; de acuerdo al Lema 4.2.8 tenemos que

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^2 E_p) = \left[\underline{E}_{i,m_{pi}}^+, a_{m_{pi}} \underline{E}_{i,m_{pi}-1}^+ \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Consideremos $m_{ip} = 2$, con $q_{ii}^3 \neq 1$. Mirando la lista de diagramas de rango 2 posibles, vemos que $m_{pi} = 1$, o existe $\zeta \in \mathbb{G}_9$ tal que $q_{ii} = -\zeta$, $q_{ip} q_{pi} = \zeta^7$, $q_{pp} = \zeta^3$. En el primer caso, $q_{pp} \in \{-1, q_{ii}^2\}$, con lo cual es estándar de tipo B_2 , y la relación (4.23) pertenece a $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$ de acuerdo al Lema 4.2.8. A partir de esta observación se tiene

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^3 E_p) = a_1 \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

En el segundo caso, se tiene la siguiente matriz de trenza para $s_p^* \chi$: $q_{ii} = -1$, $q_{ip} q_{pi} = \zeta^8$, $q_{pp} = \zeta^3$. Luego,

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^3 E_p) = \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi),$$

pues estamos en las condiciones de (4.36).

Nos resta considerar $m_{ip} \in \{3, 4, 5\}$. Primero, si $m_{pi} > 1$, la única posibilidad es $m_{ip} = 3$, $m_{pi} = 2$, para el diagrama

$$\circ^{-\zeta} \text{---} \overset{-\zeta^{12}}{\text{---}} \circ^{\zeta^5},$$

donde $\zeta \in \mathbb{G}_{15}$ y $q_{ii} = -\zeta$; al aplicar s_p se obtiene

$$\circ^{-1} \text{---} \overset{-\zeta^{13}}{\text{---}} \circ^{\zeta^5}.$$

A partir de (4.37) escribimos a $\underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i$ como combinación lineal de otras palabras que comienzan en \underline{E}_p , o que contienen a \underline{E}_p^3 , o que son mayores para el orden $p < i$. Multiplicando a

izquierda por \underline{E}_p^2 y usando que $\underline{E}_p^3 \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, escribimos a $(\underline{E}_p^2 \underline{E}_i)^3 \underline{E}_p \underline{E}_i$ como combinación lineal de palabras mayores, módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$. Usando el Lema 4.2.4 tenemos que

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^4 E_p) = \left[\underline{E}_{i,2}^+, \left[\underline{E}_{i,2}^+, \left[\underline{E}_{i,2}^+, \underline{E}_{i,1}^+ \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} = [(\underline{E}_p^2 \underline{E}_i)^3 \underline{E}_p \underline{E}_i]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Nos resta entonces el caso $m_{pi} = 1$, para el cual notamos que

$$\begin{aligned} s_p(m_{ip}\alpha_i + \alpha_p) &= m_{ip}\alpha_i + (m_{pi} - 1)\alpha_p \in \Delta_+^{s_p^*\chi}, \\ s_p((m_{ip} + 1)\alpha_i + \alpha_p) &= (m_{ip} + 1)\alpha_i + m_{pi}\alpha_p \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}. \end{aligned}$$

Si $q_{pp} = \underline{q}_{pp} \neq -1$ entonces $m_{pi} = 3$ y $(\underline{E}_p \underline{E}_i)^2 \underline{E}_p \underline{E}_i^2$ es combinación lineal de palabras mayores, usando la relación cuántica de Serre $(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i = 0$ primero para despejar $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p$ como combinación de las palabras $\underline{E}_p^2 \underline{E}_i$, $\underline{E}_i \underline{E}_p^2$ y luego la relación (4.34), que también vale en $U(s_p^*\chi)$. A partir de tal relación y usando el Corolario 1.7.13 deducimos que

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^4 E_p) = \left[\underline{E}_{i,1}^+, \left[\underline{E}_{i,1}^+, \left[\underline{E}_{i,1}^+, \underline{E}_i \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

En los restantes casos, $q_{pp} = -1$ y $m_{ip} \in \{3, 4, 5\}$, y también se obtiene que

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^{m_{ip}+1} E_p) = [\underline{E}_{m_{pi}\alpha_i + (m_{pi}-1)\alpha_p}, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^*\chi),$$

pues se sigue de las relaciones (4.35), (4.37) o (4.39), según corresponda.

(iii) Sea $p \neq j$: si $m_{pi} = 0$, entonces $q_{ip}q_{pi} = 1$ y se tiene que $\underline{q}_{ii} = q_{ii}$, $\underline{q}_{ij}\underline{q}_{ji} = q_{ij}q_{ji}$, de modo que se satisface $\underline{m}_{ij} = m_{ij}$, y $(\text{ad}_c \underline{E}_i)^{m_{ij}+1} \underline{E}_j = 0$ en $U(s_p^*\chi)$. Además, en $U(s_p^*\chi)$ se tiene que $\underline{E}_p \underline{E}_i = \underline{q}_{pi} \underline{E}_p \underline{E}_i$, con lo cual, por la segunda parte del Lema 4.2.7,

$$(\text{ad}_c \underline{E}_i)(\text{ad}_c \underline{E}_p)X = \underline{q}_{ip}(\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_i)X,$$

para cada $X \in U(s_p^*\chi)$. A partir de la Observación 4.1.10 y de los resultados anteriores, en $U(s_p^*\chi)$ se tiene

$$\begin{aligned} T_p((\text{ad}_c E_i)^{m_{ij}+1} E_j) &= (\text{ad}_c \underline{E}_i)^{m_{ij}+1} (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pj}} \underline{E}_j \\ &= \underline{q}_{ip}^{m_{pj}(m_{ij}+1)} (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pj}} (\text{ad}_c \underline{E}_i)^{m_{ij}+1} \underline{E}_j = 0. \end{aligned}$$

Luego consideramos $m_{pi} \neq 0$. Si $m_{ij} = m_{pj} = 0$, aplicamos el Lema 4.2.7 y tenemos

$$T_p((\text{ad}_c E_i)E_j) = [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}} \underline{E}_i, \underline{E}_j]_{\underline{c}} = (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}} \left([\underline{E}_i, \underline{E}_j]_{\underline{c}} \right) = 0.$$

pues como $\underline{q}_{ij}\underline{q}_{ji} = q_{ij}q_{ji} = 1$, en $U(s_p^*\chi)$ se tiene $[\underline{E}_i, \underline{E}_j]_{\underline{c}} = 0$. En consecuencia consideramos un diagrama conexo entre i, j y p .

Sea ahora $m_{ij} = 0$, $m_{pj} \neq 0$. Si $q_{pp} = -1$ se tiene $m_{pi} = m_{pj} = 1$. Luego, $\underline{q}_{ij}\underline{q}_{ji} = q_{ip}q_{pi}q_{jp}q_{pj}$, y se deduce que $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j$ es combinación lineal de palabras mayores para el orden $p < i < j$, módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, en los dos casos posibles:

- si $q_{ij}q_{ji} = 1$, de modo directo a partir de (4.25),
- si $q_{ij}q_{ji} \neq 1$, escribiendo $\underline{E}_i\underline{E}_p\underline{E}_j$ como combinación lineal de otras palabras a partir de (4.22), donde las que son mayores empiezan con \underline{E}_p , luego multiplicamos a izquierda por \underline{E}_p y usamos que $\underline{E}_p^2 \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Luego, $T_p((\text{ad}_c E_i)E_j) = [(\text{ad}_c \underline{E}_p)E_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)E_j]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$. Si $m_{pi} = m_{pj} = 1$ pero $q_{pp} \neq -1$, entonces $(\text{ad}_{cb} \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_{cb} \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$; a partir de tales relaciones y de $(\text{ad}_c \underline{E}_i)E_j$, se escribe a $\underline{E}_p\underline{E}_i\underline{E}_p\underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores para el orden $p < i < j$, módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, y también concluimos que $T_p((\text{ad}_c E_i)E_j) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Si $m_{pj} = 1$ y $m_{pi} > 1$ (o análogamente, $m_{pj} > 1$ y $m_{pi} = 1$), entonces $q_{pp}q_{pj}q_{jp} = 1$, con $q_{pp} \neq -1$. Notamos que

$$q_{ij}q_{ji} = s_p^*\chi(\alpha_i, \alpha_j)s_p^*\chi(\alpha_j, \alpha_i) = q_{pp}^{m_{pi}}q_{pi}q_{ip}.$$

Si $q_{pp}^{m_{pi}}q_{pi}q_{ip} \neq 1$, entonces en $U(s_p^*\chi)$ se verifica (4.25), a partir de la cual escribimos a $\underline{E}_i\underline{E}_p\underline{E}_j$ como combinación lineal de otras palabras, donde las que son menores para el orden $p < i < j$ empiezan con \underline{E}_p . Al multiplicar a izquierda por $\underline{E}_p^{m_{pi}}$, escribimos a $\underline{E}_p^{m_{pi}}\underline{E}_i\underline{E}_p\underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores, pues $\underline{E}_p^{m_{pi}+1} \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, o $(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}+1}\underline{E}_i \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, de donde deducimos que

$$T_p((\text{ad}_c E_i)E_j) = [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}}\underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)E_j]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Si $q_{pp}^{m_{pi}}q_{pi}q_{ip} = 1$ y $q_{pp}^{m_{pi}+1} \neq 1$, escribimos a $\underline{E}_p^{m_{pi}}\underline{E}_i\underline{E}_p\underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores para el mismo orden, a partir de $(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}+1}\underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j$ y $(\text{ad}_c \underline{E}_i)E_j$, y concluimos lo mismo que en el caso anterior. Si $q_{pp}^{m_{pi}}q_{pi}q_{ip} = 1$ y $q_{pp}^{m_{pi}+1} = 1$, entonces $m_{pi} = 2$ o $m_{pi} = 3$, y se sigue a partir de (4.29) o de (4.30), respectivamente, que $T_p((\text{ad}_c E_i)E_j) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Si $m_{pi}, m_{pj} > 1$, entonces $m_{pi} = m_{pj} = 2$. Si $q_{pp} \notin \mathbb{G}_3$, entonces la prueba sigue como antes, escribiendo primero a $\underline{E}_j\underline{E}_p^2\underline{E}_i\underline{E}_p^2$ como combinación lineal de palabras mayores. En caso contrario, se deduce directamente de (4.32).

Sea ahora $m_{pj} = 0, m_{ij} \neq 0$. Notemos que $m_{ij} \leq 3$, pues tenemos un diagrama conexo de 3 vértices, y $q_{ii} \neq -1$, pues asumimos que $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$. Si $m_{ij} = 3$, el correspondiente diagrama es de tipo súper $G(3)$ como en (3.42), y el diagrama de $s_p^*\chi$ es (3.43). A partir de la relación (4.27), escribimos a $\underline{E}_i(\underline{E}_p\underline{E}_i)^3\underline{E}_j$ como combinación lineal de otras palabras, donde las que son mayores para el orden $p < i < j$ empiezan con \underline{E}_p . Multiplicando a izquierda por \underline{E}_p , escribimos a $(\underline{E}_p\underline{E}_i)^4\underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, pues $\underline{E}_p^2 \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$. Luego, por el Lema 4.2.4,

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^4 E_j) = \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)E_i, \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)E_i, \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)E_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_i)E_j \right]_c \right]_c \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Si $m_{ij} = 2$, entonces $m_{pi} = 2$ y se tiene el diagrama $\circ \zeta^{-3} \xrightarrow{\zeta^4} \circ \zeta^{-4} \xrightarrow{\zeta^{-1}} \circ \zeta$, donde $\zeta \in \mathbb{G}_9$, o $m_{pi} = 1$. En el primer caso, dado que $\underline{E}_p^3 \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, y usando las relaciones cuánticas de Serre escribimos a $\underline{E}_p^2\underline{E}_i\underline{E}_p^2\underline{E}_i\underline{E}_j\underline{E}_p\underline{E}_i$ como combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, para el orden $p < i < j$, de modo que

$$[\underline{E}_p^2\underline{E}_i\underline{E}_p^2\underline{E}_i\underline{E}_j\underline{E}_p\underline{E}_i]_c = \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_i)E_j]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_p)E_i \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Así, si llamamos $c = s_p^* \chi(4\alpha_p + 2\alpha_i + \alpha_j, \alpha_p + \alpha_i) = \chi(2\alpha_i + \alpha_j, \alpha_p + \alpha_i)$, tenemos que

$$\begin{aligned} T_p((\text{ad}_c E_i)^3 E_j) &= \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \\ &= (\text{ad}_c \underline{E}_p) \left(\left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \right) \\ &= -c (\text{ad}_c \underline{E}_p) ([\underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_p \underline{E}_i]_{\underline{c}}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi). \end{aligned}$$

En el segundo caso, si $q_{pp} \neq -1$, entonces a partir de $(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i$ escribimos a $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i$ como combinación lineal de otras palabras, donde la única que es mayor para el orden $p < i < j$, módulo $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$, es $\underline{E}_p^2 \underline{E}_i^2 \underline{E}_j \underline{E}_i$. Luego, a partir de $(\text{ad}_c \underline{E}_i)^3 \underline{E}_j$ y $(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j$ escribimos a $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i$ como combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$. Si $q_{pp} = -1$, los posibles casos están en las condiciones de (4.26), de donde probamos que

$$\left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}}, \underline{E}_i \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi),$$

para obtener finalmente que:

$$\begin{aligned} T_p((\text{ad}_c E_i)^3 E_j) &= \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \\ &= (\text{ad}_c \underline{E}_p) \left[\underline{E}_i, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}} \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi). \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos $m_{ij} = 1$. Si $m_{pi} = 1$, observamos las distintas posibilidades.

- Si $q_{pp} \neq -1$, entonces $s_p^* \chi$ es equivalente por torcimiento a χ (restringida a los vértices p, i, j), y $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j$ se escribe como combinación lineal de palabras mayores en $U(s_p^* \chi)$, a partir de

$$(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i = (\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_j = 0.$$

- Si $q_{pp} = -1$ y $q_{ii} q_{ip} q_{pi} = 1$, entonces $q_{ii} = -1$ y $q_{ip} q_{pi} q_{ij} q_{ji} = 1$, de donde se satisface (4.22). Así, usando también el Lema 4.2.7,

$$\begin{aligned} T_p((\text{ad}_c E_i)^2 E_j) &= [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}} \\ &= (\text{ad}_c \underline{E}_p) \left([\underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}} \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi). \end{aligned}$$

- Si $q_{pp} = -1$ y $q_{pp} q_{ip} q_{pi} \neq 1$, entonces $q_{pj} q_{jp} = q_{pj} q_{jp} = 1$, $q_{ij} q_{ji} = q_{ij} q_{ji} \neq -1$ y

$$q_{ii}^{-1} = q_{pp}^{-1} q_{ip}^{-1} q_{pi}^{-1} q_{ii}^{-1} = -q_{ip} q_{pi} q_{ij} q_{ji} \neq -1,$$

con lo cual estamos en las condiciones de la relación (4.31), y así $T_p((\text{ad}_c E_i)^2 E_j) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Sea entonces $m_{pi} \neq 1$. Mirando los diagramas conexos de rango 3 en estas condiciones notamos que $m_{pi} = 2$, $m_{ip} = 1$. Usando la relación cuántica de Serre $(\text{ad}_c \underline{E}_p^3) \underline{E}_i = 0$ si $q_{pp}^3 \neq -1$, o (4.24) en caso contrario, deducimos que $\underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_p \underline{E}_i$ es combinación lineal de palabras mayores para el orden $p < i < j$, y por el Lema 4.2.4,

$$[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Entonces, por el Lema (4.2.7),

$$\begin{aligned} T_p((\text{ad}_c E_i)^2 E_j) &= [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \\ &= (\text{ad}_c \underline{E}_p) \left([(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi). \end{aligned}$$

Nos resta considerar el caso $m_{ij}, m_{pj} \neq 0$; es decir, cada par de vértices está conectado por una arista. Si $m_{ij} = 2$, la única posibilidad es el diagrama (3.44) de tipo $G(3)$, para el cual la transformación en p nos da el diagrama (3.43) tal que $q_{pp} = q_{ii} = -1$, $q_{ij} q_{ji} = 1$ y a partir de (4.27) junto con el Lema 4.2.5 deducimos que

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^3 E_j) = \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j \right]_c \right]_c \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

En otro caso, $m_{ij} = 1$. Si $m_{pi} = m_{pj} = 1$, hay dos posibilidades:

- $q_{pp} = -1$; notamos que los casos posibles para $s_p^* \chi$ corresponden a los tres primeros para los cuales incluimos a (4.26) en la definición del ideal $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$, y usamos el Lema 4.2.5 para concluir que

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^2 E_j) = \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j \right]_c \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

- $q_{pp} \neq -1$, $q_{pp} q_{pi} q_{ip} = q_{pp} q_{pj} q_{jp} = 1$; para $s_p^* \chi$ el diagrama es el mismo, de modo que se satisface (4.25). Además se satisfacen las relaciones cuánticas de Serre $(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i$, $(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j$, $(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_j$, a partir de las cuales escribimos a $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores y también se tiene $T_p((\text{ad}_c E_i)^2 E_j) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Mirando los casos posibles, sólo resta la trenza

$$\begin{array}{ccc} & \circ \zeta & \\ -\zeta^{-1} \swarrow & & \searrow \zeta^{-1} \\ \circ -\zeta & \xrightarrow{-\zeta^{-1}} & \circ^{-1} \end{array}, \quad q_{pp} = \zeta \in \mathbb{G}_3, \quad m_{ij} = m_{pj} = 1, \quad m_{pi} = 2.$$

Para $s_p^* \chi$ se tiene el diagrama $\circ^{-1} \xrightarrow{-1} \circ \zeta \xrightarrow{\zeta^{-1}} \circ^{-1}$, de modo que se satisface (4.23) para p e i , y así expresamos a $\underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p$ como combinación lineal de otras palabras del mismo grado. Multiplicando a izquierda por \underline{E}_p^2 y a derecha por \underline{E}_j , y usando que $\underline{E}_p^3 = 0$, expresamos a $\underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores, de donde deducimos que

$$T_p((\text{ad}_c E_i)^2 E_j) = \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j \right]_c \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

De este modo, analizamos todos los casos posibles y terminamos la prueba. \square

Lema 4.2.12. Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = -1$, $q_{ik} q_{ki} = q_{ij} q_{ji} q_{jk} q_{kj} = 1$. Entonces,

$$T_p([\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j) E_k, E_j]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Demostración. Para empezar notemos que en $U(\chi)$ se tiene, a partir de las condiciones que satisfacen los escalares, (1.31) y $(\text{ad}_c E_i)E_k = E_j^2 = 0$,

$$[(\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k, E_j]_c = q_{ij}q_{kj} [E_j, (\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k]_c = q_{ij}q_{kj} [(\text{ad}_c E_j)E_i, (\text{ad}_c E_j)E_k]_c,$$

de modo que probaremos que una u otra relación satisface la condición del enunciado. Sea $p = j$. Notemos que $q_{pp} = -1$, $q_{ip}q_{pi}q_{pk}q_{kp} = q_{ik}q_{ki} = 1$, de modo que valen $(\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_k$ y (4.22) en $U(s_p^*\chi)$. A partir de (4.12) y las relaciones que definen $\mathcal{U}(s_p^*\chi)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} T_p([(\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k, E_j]_c) &= [a_1 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_k]_c \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} + q_{ip}q_{kp} \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} [a_1 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_k]_c \\ &= a_1 \left(q_{ip}^{-1} q_{pp}^{-1} q_{kp}^{-1} + q_{ip}q_{kp} \right) \underline{F}_p \underline{L}_p^{-1} [\underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_k]_c \\ &\quad + a_1 q_{pk}^{-1} (1 - q_{pk}q_{kp}) (\underline{E}_i \underline{E}_k + q_{ip}q_{pk}q_{ik} \underline{E}_k \underline{E}_i) \\ &= a_1 q_{pk}^{-1} (1 - q_{pk}q_{kp}) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_k \in \mathcal{J}(s_p^*\chi). \end{aligned}$$

Sea ahora $p = i$, que es análogo del caso $p = k$. De acuerdo a (4.40) y (4.42),

$$T_p([(\text{ad}_c E_j)E_p, (\text{ad}_c E_j)E_k]_c) = [a_{m_{pj}} (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pj}-1} \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pj}} (\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_k]_c.$$

Notemos que $m_{pj} = 1, 2$, y se tiene un subdiagrama de tipo estándar A_3 o B_3 . Si $m_{pj} = 1$ con $q_{pp} \neq -1$ o $m_{pj} = 2$ con $q_{pp} \notin \mathbb{G}_3$, entonces $q_{pp}^{m_{pj}} q_{pj} q_{jp} = 1$. Así, $q_{jj} = -1$, $q_{pk}q_{kp} = 1$ y $q_{pj}q_{jp}q_{kj}q_{jk} = 1$, de donde $(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pj}+1} \underline{E}_j = 0 = (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_k$, y se satisface (4.22) en $U(s_p^*\chi)$, de donde deducimos que $T_p([(\text{ad}_c E_j)E_i, (\text{ad}_c E_j)E_k]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$. Si $q_{pp} = -1$, entonces

$$q_{jj}q_{jp}q_{pj} = q_{jj}q_{jk}q_{kj} = 1, \quad q_{pk}q_{kp} = 1$$

de modo que valen $(\text{ad}_c \underline{E}_j)^2 \underline{E}_p = (\text{ad}_c \underline{E}_j)^2 \underline{E}_k = 0$ si $q_{jj} \neq -1$, o (4.22) si $q_{jj} = -1$, y así

$$T_p([(\text{ad}_c E_j)E_i, (\text{ad}_c E_j)E_k]_c) = a_1 [\underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_k]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

El caso restante es $q_{pp} \in \mathbb{G}_3$, en cuyo caso se tiene, a partir de (4.24),

$$T_p([(\text{ad}_c E_j)E_i, (\text{ad}_c E_j)E_k]_c) = a_2 [(\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_k]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Consideremos ahora $p \neq i, j, k$. En primer lugar, la condición es trivial si p no está conectado con i, j, k , pues no afecta la matriz de trenza, y en tal caso,

$$T_p([(\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k, E_j]_c) = [(\text{ad}_c \underline{E}_i)(\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_k, \underline{E}_j]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Segundo, si p está conectado sólo con i (caso análogo a que sólo se conecte con k), se tiene

$$q_{jj} = -1, \quad q_{ji}q_{ij}q_{jk}q_{kj} = 1, \quad q_{ik}q_{ip} = 1,$$

de acuerdo a la Observación 3.3.2, y usando el Lema 4.2.7:

$$\begin{aligned} T_p([(\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k, E_j]_c) &= [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}} (\text{ad}_c \underline{E}_i)(\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_k, \underline{E}_j]_c \\ &= (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}} \left([(\text{ad}_c \underline{E}_i)(\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_k, \underline{E}_j]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi). \end{aligned}$$

Luego, si p está conectado sólo con j , entonces $q_{pj}q_{jp} \in \{q_{ji}q_{ij}, q_{jk}q_{kj}\}$, y $m_{pj} = 1$. Podemos asumir $q_{pj}q_{jp} = q_{ij}q_{ji} = q_{kj}^{-1}q_{jk}^{-1}$. Si $q_{pp}q_{ip}q_{pi} = 1$, entonces la trenza correspondiente a $s_p^*\chi$ es equivalente por torcimiento a la correspondiente a χ ; en otro caso, $q_{pp} = -1$, y así se tendrá

$$\underline{q}_{jj} = q_{pj}q_{jp}, \quad \underline{q}_{pj}\underline{q}_{jp} = q_{pj}^{-1}q_{jp}^{-1} = q_{kj}q_{jk} = \underline{q}_{kj}\underline{q}_{jk},$$

de modo que $[(\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_k, \underline{E}_j]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$ en ambos casos. Así, $\underline{E}_p\underline{E}_j\underline{E}_k\underline{E}_p\underline{E}_j\underline{E}_i$ se escribe como combinación de palabras mayores (para el orden $p < j < k < i$), de donde deducimos que

$$T_p([(\text{ad}_c E_j)E_k, (\text{ad}_c E_j)E_i]_c) = [(\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_k, (\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_i]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

El caso restante es que p esté conectado a dos vértices, los cuales deben ser consecutivos. De esta forma, asumimos que p está conectado con i y con j , que es análogo a cambiar i por k . Hay tres diagramas posibles; mostraremos cada uno de ellos y el diagrama correspondiente a $s_p^*\chi$:

The image shows three rows of diagrams. Each row consists of three parts: a braid on the left, a wavy arrow labeled s_p in the middle, and a braid on the right. The braid on the left has two crossings: one between strands i and j with weight q^2 , and another between strands j and k with weight q^{-1} . The braid on the right has a crossing between strands i and j with weight q^{-2} and a crossing between strands j and k with weight q . The wavy arrow s_p indicates a transformation between the two braids.

donde $q \neq -1$. Notamos que en todos ellos $m_{pi} = m_{pj} = 1$. Así, para el orden $p < j < i < k$,

$$\begin{aligned} T_p([(\text{ad}_c E_j)E_i, (\text{ad}_c E_j)E_k]_c) &= \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_i]_c, [(\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j, \underline{E}_k]_c \right]_c \\ &= [\underline{E}_p\underline{E}_j\underline{E}_p\underline{E}_i\underline{E}_p\underline{E}_j\underline{E}_k]. \end{aligned}$$

En los tres casos podemos escribir a $\underline{E}_p\underline{E}_j\underline{E}_p\underline{E}_i\underline{E}_p\underline{E}_j\underline{E}_k$ como combinación de palabras mayores: en el primero, a partir de (4.26); en el segundo, escribiendo a $\underline{E}_j\underline{E}_p\underline{E}_i\underline{E}_p\underline{E}_j$ como combinación lineal de otras palabras del mismo grado a partir de (4.31), donde las palabras mayores empiezan con \underline{E}_p , y luego usamos las relaciones cuánticas de Serre; y en el último, escribiendo a $\underline{E}_j\underline{E}_p\underline{E}_i$ como combinación lineal de otras palabras del mismo grado a partir de (4.25), donde las palabras que son mayores que ellas empiezan con \underline{E}_p y por lo tanto se anulan al multiplicar a izquierda por \underline{E}_p . Luego, deducimos que $T_p([(\text{ad}_c E_j)E_i, (\text{ad}_c E_j)E_k]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$. \square

Lema 4.2.13. Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = -1$, y además $q_{ii} = \pm q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_3$, o $q_{ii}q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_6$. Entonces, $T_p([(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i) x_j]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, para cada $p \in \{1, \dots, \theta\}$.

Demostración. Por comodidad denotemos $\mathbf{x} := [(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i) x_j]_c$. Consideramos primero $p = j$. En tal caso, notamos que $m_{pi} = 1$, $3\alpha_i + 2\alpha_p \notin \Delta_+^X$, de donde

$$s_p(3\alpha_i + 2\alpha_p) = 3\alpha_i + \alpha_p \notin \Delta_+^{s_p^* \chi}.$$

A partir de (4.42), $m_{pi} = 1$ (pues $q_{pp} = -1$) y $(\text{ad}_c \underline{E}_i)^3 \underline{E}_p \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, deducimos que

$$T_p(\mathbf{x}) = a_2 a_1 \left[\left[[\underline{E}_p, \underline{E}_i]_c, \underline{E}_i \right]_c, \underline{E}_i \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Para $p = i$, por el Lema 4.2.4 es equivalente probar que

$$T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^* \chi), \quad \text{donde } \mathbf{x}' := \left[(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_p, [(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_p, \underline{E}_p]_c \right]_c,$$

pues ya hemos probado que T_p aplica relaciones de grado menor que \mathbf{x} que generan el ideal $\mathcal{J}(\chi)$ en elementos de $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$. A partir de (4.12) tenemos que

$$T_p(\mathbf{x}') = a_1^2 a_2 [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j, \underline{E}_j]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi),$$

pues por las condiciones anteriores se tiene que $q_{jj} = -1$, o $q_{jj} q_{jp} q_{pj} = 1$

Finalmente, consideramos $p \neq i, j$; notemos que se deduce fácilmente la condición del Lema si $m_{pi} = m_{pj} = 0$, como se hizo en los Lemas anteriores. Además, $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$ si la componente conexas del diagrama que tiene a i, j tiene al menos tres vértices.

Como primer caso analizamos $m_{pi} \neq 0$, $m_{pj} = 0$. En los casos posibles $m_{pi} = 1$, con lo cual, si consideramos el orden $p < i < j$,

$$T_p(\mathbf{x}) = \left[\left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_j]_c \right]_c, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_j]_c \right]_c = [\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j]_c,$$

donde para la última igualdad usamos que $(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j = 0$ en $U(s_p^* \chi)$. Además, $q_{pi} q_{ip} q_{ii} = 1$ o $q_{pi} q_{ip} = \pm q_{ii}$, por lo cual tenemos que $q_{ii} = -1$, o $q_{ii} q_{ip} q_{pi} = 1$, o $q_{ii}^2 q_{ip} q_{pi} = 1$, o $q_{ii} = -q_{ip} q_{pi} \in \mathbb{G}_3$, de modo que $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j$ se escribe como combinación lineal de palabras mayores a partir de las relaciones cuánticas de Serre o de (4.23). A partir de estas observaciones deducimos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, usando el Lema 4.2.4.

Ahora, sea $m_{pi} = 0$, $m_{pj} \neq 0$. En tal caso, $m_{pj} = 1$, y así, calculando en $U(s_p^* \chi)$,

$$\begin{aligned} T_p(\mathbf{x}) &= [(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_i) (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j]_c \\ &= q_{ip}^3 [(\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \\ &= q_{ip}^3 (\text{ad}_c \underline{E}_p) [(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \\ &= q_{ip}^3 (\text{ad}_c \underline{E}_p) [(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 (\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_p, (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c = 0, \end{aligned}$$

donde consideramos que $(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i = 0$ para aplicar (4.40), luego usamos (1.31), y finalmente consideramos que $q_{ii} = q_{ii} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ji} = q_{jp} = 1$, de donde vale (4.24) en $U(s_p^* \chi)$, además de que se verifica (4.23), de acuerdo al Lema 4.2.8.

Finalmente, consideramos $m_{pi}, m_{pj} \neq 0$. La única trenza posible satisface $q_{pp} = -1 = q_{pj} q_{jp}$, $q_{ii} = -q_{ij} q_{ji} = q_{pi}^{-1} q_{ip}^{-1}$. El diagrama correspondiente a $s_p^* \chi$ es $\circ^{-1} \xrightarrow{-1} \circ^{-1} \xrightarrow{q_{ii}} \circ^{-1}$, y para el cual la solución es análoga al caso anterior pero usando la relación (4.31). \square

Lema 4.2.14. Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ii} = \pm q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ik}q_{ki} = 1$, y $q_{jj}q_{ji}q_{ij} = q_{jj}q_{jk}q_{kj} = 1$ o $q_{jj} = -1$, $q_{ji}q_{ij}q_{jk}q_{kj} = 1$. Entonces, para cada $p \in \{1, \dots, \theta\}$,

$$T_p \left([(\text{ad}_c E_i)^2(\text{ad}_c E_j)E_k, (\text{ad}_c E_i)E_j]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Demostración. Denotemos $\mathbf{x} = [(\text{ad}_c x_i)^2(\text{ad}_c x_j)x_k, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c$. Consideremos primero el caso $p = k$. Notamos que en todos los casos posibles $m_{kj} = 1$, y que la trenza de $s_p^* \chi$ satisface las mismas condiciones que la original, de donde se satisface (4.24) en $U(s_p^* \chi)$. Así,

$$\begin{aligned} T_p(\mathbf{x}) &\cong [(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2(a_1 \underline{E}_j), (\text{ad}_c \underline{E}_i)(\text{ad}_c \underline{E}_k) \underline{E}_j]_c \cong [(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2(a_1 \underline{E}_j), (\text{ad}_c \underline{E}_k)(\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \\ &\cong a_1 [(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_k, (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \cong 0 \pmod{\mathcal{J}(s_p^* \chi)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado sucesivamente (4.42), (4.40) junto con $(\text{ad}_c \underline{E}_k) \underline{E}_i = 0$, y finalmente (1.31) más el hecho que vale (4.23) en $U(s_p^* \chi)$. Los casos $p = i$ y $p = j$ salen de modo muy similar al caso $p = i$ del Lema anterior.

Finalmente consideramos el caso $p \neq i, j, k$, para el cual se prueba fácilmente el enunciado si p no está conectado con ninguno de ellos, como se observó en los Lemas anteriores. Vemos que los posibles casos son $m_{pi} = 1$, $m_{pj} = m_{pk} = 0$, o $m_{pk} = 1$, $m_{pj} = m_{pi} = 0$. Para el primero,

$$T_p(\mathbf{x}) = \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_k]_c]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j \right]_c,$$

y hay dos posibilidades:

- si $q_{pp} = -1$, entonces $q_{ii}q_{ip}q_{pi} = 1$, y se tiene que $q_{ii} = -1$, de modo que se satisface (4.31) en $U(s_p^* \chi)$ para el diagrama determinado por p, i, j . A partir de esta relación deducimos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.
- en otro caso, $q_{pp} = q_{ip}^{-1}q_{pi}^{-1} = q_{ii}$, de modo que $s_p^* \chi$ tiene el mismo diagrama generalizado de Dynkin que χ y se satisface (4.24) en $U(s_p^* \chi)$. Luego, $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, pues resulta de aplicar $(\text{ad}_{c_p} \underline{E}_p)^3$ a (4.24) y multiplicar por un escalar no nulo, además de usar las correspondientes relaciones cuánticas de Serre que involucran a \underline{E}_p .

Para el segundo, usamos que $(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$ para deducir que

$$\begin{aligned} T_p(\mathbf{x}) &\cong [(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2(\text{ad}_c \underline{E}_j)(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_k, (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \\ &\cong \underline{q}_{ip}^2 \underline{q}_{jp} [(\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_k, (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \\ &\cong \underline{q}_{ip}^2 \underline{q}_{jp} (\text{ad}_c \underline{E}_p) \left([(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_k, (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_c \right) \cong 0 \pmod{\mathcal{J}(s_p^* \chi)}, \end{aligned}$$

a partir de (4.40) y que vale (4.24) en $U(s_p^* \chi)$. □

Lema 4.2.15. Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ik}q_{ki}, q_{ij}q_{ji}, q_{jk}q_{kj} \neq 1$. Entonces, para todo p , $T_p \left([E_i, (\text{ad}_c E_j)E_k]_c - \frac{1 - q_{jk}q_{kj}}{q_{kj}(1 - q_{ik}q_{ki})} [(\text{ad}_c E_i)E_k, E_j]_c - q_{ij}(1 - q_{jk}q_{kj})E_j(\text{ad}_c E_i)E_k \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Demostración. Denotemos como antes por \mathbf{x} a la relación en cuestión. Notemos primero que se obtiene la misma relación (a menos de un escalar) si realizamos una permutación de los vértices i, j, k (pues se tiene $q_{ik}q_{ki}q_{ij}q_{ji}q_{jk}q_{kj} = 1$), de modo que basta tomar cualquiera de estas permutaciones. Así consideramos $p = k$, que es simétrico del caso $p = i$ y $p = j$. Vemos que $\{m_{pi}, m_{pj}\} = \{1, 1\}$, o $\{1, 2\}$, de modo que fijamos $m_{pj} = 1$, y $m_{pi} \in \{1, 2\}$. Usando (4.42) se tiene que:

$$\begin{aligned} T_p ([E_i, (\text{ad}_c E_j)E_p]_c) &= (q_{pp}^{-1}q_{pj}^{-1}q_{jp}^{-1} - 1)q_{jp}q_{pp} [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}} \underline{E}_i, \underline{E}_j]_c, \\ T_p ([(\text{ad}_c E_i)E_p, E_j]_c) &= (q_{pp}^{-1-m_{pi}}q_{pi}^{-1}q_{ip}^{-1} - 1)q_{ip}q_{pp} [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}-1} \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j]_c, \\ T_p (E_j(\text{ad}_c E_i)E_p) &= (q_{pp}^{-1-m_{pi}}q_{pi}^{-1}q_{ip}^{-1} - 1)q_{ip}q_{pp}(\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}-1}\underline{E}_i. \end{aligned}$$

Si $m_{pi} = 2$, o $m_{pi} = 1$ con $q_{pp} \neq -1$, entonces $q_{ik}q_{ki}, q_{ij}q_{ji}, q_{jk}q_{kj} \neq 1$ y se deduce que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$ del hecho que (4.25) vale en $U(s_p^*\chi)$, pues a partir de dicha relación podemos escribir a $\underline{E}_p^{m_{pi}} \underline{E}_i \underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores para el orden $p < i < j$, módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, y aplicar entonces el Lema 4.2.4. Si $q_{pp} = -1$ se tiene que $q_{ij}q_{ji} = 1$, de modo que $(\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_j \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$. Mediante cálculo directo en este caso particular, deducimos que existe $a \in \mathbf{k}$ tal que

$$T_p(\mathbf{x}) = a(\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_j \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Sea entonces $p \neq i, j, k$. En tal caso, p no está conectado a ningún vértice (en cuyo caso trabajamos como en los Lemas anteriores), o está conectado con uno solo. En este último caso asumimos que $m_{pi} \neq 0$, en cuyo caso $m_{pi} = m_{ip} = 1$. Luego, $q_{ik}q_{ki} = q_{ik}q_{ki}, q_{ij}q_{ji} = q_{ij}q_{ji}, q_{jk}q_{kj} = q_{kj}q_{jk} \neq 1$, de donde vale (4.25) en $U(s_p^*\chi)$. Además, a partir del Lema 4.2.7 y $(\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j = (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_k = 0$, deducimos que $T_p(\mathbf{x})$ es, módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, un escalar por $(\text{ad}_c \underline{E}_p)$ aplicado a la relación (4.25), de modo que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$. \square

Lema 4.2.16. Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que

- (i) $q_{ii} = q_{jj} = -1, (q_{ij}q_{ji})^2 = (q_{jk}q_{kj})^{-1} = q_{kk}, q_{ik}q_{ki} = 1, o$
- (ii) $q_{ii} = q_{kk} = -1, \pm q_{jj} = q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_3, q_{jj} = -q_{kj}q_{jk}, q_{ik}q_{ki} = 1, o$
- (iii) $q_{ii} = q_{jj} = q_{kk} = -1, q_{ij}q_{ji} = q_{kj}q_{jk} \in \mathbb{G}_3, q_{ik}q_{ki} = 1, o$
- (iv) $q_{jj} = q_{kk} = q_{jk}q_{kj} = -1, q_{ii} = -q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_3, q_{ik}q_{ki} = 1,$

Entonces, para cada $p, T_p([[(\text{ad}_c E_i)E_j, (\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k]_c, E_j]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Demostración. Para esta prueba denotaremos $\mathbf{x} = [[(\text{ad}_c E_i)E_j, (\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k]_c, E_j]_c$; analizaremos cada caso por separado.

(i) Consideremos primero $p = k$; a partir de (4.42) y observando que $\underline{E}_i^2, \underline{E}_j^2, (\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_p \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, pues $s_p^*\chi$ es equivalente por torcimiento a χ , se tiene

$$\begin{aligned} T_p(\mathbf{x}) &\cong a_1 \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_i)(\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_j]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j \right]_c \\ &\cong a_1 q_{ip} \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_j]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j \right]_c \\ &\cong a \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p)(\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_j)\underline{E}_i]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j \right]_c \\ &\cong a \left[\underline{E}_p \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j \right]_c \pmod{\mathcal{J}(s_p^*\chi)} \end{aligned}$$

para cierto $a \in \mathbf{k}^\times$, donde consideramos para la última igualdad el orden $p < j < i$. Como (4.26) también pertenece a $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, podemos escribir a $\underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j$ como combinación lineal de otras palabras, donde las que son mayores empiezan con \underline{E}_p . Multiplicando a izquierda por \underline{E}_p y usando las relaciones cuánticas de Serre escribimos a $\underline{E}_p \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores, de modo que por el Lema 4.2.4, $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Para $p = j$, notemos que $m_{pi} = m_{pk} = 1$, y que $s_p^*\chi$ es de tipo súper $C(3)$, de modo que $q_{ii}^{-1} = q_{ik} q_{ki}$ y así $(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i)^2 \underline{E}_k \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$; aplicamos entonces (4.42) y trabajamos como en el caso $p = i$ del Lema 4.2.13 para obtener que

$$\begin{aligned} T_p(\mathbf{x}) &= a_1^2 \left[\underline{E}_i, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i)(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_k \right]_{\underline{c}} \underline{E}_p \underline{L}_p^{-1} - a_1^2 q_{ip}^2 q_{kp} \underline{E}_p \underline{L}_p^{-1} \left[\underline{E}_i, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i)(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_k \right]_{\underline{c}} \\ &= b (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i)^2 \underline{E}_k \in \mathcal{J}(s_p^*\chi), \end{aligned}$$

donde $b \in \mathbf{k}^\times$.

Sea ahora $p = i$. Como en Lemas anteriores, es equivalente probar el enunciado para

$$\mathbf{x}' := \left[[(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_k)(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_j) \underline{E}_p, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_j) \underline{E}_p]_{\underline{c}}, \underline{E}_j \right]_{\underline{c}}.$$

Ahora, aplicamos (4.42) y obtenemos que, para el orden $k < i < j$,

$$T_p(\mathbf{x}') = \left[\left[[\underline{E}_k, a_1 \underline{E}_j]_{\underline{c}}, \underline{E}_j \right]_{\underline{c}}, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_j \right]_{\underline{c}} = a_1^2 \left[\underline{E}_k \underline{E}_j^2 \underline{E}_i \underline{E}_j \right]_{\underline{c}}.$$

Como para $s_p^*\chi$ tenemos que $q_{jj} q_{ji} q_{ij} = q_{jj}^2 q_{jk} q_{kj} = 1$, deducimos de (4.29) o de $(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_j)^2 \underline{E}_p = (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_j)^3 \underline{E}_k = 0$, según q_{jj} pertenezca o no a \mathbb{G}_3 , que $\underline{E}_k \underline{E}_j^2 \underline{E}_i \underline{E}_j$ es combinación lineal de palabras mayores, y que en general se tiene que $T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, de donde finalmente $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Si $p \neq i, j, k$, entonces p no está conectado con ninguno de estos tres vértices, o p está conectado sólo con i , siendo además $q_{pp} q_{pi} q_{ip} = 1$, o $q_{pp} = -1$, $q_{ip} q_{pi} q_{ij} q_{ji} = 1$. O sea, se tiene un diagrama de tipo súper $C(4)$. Notemos que:

$$\begin{aligned} T_p(\mathbf{x}) &\cong \left[[(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p)(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i) \underline{E}_j, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p)(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i)(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_j) \underline{E}_k]_{\underline{c}}, \underline{E}_j \right]_{\underline{c}} \\ &\cong (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \left(\left[[(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p)(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i) \underline{E}_j, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_i)(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_j) \underline{E}_k]_{\underline{c}}, \underline{E}_j \right]_{\underline{c}} \right) \\ &\cong (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \left(\left[\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_k \underline{E}_j \right]_{\underline{c}} \right) \pmod{\mathcal{J}(s_p^*\chi)} \end{aligned}$$

donde usamos el Lema 4.2.7 y que $(\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_j, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_j, (\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p) \underline{E}_j \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, a es un cierto escalar no nulo y consideramos el orden $p < i < j < k$. Luego concluimos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, lo cual se deduce a partir de (4.28) si $q_{pp} = -1$, o usando las correspondientes relaciones cuánticas de Serre que involucran a $\text{ad}_{\underline{c}} \underline{E}_p$ para escribir a $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_k \underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores y usar entonces el Lema 4.2.4 para obtener que $\left[\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_k \underline{E}_j \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

(ii), (iii), (iv) Para $p \in \{i, j, k\}$ la solución es completamente análoga al caso anterior.

Si $p \neq i, j, k$, entonces sólo está conectado con i , o sólo con k . En el primer caso, $m_{pi} = 1$, pues $q_{pp} = 1$ o $q_{pp}^{-1} = q_{ip} q_{pi} \neq -1$, y la solución sigue como en el caso anterior. En el segundo caso, también $m_{pk} = 1$ y la solución es similar, pero considerando \mathbf{x}' en lugar de \mathbf{x} . \square

Lema 4.2.17. (i) Sean $i, j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{kk} = -1$, $q_{jj}q_{ij}q_{ji} = q_{jj}q_{kj}q_{jk} = 1$, $(q_{kj}q_{jk})^2 = (q_{lk}q_{kl})^{-1} = qu$, $q_{ik}q_{ki} = q_{il}q_{li} = q_{jl}q_{lj} = 1$. Entonces, para todo p ,

$$T_p \left(\left[\left[(\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)(\text{ad}_c E_k)E_l, E_k \right]_c, E_j \right]_c, E_k \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

(ii) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ii} = q_{jj} = -1$, $(q_{ij}q_{ji})^3 = (q_{jk}q_{kj})^{-1} = q_{kk} \neq \pm 1$, $q_{ik}q_{ki} = 1$. Entonces, para todo p ,

$$T_p \left(\left[\left[(\text{ad}_c E_i)E_j, [(\text{ad}_c E_i)E_j, (\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k]_c \right]_c, E_j \right]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Demostración. (i) Se prueba de modo análogo a (i) del Lema anterior, pues si $p \neq i, j, k, l$, entonces p está conectado sólo con i y se tiene un diagrama de tipo súper $C(5)$.

(ii) Nuevamente si $p \in \{i, j, k\}$ la prueba es análoga a los correspondientes casos del Lema anterior. Si $p \neq i, j, k$, entonces p está conectado sólo con i , $q_{pp} = -1$ y $q_{pi}q_{ip} = -q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_4$. La solución sigue entonces como en el caso correspondiente del Lema anterior. \square

Lema 4.2.18. (i) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1} = q_{jk}q_{kj} \in \mathbb{G}_3$. Entonces, para todo p , $T_p \left(\left[\left[(\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k, E_j \right]_c, E_j \right]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

(ii) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1} = q_{jk}q_{kj} \in \mathbb{G}_4$. Entonces, para todo p , $T_p \left(\left[\left[\left[(\text{ad}_c E_i)(\text{ad}_c E_j)E_k, E_j \right]_c, E_j \right]_c, E_j \right]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Demostración. (i) Como en los Lemas previos, sea $\mathbf{x} = \left[\left[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k, x_j \right]_c, x_j \right]_c$. Consideramos primero $p = k$. Notamos que en todos los casos posibles $m_{pj} = 1$, de modo que, para el orden $i < p < j$ se tiene a partir de (4.42):

$$T_p(\mathbf{x}) = a_1 \left[\left[(\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_k)\underline{E}_j \right]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_k)\underline{E}_j \right]_c = [\underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_k \underline{E}_j \underline{E}_k \underline{E}_j]_c.$$

A partir de $(\text{ad}_c \underline{E}_k)^2 \underline{E}_j \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, o de (4.24), sumado a que $\underline{E}_j^3, (\text{ad}_c \underline{E}_k)\underline{E}_i \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, podemos escribir a $\underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_k \underline{E}_j \underline{E}_k \underline{E}_j$ como combinación lineal de palabras mayores, de donde $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Sea ahora $p = j$. Usando la presentación de $\mathcal{U}(s_p^* \chi)$ y (4.42) tenemos que

$$T_p(\mathbf{x}) = \left[\left[\left[\underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_k \right]_c, \underline{E}_p \underline{L}_p^{-1} \right]_c, \underline{E}_p \underline{L}_p^{-1} \right]_c = a(\text{ad}_c \underline{E}_i)\underline{E}_k,$$

para cierto $a \in \mathbf{k}^\times$, de donde $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Sea $p = i$. De acuerdo a lo visto, es equivalente probar que $T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, donde

$$\mathbf{x}' = \left[\left[(\text{ad}_c E_k)(\text{ad}_c E_j)E_p, E_j \right]_c, E_j \right]_c.$$

En todos los casos posibles tenemos que $m_{ij} = 1$, de modo que

$$T_p(\mathbf{x}') = a_1 \left[\left[(\text{ad}_c \underline{E}_k)\underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j \right]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_p)\underline{E}_j \right]_c,$$

y trabajando de modo similar al caso $p = k$ deducimos que $T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, y así $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$

Finalmente, si $p \neq i, j, k$, entonces p sólo está conectado a i o sólo a k , y se deduce que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$ como en Lemas anteriores, a partir de considerar el Lema 4.2.7 y que las mismas condiciones se tienen para la trenza de $s_p^*\chi$, de modo que la correspondiente relación se verifica en $U(s_p^*\chi)$.

(ii) La prueba en este caso sigue los mismos pasos que en (i). \square

Lema 4.2.19. Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que su subdiagrama es uno de los siguientes:

$$\bullet^{-1} \xrightarrow{\zeta} \circ \xrightarrow{-\zeta} \bullet^{-1}, \quad \bullet^{-1} \xrightarrow{-1} \circ \xrightarrow{\zeta} \bullet^{-1}, \quad \bullet^{-1} \xrightarrow{\zeta} \circ \xrightarrow{-\zeta} \bullet^{-1},$$

donde $\zeta \in \mathbb{G}_3$, i es uno de los vértices negros y $q_{ik}q_{ki} = 1$. Entonces, para todo p ,

$$T_p([(ad_c E_i)E_j, (ad_c E_i)(ad_c E_j)E_k]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Observación 4.2.20. Los diagramas que se describen en el Lema anterior son todos los diagramas de Dynkin generalizados, conexos, de rango 3, que satisfacen las condiciones que pedimos para que la relación (4.31) sea un generador del ideal.

Demostración. Sea $\mathbf{x} = [(ad_c E_i)E_j, (ad_c E_i)(ad_c E_j)E_k]_c$. Si $p = k$, trabajamos como en el correspondiente caso del Lema 4.2.16:

$$\begin{aligned} T_p(\mathbf{x}) &= a_1 [(ad_c \underline{E}_i)(ad_c \underline{E}_p)\underline{E}_j, (ad_c \underline{E}_i)\underline{E}_j] \\ &= [(ad_c \underline{E}_p)(ad_c \underline{E}_j)\underline{E}_i, (ad_c \underline{E}_j)\underline{E}_i] = [\underline{E}_p \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i]_c, \end{aligned}$$

donde consideramos el orden $p < j < i$. Para $s_p^*\chi$ notamos que, para el primer y el tercer diagrama, $(ad_c \underline{E}_j)^2 \underline{E}_i, \underline{E}_i^2, (ad_c \underline{E}_i)\underline{E}_p \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$; en el segundo caso, $((ad_c \underline{E}_j)\underline{E}_i)^2, (ad_c \underline{E}_i)\underline{E}_p \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, pues se tiene $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = q_{jj} = -1$. En cualquier caso, $\underline{E}_p \underline{E}_j \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_i$ se escribe como combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, de donde $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$ a partir del Lema 4.2.4.

Si $p = j$, trabajamos como antes para obtener:

$$T_p(\mathbf{x}) = a_1^2 [\underline{E}_i, (ad_c \underline{E}_i)(ad_c \underline{E}_p)\underline{E}_k] \in \mathcal{J}(s_p^*\chi),$$

lo cual se deduce de que $(ad_c \underline{E}_i)\underline{E}_k \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, y además $\underline{E}_i^2 \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$ o $(ad_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_p \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Si $p = i$, a partir del Lema 4.2.5, es equivalente probar que

$$T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^*\chi), \quad \text{donde } \mathbf{x}' := [(ad_c E_k)(ad_c E_j)E_p, (ad_c E_j)E_p]_c.$$

Usando como antes (4.42) y notando que en todos los casos $q_{jj}^{-1} = q_{jk}q_{kj} \neq -1$, por lo cual $(ad_c \underline{E}_j)^2 \underline{E}_k \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, obtenemos lo siguiente:

$$T_p(\mathbf{x}') = a_1^2 [(ad_c \underline{E}_k)\underline{E}_j, \underline{E}_j]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Finalmente, si $p \neq i, j, k$, entonces p está conectado sólo con i y $m_{pi} = 1$, o p está conectado sólo con k y $m_{pk} = 1$. La prueba sigue entonces como en el correspondiente caso del Lema 4.2.16. \square

Lema 4.2.21. Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = -q_{ik}q_{ki} \in \mathbb{G}_3$, $q_{jk}q_{kj} = 1$, $q_{jj} = -1$, $q_{kk} \in \{-1, q_{ik}^{-1}q_{ki}^{-1}\}$. Entonces, para todo p , $T_p \left([(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_k]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

Demostración. Notemos que si $p \neq i, j, k$, entonces $m_{pi} = m_{pj} = m_{pk} = 0$, y en tal caso la prueba es directa, como en los Lemas anteriores.

Si $p = j$, usando (4.42) y considerando el orden $p < i < k$,

$$\begin{aligned} T_p \left([(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_p, (\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_k]_c \right) &= a_1 \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i]_c, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_k]_c \right]_c \\ &= [\underline{E}_p \underline{E}_i^2 \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_k]_c. \end{aligned}$$

A partir de (4.23), que vale para los vértices i, p , escribimos a $\underline{E}_p \underline{E}_i^2 \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_k$ como combinación lineal de palabras mayores, módulo $\mathcal{J}(s_p^* \chi)$, de donde $T_p \left([(\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_p, (\text{ad}_c \underline{E}_i)^2 \underline{E}_k]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$. El caso $p = k$ se resuelve de manera análoga.

Consideramos finalmente $p = i$: notamos que, para algún $a \in \mathbf{k}^\times$,

$$[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_k]_c - a \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_p, \underline{E}_p]_c, [(\text{ad}_c \underline{E}_k) \underline{E}_p, \underline{E}_p]_c \right]_c$$

se escribe como combinación lineal de términos generados por otros generadores de $\mathcal{J}(\chi)$ de grado menor, de acuerdo al Lema 4.2.5, de donde es equivalente probar que

$$T_p \left([[(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_p, \underline{E}_p]_c, [(\text{ad}_c \underline{E}_k) \underline{E}_p, \underline{E}_p]_c]_c \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Notemos que

$$T_p \left([[(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_p, \underline{E}_p]_c, [(\text{ad}_c \underline{E}_k) \underline{E}_p, \underline{E}_p]_c]_c \right) = b [\underline{E}_j, \underline{E}_k]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi),$$

para cierto $b \in \mathbf{k}^\times$, donde hemos usado (4.42). Ésto último se deduce del hecho que $q_{jk}q_{kj} = 1$, por lo cual $(\text{ad}_c \underline{E}_j) \underline{E}_k \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$. \square

Lema 4.2.22. (i) Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $m_{ij}, m_{ji} > 1$. Entonces, para todo p ,

$$T_p \left((1 - q_{ij}q_{ji})q_{jj}q_{ji} [E_i, [(\text{ad}_c E_i) E_j, E_j]_c] - (1 + q_{jj})(1 - q_{jj}q_{ji}q_{ij}) ((\text{ad}_c E_i) E_j)^2 \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

(ii) Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = -1$, $q_{ii}q_{ij}q_{ji} \notin \mathbb{G}_6$ o $m_{jj} = 2$, y además $q_{ii} \in \mathbb{G}_4$, $m_{ij} = 4$, o $m_{ij} \in \{4, 5\}$. Entonces, para todo p ,

$$T_p \left([E_i, [(\text{ad}_c E_i)^2 E_j, (\text{ad}_c E_i) E_j]_c] - \frac{1 - q_{ii}q_{ji}q_{ij} - q_{ii}^2 q_{ji}^2 q_{ij}^2 q_{jj}}{(1 - q_{ii}q_{ij}q_{ji})q_{ji}} ((\text{ad}_c E_i)^2 E_j)^2 \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

(iii) Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = -1$, $5\alpha_i + 4\alpha_j \in \Delta_+^\times$; además sean

$$\begin{aligned} \zeta &= q_{ij}q_{ji}, & a &= (1 - \zeta)(1 - q_{ii}^4 \zeta^3) - (1 - q_{ii} \zeta)(1 + q_{ii})q_{ii} \zeta \\ b &= (1 - \zeta)(1 - q_{ii}^6 \zeta^5) - a q_{ii} \zeta, \\ d &= \frac{b - (1 + q_{ii})(1 - q_{ii} \zeta)(1 + \zeta + q_{ii} \zeta^2) q_{ii}^6 \zeta^4}{a q_{ii}^3 q_{ij}^2 q_{ji}^3}. \end{aligned}$$

Entonces, para todo p ,

$$T_p \left([E_{2\alpha_i + \alpha_j}, E_{4\alpha_i + 3\alpha_j}]_c - d E_{3\alpha_i + 2\alpha_j}^2 \right) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi).$$

Demostración. (i) Sea \mathbf{x} la relación que consideramos. Como en el Lema anterior, si $p \neq i, j$ entonces $m_{pi} = m_{pj} = 0$, caso que deducimos fácilmente. Además, las condiciones sobre i, j son simétricas, con lo cual basta considerar uno de los dos casos: para aplicar (4.42), consideramos $p = j$. Observemos primero que $m_{pi} = 2, 3$. Calculamos primero el caso $m_{pi} = 3$, en cuyo caso $m_{ip} = 2$ y hay dos diagramas posibles. En tal caso,

$$T_p \left([E_i, [(\text{ad}_c E_i) E_p, E_p]_c]_c \right) = [(\text{ad}_c E_p)^3 E_i, (\text{ad}_c E_p) E_i]_c.$$

Usamos (1.31) en el corchete anterior para escribir $T_p(\mathbf{x})$ como una combinación lineal de

$$\left[\underline{E}_p, [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i]_c \right]_c, \quad ((\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i)^2,$$

y notamos que $\left[\underline{E}_p, [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i]_c \right]_c = [\underline{E}_p^3 \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i]_c$ para el orden $p < i$. Luego, a partir de las relaciones cuánticas de Serre en un caso, y a partir de (4.34) en el restante, se deduce que $\underline{E}_p^3 \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i$ es combinación lineal de palabras mayores, de donde deducimos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$, pues podemos aplicar el Lema 4.2.4.

Si $m_{pi} = 2$, hay tres diagramas de Dynkin posibles con $m_{ip} = 2$, y dos con $m_{ip} = 3$. En todos los casos,

$$\begin{aligned} T_p \left(((\text{ad}_c E_i) E_p)^2 \right) &= a_2^2 \left((\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i \right)^2, \\ T_p \left([E_i, [(\text{ad}_c E_i) E_p, E_p]_c]_c \right) &= a_2 a_1 \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, \underline{E}_i \right]_c \\ &= a_2 a_1 \left[\underline{E}_p, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i]_c \right]_c + a_2 a_1 \underline{q}_{pi} (\underline{q}_{pp} - \underline{q}_{ii}) \left((\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i \right)^2, \end{aligned}$$

donde usamos (1.31) para la última igualdad. Si $q_{pp} = -\zeta$, $q_{pi} q_{ip} = \zeta^7$, $q_{ii} = \zeta^3$, donde $\zeta \in \mathbb{G}_9$ es primitiva, entonces $s_p^* \chi$ es equivalente por torcimiento a χ y se verifica (4.33) en $U(s_p^* \chi)$, por lo cual deducimos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$ a partir de tal relación, y del Lema 4.2.4. En los otros casos posibles, $\underline{q}_{ii} = -1$, de donde se tiene que $[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i]_c \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$ y en tal caso se anulan los coeficientes de $((\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i)^2$ en la expresión de $T_p(\mathbf{x})$, de modo que también se tiene $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^* \chi)$.

(ii) Llamemos como antes \mathbf{x} a la relación que tratamos en esta parte del Lema. Para empezar, consideremos $p = j$; si $q_{pp} = -1$, entonces $m_{pi} = 1$, de modo que se tiene que

$$s_p(3\alpha_i + \alpha_p) = 3\alpha_i + 2\alpha_p, \quad s_p(3\alpha_i + 2\alpha_p) = 3\alpha_i + \alpha_p \in \Delta_+^{s_p^* \chi},$$

de donde $\underline{m}_{ip} \geq 3$. Aplicando (4.42) tenemos que:

$$\begin{aligned} T_p \left(((\text{ad}_c E_i)^2 E_p)^2 \right) &= a_1^2 \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i \right]_c^2, \\ T_p \left([E_i, [(\text{ad}_c E_i)^2 E_j, (\text{ad}_c E_i) E_j]_c]_c \right) &= a_1^2 \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i]_c, \underline{E}_i \right]_c \right]_c. \end{aligned}$$

Dado que $m_{ip} \geq 3$, (4.34) es un generador del ideal $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, o $m_{ip} = 3$, $q_{ii} \notin \mathbb{G}_4$, de donde también tenemos que $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i^3$ se escribe como combinación lineal de palabras mayores para el orden $p < i$. En ambos casos, aplicando el Lema 4.2.4 obtenemos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Si $m_{pi} = 2$, entonces necesariamente $m_{ip} = 3$; calculando como antes,

$$\begin{aligned} T_p \left(((\text{ad}_c E_i)^2 E_p)^2 \right) &= a_2^2 [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i]_{\underline{c}}^2, \\ T_p \left([E_i, [(\text{ad}_c E_i)^2 E_p, (\text{ad}_c E_i) E_p]_c]_c \right) &= a_2^2 [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, \underline{E}_{4\alpha_p + 3\alpha_i}]_{\underline{c}}. \end{aligned}$$

Notamos que hay dos casos posibles para $s_p^*\chi$:

- $\circ \zeta^8 \frac{\zeta^5}{\circ^{-1}}$, $\zeta \in \mathbb{G}_{24}$, en cuyo caso (4.39) es un generador de $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$,
- $\circ \zeta^5 \frac{-\zeta^{13}}{\circ^{-1}}$, $\zeta \in \mathbb{G}_{15}$, por lo cual (4.37) y \underline{E}_p^3 son generadores del ideal $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

A partir de estas relaciones escribimos a $\underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p^2 \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i$ como combinación lineal de palabras mayores, y usando nuevamente el Lema 4.2.4 deducimos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$ en ambos casos.

Consideremos ahora $p = i$; aplicando el Lema 4.2.5, es equivalente probar que

$$T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^*\chi), \quad \text{donde } \mathbf{x}' = [[(\text{ad}_c E_j) E_p, [(\text{ad}_c E_j) E_p, E_p]_c], E_p]_c - a [(\text{ad}_c E_j) E_p, E_p]_c^2;$$

aquí a es un escalar no nulo. Notemos que

$$\begin{aligned} T_p \left([[(\text{ad}_c E_j) E_p, [(\text{ad}_c E_j) E_p, E_p]_c], E_p]_c \right) &= a_{m_{pi}}^2 a_{m_{pi}-1} [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}-1} \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}-2} \underline{E}_j]_{\underline{c}} \\ &\quad \underline{E}_p \underline{L}_p^{-1} - q_{jp}^2 q_{pp}^3 a_{m_{pi}}^2 a_{m_{pi}-1} \underline{E}_p \underline{L}_p^{-1} [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}-1} \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}-2} \underline{E}_j]_{\underline{c}}, \\ T_p \left([(\text{ad}_c E_j) E_p, E_p]_c \right) &= a_{m_{pi}} a_{m_{pi}-1} (\text{ad}_c \underline{E}_p)^{m_{pi}-2} \underline{E}_i. \end{aligned}$$

En cualquier caso, $T_p(\mathbf{x}') \in \ker \pi_{s_p^*\chi}$ y es una combinación lineal de $[\underline{E}_p^{m_{ip}-1} \underline{E}_i \underline{E}_p^{m_{ip}-3} \underline{E}_i]_{\underline{c}}$ con $[\underline{E}_p^{m_{ip}-2} \underline{E}_i]_{\underline{c}}^2$, con lo cual, de acuerdo al Lema 4.2.4, $T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, pues (4.33), (respectivamente, (4.34), (4.39)) es un elemento de $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$ si $m_{pi} = 3$, (respectivamente, $m_{pi} = 4$, $m_{pi} = 5$).

Finalmente, si $p \neq i, j$, entonces p no está conectado con i ni con j , caso que se deduce fácilmente por el Lema 4.2.7, o p está conectado sólo con i , $q_{ii} = q_{ij} q_{ji} = q_{pi}^{-1} q_{ip}^{-1} \in \mathbb{G}_4$, $q_{pp} = -1$, y tenemos el diagrama de tipo súper $G(3)$. En este último caso, para el orden $p < i < j$

$$\begin{aligned} T_p \left((\text{ad}_c E_i)^2 E_j \right) &= [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}}, \\ T_p \left([E_i, [(\text{ad}_c E_i)^2 E_j, (\text{ad}_c E_i) E_j]_c]_c \right) &= \\ &= [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j]_{\underline{c}}, (\text{ad}_c \underline{E}_p) (\text{ad}_c \underline{E}_i) \underline{E}_j \right]_{\underline{c}}]_{\underline{c}} \\ &= [\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j]_{\underline{c}}. \end{aligned}$$

A partir de (4.27) escribimos a $\underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_p \underline{E}_i$ como combinación lineal de otras palabras, donde las que son menores que ella empiezan con \underline{E}_p ; multiplicando a izquierda por \underline{E}_p , a derecha por \underline{E}_j y usando que $\underline{E}_p^2 \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, deducimos que $\underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j \underline{E}_p \underline{E}_i \underline{E}_j$ es combinación

lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, de donde se escribe a $[E_p \underline{E}_i E_p \underline{E}_i E_p \underline{E}_i E_j E_p \underline{E}_i E_j]_c$ como combinación de hiperpalabras mayores con los mismos términos y escalares que en $I(s_p^*\chi)$. Como $T_p(\mathbf{x}) \in \ker \pi_{s_p^*\chi}$, deducimos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

(iii) La prueba sigue los mismos pasos que los ítems anteriores. \square

Lema 4.2.23. (i) Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $4\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^\chi$, $q_{jj} = -1$ o $m_{jj} = 2$, y además $m_{ij} \geq 3$, o $m_{ij} = 2$, $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$. Entonces, para todo p , $T_p([E_{3\alpha_i+2\alpha_j}, (\text{ad}_c E_i)E_j]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

(ii) Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $4\alpha_i + 3\alpha_j \in \Delta_+^\chi$, $5\alpha_i + 4\alpha_j \notin \Delta_+^\chi$. Entonces, para todo p , $T_p([E_{4\alpha_i+3\alpha_j}, (\text{ad}_c E_i)E_j]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

(iii) Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^\chi$, $5\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^\chi$, y $q_{ii}^3 q_{ij} q_{ji}$, $q_{ii}^4 q_{ij} q_{ji} \neq 1$. Entonces, para todo p , $T_p([(\text{ad}_c E_i)^2 E_j, E_{3\alpha_i+2\alpha_j}]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

(iv) Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $5\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^\chi$, $7\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^\chi$. Entonces, para todo p , $T_p([(\text{ad}_c E_i)^3 E_j, (\text{ad}_c E_i)^2 E_j], (\text{ad}_c E_i)^2 E_j]_c) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Demostración. Para las cuatro relaciones se tiene que, si $p \neq i, j$ entonces p no está conectado con i ni con j , de modo que el resultado sigue del Lema 4.2.7, tal como se probó en los Lemas anteriores, o estamos en el primer caso con un diagrama de tipo súper $G(3)$, donde p sólo está conectado con i ; este último caso se deduce como en el Lema 4.2.22. Consideremos entonces $p = i$ y $p = j$ en cada uno de estos casos.

(i) Sea $\mathbf{x} = [E_{3\alpha_i+2\alpha_j}, (\text{ad}_c E_i)E_j]_c$, y consideremos $p = j$. Si $m_{pi} = 1$ (esto es, $q_{pp} = -1$ o $q_{pp}q_{pi}q_{ip} = 1$),

$$s_p(3\alpha_i + 2\alpha_p) = 3\alpha_i + \alpha_p \in \Delta_+^{s_p^*\chi}, \quad s_p(4\alpha_i + 3\alpha_p) = 4\alpha_i + \alpha_p \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}.$$

Luego, $m_{ip} = 3$, de modo que \underline{E}_i^4 o $(\text{ad}_c \underline{E}_i)^4 \underline{E}_p$ es un generador de $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, según q_{ii} pertenezca o no a \mathbb{G}_4 . A partir de (4.42) y las relaciones anteriores,

$$T_p(\mathbf{x}) = a_1^4 \left[[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i]_c, \underline{E}_i]_c, \underline{E}_i \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

El otro caso posible es $m_{pi} = 2$, para el cual hay dos diagramas generalizados de Dynkin posibles:

$$\circ - \zeta \xrightarrow{\zeta^7} \circ \zeta^3, \zeta \in \mathbb{G}_9; \quad \circ - \zeta \xrightarrow{-\zeta^{12}} \circ \zeta^5, \zeta \in \mathbb{G}_{15}.$$

En ambos casos $q_{pp} \in \mathbb{G}_3$, y además,

$$s_p(3\alpha_i + 2\alpha_p) = 3\alpha_i + 4\alpha_p \in \Delta_+^{s_p^*\chi}, \quad s_p(4\alpha_i + 3\alpha_p) = 4\alpha_i + 5\alpha_p \notin \Delta_+^{s_p^*\chi},$$

de modo que se verifica (4.37) si $3\alpha_i + 5\alpha_p \in \Delta_+^{s_p^*\chi}$, o en caso contrario se verifica (4.38), a partir de la cual deducimos que $E_p^2 E_i E_p E_i E_p E_i E_p E_i$ es combinación lineal de palabras mayores y concluimos que vale (4.37) en $U(s_p^*\chi)$ en ambos casos. Luego,

$$T_p(\mathbf{x}) = a_2^4 \left[[[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_i, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i]_c, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Ahora, para $p = i$ probaremos que

$$T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^*\chi), \quad \text{donde } \mathbf{x}' := [(\text{ad}_c E_j)E_p, [(\text{ad}_c E_j)E_p, [(\text{ad}_c E_j)E_p, E_p]_c]_c]_c,$$

de modo que, por el Lema 4.2.5 se tendrá también que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Si $m_{pj} = 2$, $s_p(3\alpha_p + 2\alpha_j) = \alpha_p + 2\alpha_j \in \Delta_+^{s_p^*\chi}$, $s_p(4\alpha_p + 3\alpha_j) = 2\alpha_p + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}$, de modo que se tiene $\underline{m}_{jp} = 2$, y así se verifica (4.23) en $U(s_p^*\chi)$; luego,

$$T_p(\mathbf{x}) = a_2^3 a_1 \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j, [(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j, \underline{E}_j]_c \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Si $m_{pj} = 3$, $s_p(3\alpha_p + 2\alpha_j) = 3\alpha_p + 2\alpha_j \in \Delta_+^{s_p^*\chi}$, $s_p(4\alpha_p + 3\alpha_j) = 5\alpha_p + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}$, de modo que se verifica (4.38) en $U(s_p^*\chi)$. A partir de (4.42) tenemos:

$$T_p(\mathbf{x}) = a_3^3 a_2 \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j, [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j]_c \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Si $m_{pj} = 4$, $s_p(3\alpha_p + 2\alpha_j) = 5\alpha_p + 2\alpha_j \in \Delta_+^{s_p^*\chi}$, $s_p(4\alpha_p + 3\alpha_j) = 8\alpha_p + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}$; más aún, notamos que en tales casos $7\alpha_p + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}$, y se verifica (4.36) en $U(s_p^*\chi)$. A partir de tal relación y las relaciones cuánticas de Serre notamos que $\underline{E}_p^3 \underline{E}_j \underline{E}_p^3 \underline{E}_j \underline{E}_p^2 \underline{E}_j$ se escribe como combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, de modo que tenemos

$$T_p(\mathbf{x}) = a_4^3 a_3 \left[(\text{ad}_c \underline{E}_p)^3 \underline{E}_j, [(\text{ad}_c \underline{E}_p)^3 \underline{E}_j, (\text{ad}_c \underline{E}_p)^2 \underline{E}_j]_c \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

(ii) La prueba es análoga a (i), con una simplificación: para $p = j$ sólo se tiene un caso posible, $m_{pi} = 1$.

(iii) Llamemos como antes $\mathbf{x} = [(\text{ad}_c E_i)^2 E_j, E_{3\alpha_i + 2\alpha_j}]_c$. Sea $p = j$; en los casos en que la relación no es redundante se tiene que i no es Cartan, pues en caso contrario escribimos a $\underline{E}_i \underline{E}_p \underline{E}_i^2$ o a $\underline{E}_i^2 \underline{E}_p \underline{E}_i^2$ como combinación lineal de otras palabras a partir de la correspondiente relación cuántica de Serre, y luego usamos otras relaciones para escribir a $\underline{E}_i^2 \underline{E}_p \underline{E}_i^2 \underline{E}_p \underline{E}_i$ como combinación lineal de palabras mayores. Con esta reducción notamos que, en los casos a analizar, $m_{pi} = 1$, y en todos ellos podemos escribir a $\underline{E}_p \underline{E}_i^2 \underline{E}_p \underline{E}_i^3$ como combinación lineal de palabras mayores módulo $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, a partir de relaciones de grado menor, de modo que

$$T_p(\mathbf{x}) = \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i]_c, \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_i, \underline{E}_i]_c, \underline{E}_i \right]_c \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Sea ahora $p = i$; basta probar que

$$T_p(\mathbf{x}') \in \mathcal{J}(s_p^*\chi), \quad \text{donde } \mathbf{x}' := [(\text{ad}_c E_j)E_p, [(\text{ad}_c E_j)E_p, E_p]_c, [(\text{ad}_c E_j)E_p, E_p]_c]_c,$$

pues en tal caso, por el Lema 4.2.5, concluimos que $T_p(\mathbf{x}) \in \mathcal{J}(s_p^*\chi)$.

Si $m_{pj} = 2$, $s_p(3\alpha_p + 2\alpha_j) = \alpha_p + 2\alpha_j \in \Delta_+^{s_p^*\chi}$, $s_p(5\alpha_p + 3\alpha_j) = \alpha_p + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}$, de modo que $(\text{ad}_c \underline{E}_j)^3 \underline{E}_p$ o \underline{E}_i^3 es un generador de $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$; luego,

$$T_p(\mathbf{x}) = a_2^3 a_1^2 \left[[(\text{ad}_c \underline{E}_p) \underline{E}_j, \underline{E}_j]_c, \underline{E}_j \right]_c \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Si $m_{pj} = 3$, $s_p(3\alpha_p + 2\alpha_j) = 3\alpha_p + 2\alpha_j \in \Delta_+^{s_p^*\chi}$, $s_p(5\alpha_p + 3\alpha_j) = 4\alpha_p + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}$, de modo que (4.37) es un generador de $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$. Así,

$$T_p(\mathbf{x}) = a_3^3 a_2^2 \left[[(\text{ad}_{\underline{E}_p})^2 \underline{E}_j, (\text{ad}_{\underline{E}_p}) \underline{E}_j]_{\underline{c}}, (\text{ad}_{\underline{E}_p}) \underline{E}_j \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

Si $m_{pj} = 4$, $s_p(3\alpha_p + 2\alpha_j) = 5\alpha_p + 2\alpha_j \in \Delta_+^{s_p^*\chi}$, $s_p(5\alpha_p + 3\alpha_j) = 7\alpha_p + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{s_p^*\chi}$; de esta forma, (4.36) es un generador de $\mathcal{J}(s_p^*\chi)$, con lo cual

$$T_p(\mathbf{x}) = a_4^3 a_3^2 \left[[(\text{ad}_{\underline{E}_p})^3 \underline{E}_j, (\text{ad}_{\underline{E}_p})^2 \underline{E}_j]_{\underline{c}}, (\text{ad}_{\underline{E}_p})^2 \underline{E}_j \right]_{\underline{c}} \in \mathcal{J}(s_p^*\chi).$$

(iv) La prueba es análoga al caso anterior. □

Una vez probados estos resultados, estamos en condiciones de probar que existen isomorfismos de Lusztig para las álgebras $U(\chi)$, lo cual nos permite considerar sistemas de raíces para esta familia de álgebras de Hopf trenzadas, que por resultados anteriores deben coincidir con los sistemas de raíces de las correspondientes álgebras de Nichols, y así podremos probar el Teorema de presentación.

Proposición 4.2.24. *Los morfismos (4.16) inducen isomorfismos de álgebras*

$$T_p, T_p^- : U(\chi) \rightarrow U(s_p^*\chi),$$

tales que $T_p T_p^- = T_p^- T_p = \text{id}_{U(\chi)}$.

Demostración. De acuerdo a la definición de la familia de ideales $\mathcal{J}(\chi)$ y a los Lemas anteriores, existe un morfismo de álgebras $T_p : U(\chi) \rightarrow U(s_p^*\chi)$, pues $T_p(\mathcal{J}(\chi)) \subset \mathcal{J}(s_p^*\chi)$. Notemos que por definición, $\phi_4(\mathcal{J}(\chi)) = \mathcal{J}(\chi)$, pues $\phi_4^2 = \text{id}$, y además $\varphi_\lambda(\mathcal{J}(\chi)) = \mathcal{J}(\chi)$ para todo $\lambda \in (\mathbf{k}^\times)^\theta$, pues es un ideal \mathbb{Z}^θ -homogéneo. Usando (4.17) se tiene que $T_p^-(\mathcal{J}(\chi)) \subset \mathcal{J}(s_p^*\chi)$, de modo que también existe un morfismo de álgebras $T_p^- : U(\chi) \rightarrow U(s_p^*\chi)$, inducido por el correspondiente morfismo.

Como estas álgebras están generadas por E_i, F_i, L_i, K_i , y se satisfacen las identidades $T_p T_p^- = T_p^- T_p = \text{id}$ para dichos elementos, se concluye que ambos son isomorfismos, inversos uno de otro. □

A partir de dicho resultado, probaremos el resultado central de la Sección. La prueba sigue los mismos pasos que [A1, Thm.5.25].

PRUEBA DEL TEOREMA 4.2.1.

Para empezar, denotemos $\underline{\Delta}_+^\chi = \Delta^+(U^+(\chi)) \setminus \{N_\alpha \alpha : \alpha \in \Delta_+^\chi\}$. Por otro lado, usando la descomposición triangular, el Lema 4.1.7, el Teorema 4.1.9 y la Proposición 4.2.24

$$\mathcal{H}_{U^+(\chi)} = \mathcal{H}_{U_{+p}^+(\chi)} \mathfrak{q}_{h(E_p)} = s_p(\mathcal{H}_{U_{+p}^+(s_p^*\chi)}) \mathfrak{q}_{h(E_p)}, \quad (4.43)$$

para cada $p \in \{1, \dots, \theta\}$, pues $\deg(T_p(X)) = s_p(\deg X)$, para cada elemento homogéneo X . Recordemos que $h(E_p) \in \{\text{ord } q_{pp}, \infty\}$. Así,

$$\Delta^+(U^+(\chi)) = s_p(\Delta^+(U^+(s_p^*\chi)) \setminus \{\alpha_p, N_p \alpha_p\}) \cup S_p, \quad (4.44)$$

donde podemos tener $S_p = \{\alpha_p\}$, o $S_p = \{\alpha_p, N_p\alpha_p\}$, por lo cual $\underline{\Delta}_+^X = s_p \left(\underline{\Delta}_+^{s_p^* X} \setminus \{\alpha_p\} \right) \cup \{\alpha_p\}$.

Luego, si consideramos el conjunto $\underline{\Delta}_+^X$ para cada χ en la clase de equivalencia Weyl, tenemos un sistema de raíces como en la Definición 2.1.2. Como consideramos sistemas de raíces finitos, se tiene que $\underline{\Delta}_+^X = \Delta_+^X$, para todo χ , pues todas las raíces son reales de acuerdo a la Proposición 2.1.6. De esta forma $\Delta^+(U^+(\chi))$ se obtiene a partir de Δ_+^X agregando a lo sumo elementos de la forma $N_\alpha\alpha$ para algunas $\alpha \in \Delta_+^X$. Fijemos un orden en las letras x_i y consideremos la correspondiente base PBW. Como se tiene una proyección $\pi_\chi : U(\chi) \rightarrow \mathfrak{u}(\chi)$, las correspondientes x_α que generan la base PBW en $\mathfrak{u}(\chi)$ son elementos de la base PBW de $U(\chi)$, por la definición de la base PBW de Kharchenko. Por otro lado, cada raíz simple de un vértice no Cartan satisface que $E_i^{N_i} = 0$ en $U(\chi)$, de donde $N_i\alpha_i \notin \Delta^+(U^+(\chi))$. Así, por (4.43) deducimos que

$$N_\alpha\alpha \notin \Delta^+(U^+(\chi)), \quad \text{para todo } \alpha \in \Delta_+^X \setminus \mathcal{O}(\chi),$$

pues cada α es de la forma $\alpha = w(\alpha_i)$, para algún $w \in \mathcal{W}$ e $i \in \{1, \dots, \theta\}$, siendo i no de Cartan en el correspondiente χ' . De modo análogo, para cada vértice de Cartan $N_i\alpha_i \in \Delta^+(U^+(\chi))$, pues $E_i^{N_i} \neq 0$ en $U(\chi)$, con lo cual

$$N_\alpha\alpha \in \Delta^+(U^+(\chi)), \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{O}(\chi).$$

Luego, $\Delta^+(U^+(\chi)) = \Delta_+^X \cup \{N_\alpha\alpha : \alpha \in \mathcal{O}(\chi)\}$.

Supongamos que existe una palabra de Lyndon que corresponde a un generador PBW de grado $N_\alpha\alpha$: podemos entonces considerar una de longitud mínima en este conjunto, que llamaremos u , y sea $(v, w) = \text{Sh}(u)$. De este modo, $\deg v = \beta$, $\deg w = \gamma$, para algunos $\beta, \gamma \in \Delta_+^X$. Luego, $\beta + \gamma = N_\alpha\alpha$, y usando que son todas raíces reales más el hecho que el correspondiente orden es convexo, notamos que si $\beta < \gamma$, entonces $\beta < \alpha < \gamma$. Así podemos suponer que $\beta = \alpha_i$, pues si $\beta = s_{i_1} \cdots s_{i_k}(\alpha_{i_{k+1}})$, donde $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ es el comienzo del elemento de longitud máxima asociado al orden convexo, aplicamos w^{-1} para obtener $\alpha_{i_{k+1}} + \gamma' = N_\alpha\alpha'$, para algunas raíces $\alpha', \gamma' \in \Delta_+^X$. Notamos que $N_\alpha > 2$, pues si $N_\alpha = 2$ entonces aplicando algún elemento del grupoide de Weyl llevamos α en una raíz simple, y usando que N_α es invariante por la acción del grupoide de Weyl, tal raíz simple tiene como escalar asociado a -1 , por lo cual no está conectado a ningún otro vértice, caso que no corresponde a tener tres raíces como antes, o no es un vértice de Cartan. Escribimos

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\theta} n_j \alpha_j, \quad \gamma = \alpha = \sum_{j=1}^{\theta} m_j \alpha_j.$$

Ahora, $m_i = N_i n_i - 1 \geq 2$, y si $j \neq i$, $m_j = N_j n_j \geq 3$, de modo que $\text{sop } \gamma = \text{sop } \alpha$. Por comodidad suponemos que $\text{sop } \alpha = \{1, \dots, \theta\}$; notemos que los vértices de $\text{sop } \beta$ corresponden a un subdiagrama conexo, para cualquier raíz positiva β .

A partir de estas observaciones hacemos un análisis de las raíces positivas usando el programa *SARNA* [GHV]. Notamos que si $|\text{sop } \beta| = s \geq 4$ y $\beta = \sum_{j=1}^{\theta} t_j \alpha_j$, entonces existen $j \neq k \in \{1, \dots, s\}$ tales que $t_j, t_k \in \{1, 2\}$, de modo que $\theta \leq 3$. Buscamos los posibles γ tales que todas sus coordenadas menos una sean ≥ 3 , y la restante sea ≥ 2 , de modo que quedan pocos casos posibles. Analizando caso por caso las posibles ternas

$$(\alpha, \gamma, i) \in \Delta_+^X \times \Delta_+^X \times \{1, \dots, \theta\} \text{ tales que existe } N \in \mathbb{N} : \alpha_i + \gamma = N\alpha,$$

notamos que $N \neq \mathbb{N}_\alpha$ en cada uno de ellos. Luego, no existen palabras de Lyndon de grado $N_\alpha\alpha$, por lo cual los generadores de dicho grado deben ser $x_\alpha^{N_\alpha}$, de modo que los elementos

$$x_{\beta_1}^{n_1} \cdots x_{\beta_k}^{n_k}, \quad \beta_i \in \Delta_+^\chi, \quad \text{donde } \begin{cases} 0 \leq n_j < N_j, & \text{si } \beta_j \notin \mathcal{O}(\chi) \\ 0 \leq n_j < \infty, & \text{si } \beta_j \in \mathcal{O}(\chi) \end{cases}$$

forman una base PBW de $U(\chi)$. Luego, como $x_\alpha^{N_\alpha} = 0$ en $\mathfrak{u}^+(\chi)$, π_χ induce un morfismo suryectivo

$$\pi'_\chi : U(\chi)/\langle x_\alpha^{N_\alpha} : \alpha \in \mathcal{O}(\chi) \rangle \longrightarrow \mathfrak{u}^+(\chi),$$

el cual aplica el conjunto

$$\{x_{\beta_1}^{n_1} \cdots x_{\beta_k}^{n_k}, \quad \beta_i \in \Delta_+^\chi, 0 \leq n_j < N_j\},$$

que genera linealmente dicho cociente, en la correspondiente base PBW de $\mathfrak{u}^+(\chi)$, con lo cual π'_χ es un isomorfismo. \square

4.3. Algunos ejemplos

En esta sección mostraremos cómo aplicar el resultado anterior para algunas familias de espacios trenzados de tipo diagonal. Empezaremos con un ejemplo en rango 2 de diagramas que no son de tipo súper ni de tipo estándar. Luego consideraremos las familias particulares de trenzas de tipo súper o estándar: G_2 , $D(2, 1; \alpha)$, $G(3)$ y $F(4)$. Finalmente, daremos la presentación de las álgebras de Nichols de tipo súper A , B , C , D , y las de tipo Cartan E .

Ejemplo 4.3.1. Sea $\zeta \in \mathbb{G}_{24}$ primitiva. Miremos la fila 12 de la Tabla 1 en la página 24, que consta de cuatro diagramas. Notemos que las raíces en $\mathcal{O}(\chi)$ son aquéllas tales que $N_\alpha = 24$.

(i) ${}_o\zeta^6 \xrightarrow{\zeta^{11}} {}_o\zeta^8$. En tal caso, tenemos las raíces simples α_1, α_2 , cuyas hiperpalabras asociadas son x_1, x_2 , y para las raíces $m\alpha_1 + \alpha_2$, $m = 1, 2, 3$ se tiene $x_{m\alpha_1 + \alpha_2} = (\text{ad}_c x_1)^m x_2$. Para las restantes,

$$x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2} = [x_{2\alpha_1 + \alpha_2}, x_{\alpha_1 + \alpha_2}]_c, \quad x_{4\alpha_1 + 3\alpha_2} = [x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}, x_{\alpha_1 + \alpha_2}]_c, \quad x_{\alpha_1 + 2\alpha_2} = [x_{\alpha_1 + \alpha_2}, x_2]_c.$$

De acuerdo al Teorema 4.2.1, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^4 = x_2^3 = x_{3\alpha_1 + \alpha_2}^{24} = x_{\alpha_1 + \alpha_2}^{24} = 0, \\ (1 - \zeta^{11})\zeta^8 q_{21} [x_1, x_{\alpha_1 + 2\alpha_2}]_c = (1 + \zeta^8)(1 - \zeta^{19})x_{\alpha_1 + \alpha_2}^2. \end{aligned}$$

(ii) ${}_o\zeta^6 \xrightarrow{\zeta} {}_o\zeta^{-1}$. Para las raíces simples α_1, α_2 , las hiperpalabras asociadas son x_1, x_2 , y para las raíces $m\alpha_1 + \alpha_2$, $m = 1, 2, 3$ se tiene $x_{m\alpha_1 + \alpha_2} = (\text{ad}_c x_1)^m x_2$. Además,

$$x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2} = [x_{2\alpha_1 + \alpha_2}, x_{\alpha_1 + \alpha_2}]_c, \quad x_{5\alpha_1 + 3\alpha_2} = [x_{2\alpha_1 + \alpha_2}, x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}]_c, \quad x_{5\alpha_1 + 2\alpha_2} = [x_{3\alpha_1 + \alpha_2}, x_{2\alpha_1 + \alpha_2}]_c.$$

De acuerdo al Teorema 4.2.1, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 , y relaciones

$$x_1^4 = x_2^{24} = x_{2\alpha_1 + \alpha_2}^{24} = (\text{ad}_c x_2)^2 x_1 = [x_{5\alpha_1 + 2\alpha_2}, (\text{ad}_c x_1)^2 x_2]_c = 0.$$

(iii) $\circ\zeta^8 \xrightarrow{\zeta^5} \circ^{-1}$. Para las raíces simples α_1, α_2 , las hiperpalabras asociadas son x_1, x_2 , y para las raíces $m\alpha_1 + \alpha_2$, $m = 1, 2$ se tiene $x_{m\alpha_1 + \alpha_2} = (\text{ad}_c x_1)^m x_2$. También,

$$\begin{aligned} x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2} &= [x_{2\alpha_1 + \alpha_2}, x_{\alpha_1 + \alpha_2}]_c, & x_{4\alpha_1 + 3\alpha_2} &= [x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}, x_{\alpha_1 + \alpha_2}]_c, \\ x_{5\alpha_1 + 3\alpha_2} &= [x_{2\alpha_1 + \alpha_2}, x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}]_c, & x_{5\alpha_1 + 4\alpha_2} &= [x_{4\alpha_1 + 3\alpha_2}, x_{\alpha_1 + \alpha_2}]_c. \end{aligned}$$

De acuerdo al Teorema 4.2.1, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^3 &= x_2^2 = x_{5\alpha_1 + 3\alpha_2}^{24} = x_{\alpha_1 + \alpha_2}^{24} = [x_{5\alpha_1 + 4\alpha_2}, x_{\alpha_1 + \alpha_2}]_c = 0, \\ [x_{2\alpha_1 + \alpha_2}, x_{4\alpha_1 + 3\alpha_2}]_c &= \frac{1 + \zeta - \zeta^5 + \zeta^6 + 2\zeta^7}{(1 + \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^{11})\zeta^{10}q_{21}} x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}^2. \end{aligned}$$

(iv) $\circ\zeta \xrightarrow{\zeta^{19}} \circ^{-1}$. Para las raíces simples α_1, α_2 , las hiperpalabras asociadas son x_1, x_2 , y para las raíces $m\alpha_1 + \alpha_2$, $m = 1, 2, 3, 4, 5$ se tiene $x_{m\alpha_1 + \alpha_2} = (\text{ad}_c x_1)^m x_2$. Además,

$$x_{5\alpha_1 + 2\alpha_2} = [x_{3\alpha_1 + \alpha_2}, x_{2\alpha_1 + \alpha_2}]_c.$$

De acuerdo al Teorema 4.2.1, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^{24} &= x_2^2 = x_{5\alpha_1 + 2\alpha_2}^{24} = (\text{ad}_c x_1)^6 x_2 = 0, \\ [x_{2\alpha_1 + \alpha_2}, x_{\alpha_1 + \alpha_2}]_c &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.2. Trenzas de tipo estándar G_2 .

Si (V, c) es de tipo Cartan G_2 , $\circ^q \xrightarrow{q^{-3}} \circ^q$, debemos analizar 3 casos:

- si $\text{ord } q = 4$, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 y relaciones

$$x_1^4 = x_2^4 = x_{3\alpha_1 + \alpha_2}^4 = x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}^4 = (\text{ad}_c x_2)^2 x_1 = [x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}, (\text{ad}_c x_1)x_2]_c = 0;$$

- si $\text{ord } q = 6$ ($q^3 = -1$), $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 y relaciones

$$x_1^6 = x_2^2 = x_{2\alpha_1 + \alpha_2}^6 = x_{\alpha_1 + \alpha_2}^6 = (\text{ad}_c x_1)^4 x_2 = [x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}, (\text{ad}_c x_1)x_2]_c = 0;$$

- si $\text{ord } q \neq 4, 6$, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 y relaciones

$$(\text{ad}_c x_1)^4 x_2 = (\text{ad}_c x_2)^2 x_1 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, \quad \alpha \in \Delta_+.$$

Las restantes trenzas de tipo estándar G_2 son las de la fila 11, también en la *Tabla 1*. Para ellas, $\zeta \in \mathbb{G}_8$ es primitiva. Si (V, c) tiene diagrama $\circ\zeta^2 \xrightarrow{\zeta} \circ\zeta^{-1}$, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 , y relaciones

$$x_1^4 = x_2^8 = x_{2\alpha_1 + \alpha_2}^8 = (\text{ad}_c x_2)^2 x_1 = [x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}, (\text{ad}_c x_1)x_2]_c = 0.$$

Si (V, c) tiene diagrama $\circ\zeta^2 \xrightarrow{\zeta^3} \circ^{-1}$, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^4 &= x_2^2 = x_{\alpha_1 + \alpha_2}^8 = x_{3\alpha_1 + \alpha_2}^8 = [x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}, (\text{ad}_c x_1)x_2]_c = 0, \\ (1 + \zeta)q_{21} [x_1, x_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}]_c &- (1 + \zeta + \zeta^2)x_{2\alpha_1 + \alpha_2}^2 = 0 \end{aligned}$$

Si (V, c) tiene diagrama $\circ \zeta \xrightarrow{\zeta^5} \circ^{-1}$, $\mathcal{B}(V)$ admite una presentación por generadores x_1, x_2 , y relaciones

$$x_1^8 = x_2^2 = x_{3\alpha_1+2\alpha_2}^8 = (\text{ad}_c x_1)^4 x_2 = [x_{3\alpha_1+2\alpha_2}, (\text{ad}_c x_1)x_2]_c = 0.$$

Notar que en [A1, Thm. 5.22], aparecen algunas relaciones extras, pues la presentación no es minimal en algunos los casos.

Ejemplo 4.3.3. Trenzas de tipo súper $D(2, 1; \alpha)$.

Recordemos que tales diagramas corresponden a las filas 9, 10, 11 de la *Tabla 2*, ver página 1.8. Fijemos la siguiente notación: sean $q, r, s \in \mathbf{k}^\times$ tales que $qrs = 1$. Denotamos $M, N, P \in \mathbb{N}$ a los órdenes de estos escalares, si son finitos. Dicha clase de equivalencia Weyl contiene a los siguientes diagramas generalizados de Dynkin:

- $\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{r^{-1}} \circ^r$,

- $\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{s^{-1}} \circ^s$,

- $\circ^r \xrightarrow{r^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{s^{-1}} \circ^s$,

- $$\begin{array}{ccc} & \circ^{-1} & \\ q \swarrow & & \searrow r \\ \circ^{-1} & \xrightarrow{s} & \circ^{-1} \end{array}$$
.

Notemos que 10, 11 son casos particulares de 9, en los casos en que $q = r$, $q = r = s \in \mathbb{G}_3$, respectivamente. Además, el segundo y tercer diagrama son análogos del primero, con lo cual basta dar la presentación de la primer y la última trenza. Como consecuencia directa del Teorema 4.2.1 y tal como fue expresado en [A3] con una prueba diferente, se tiene:

(i) Si el diagrama generalizado de Dynkin de V es

$$\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{r^{-1}} \circ^r,$$

$\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3 , y relaciones

$$x_1^M = x_2^2 = x_3^N = x_{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}^P = 0, \quad (4.45)$$

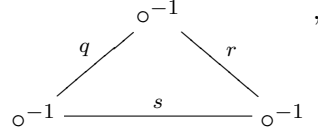
$$(\text{ad}_c x_1)^2 x_2 = (\text{ad}_c x_3)^2 x_2 = (\text{ad}_c x_1)x_3 = 0, \quad (4.46)$$

$$x_{\alpha_1+\alpha_2}^2 = 0 \text{ si } q = -1, \quad x_{\alpha_2+\alpha_3}^N \text{ si } r = -1 \quad (4.47)$$

Además, $\mathcal{B}(V)$ admite una base PBW como sigue:

$$\begin{aligned} & \{ x_3^{n_3} x_{\alpha_2+\alpha_3}^{n_{23}} x_2^{n_2} x_{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}^{n_{1232}} x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{n_{1123}} x_{\alpha_1+\alpha_2}^{n_{112}} x_1^{n_1} : \\ & \quad 0 \leq n_1 < M, \quad 0 \leq n_2 < N, \quad 0 \leq n_{1232} < P, \quad n_{12}, n_{123}, n_2, n_{23} \in \{0, 1\} \}. \end{aligned}$$

(ii) Si el diagrama generalizado de Dynkin de V es



$\mathcal{B}(V)$ está presentado por generadores x_1, x_2, x_3 , y relaciones

$$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 0, \quad (4.48)$$

$$x_{\alpha_1+\alpha_2}^M = x_{\alpha_2+\alpha_3}^N = x_{\alpha_1+\alpha_3}^P = 0, \quad (4.49)$$

$$[x_1, x_{\alpha_2+\alpha_3}]_c = \frac{1-s}{q_{23}(1-r)} x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + q_{12}(1-s)x_2x_{\alpha_1+\alpha_3}. \quad (4.50)$$

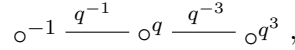
Además, $\mathcal{B}(V)$ admite una base PBW como sigue:

$$\{x_3^{n_3} x_{\alpha_2+\alpha_3}^{n_{23}} x_2^{n_2} x_{\alpha_1+\alpha_3}^{n_{13}} x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{n_{123}} x_{\alpha_1+\alpha_2}^{n_{12}} x_1^{n_1} : \\ 0 \leq n_{12} < M, 0 \leq n_{23} < N, 0 \leq n_{13} < P, n_1, n_{123}, n_2, n_3 \in \{0, 1\}\}.$$

Ejemplo 4.3.4. Trenzas de tipo súper $G(3)$.

En este ejemplo denotaremos por N, M, P a los órdenes de $q, -q^{-1}, q^3$, respectivamente, como hicimos en la Subsección 3.3.3; consideraremos además $q \notin \mathbb{G}_4$.

(i) De acuerdo al Teorema 4.2.1, si (V, c) tiene por diagrama generalizado de Dynkin a



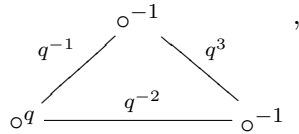
el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3 , y relaciones

$$x_1^2 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, \quad \alpha \in \Delta_+^\chi, N_\alpha \neq 2, \\ (\text{ad}_c x_2)^2 x_1 = (\text{ad}_c x_1)x_3 = (\text{ad}_c x_2)^4 x_3 = (\text{ad}_c x_3)^2 x_2 = 0.$$

(ii) Si (V, c) tiene diagrama $\circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^{-1} \xrightarrow{q^{-3}} \circ^{q^3}$, el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3 , y relaciones

$$x_1^2 = x_2^2 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, \quad \alpha \in \Delta_+^\chi, N_\alpha \neq 2, \\ [[(\text{ad}_c x_1)x_2, [(\text{ad}_c x_1)x_2, (\text{ad}_c x_1)(\text{ad}_c x_2)x_3]_c], x_2]_c = (\text{ad}_c x_3)^2 x_2 = 0.$$

(iii) Ahora, si (V, c) tiene el siguiente diagrama:



el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3 , y relaciones

$$x_2^2 = x_3^2 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, \quad \alpha \in \Delta_+^\chi, N_\alpha \neq 2, \\ [x_1, (\text{ad}_c x_2)x_3]_c + (1 + q^{-1} + q^{-2})q_{32} [(\text{ad}_c x_1)x_3, x_2]_c - q_{12}(1 - q^3)x_2(\text{ad}_c x_1)x_3 = 0, \\ (\text{ad}_c x_1)^3 x_2 = (\text{ad}_c x_1)^2 x_3 = 0.$$

(iv) Finalmente, si (V, c) tiene por diagrama a $\circ^{-q^{-1}} \xrightarrow{q^2} \circ^{-1} \xrightarrow{q^{-3}} \circ^{q^3}$, el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_2^2 &= x_\alpha^{N_\alpha} = 0, & \alpha \in \Delta_+^X, N_\alpha \neq 2, \\ (\text{ad}_c x_1)^3 x_2 &= (\text{ad}_c x_3)^2 x_2 = (\text{ad}_c x_1) x_3 = 0. \end{aligned}$$

Observación 4.3.5. Si $q \in \mathbb{G}_4$, entonces el conjunto de relaciones surge de agregar como generador del ideal a

$$[[[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c, x_j]_c, x_j]_c = 0,$$

para el segundo diagrama.

Ejemplo 4.3.6. Trenzas de tipo súper $F(4)$.

Como en la Sección anterior, N, M, P denotan los órdenes de q, q^2, q^3 , respectivamente.

(i) De acuerdo al Teorema 4.2.1, si (V, c) tiene por diagrama generalizado de Dynkin a

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q^{-1}} \circ^q \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{q^2} \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{q^2},$$

entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3, x_4 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_\alpha^{N_\alpha} = 0, & \text{donde } \alpha \neq \alpha_1, N_\alpha \neq 2, \\ (\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j &= 0, & i \neq j, 1. \end{aligned}$$

(ii) Si el diagrama de (V, c) es

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^{-1} \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{q^2} \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{q^2},$$

entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3, x_4 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2^2 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, & \text{donde } \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, N_\alpha \neq 2, \\ (\text{ad}_c x_1)x_3 &= (\text{ad}_c x_2)x_4 = (\text{ad}_c x_1)x_4 = (\text{ad}_c x_3)^2 x_4 = (\text{ad}_c x_4)^2 x_3 = (\text{ad}_c x_3)^2 x_2 = 0, \\ [[(\text{ad}_c x_1)x_2, (\text{ad}_c x_1)(\text{ad}_c x_2)x_3]_c, x_2]_c &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Si (V, c) tiene como diagrama

$$\begin{array}{ccc} \circ^{-1} & \xrightarrow{q^2} & \circ^{-1} \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{q^2}, \\ & \searrow^{q^{-1}} & \downarrow^{q^{-1}} \\ & & \circ^q \end{array}$$

entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3, x_4 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2^2 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, & \text{donde } \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, N_\alpha \neq 2, \\ (\text{ad}_c x_1)x_3 &= (\text{ad}_c x_3)x_4 = (\text{ad}_c x_3)^2 x_2 = (\text{ad}_c x_4)^2 x_1 = (\text{ad}_c x_4)^2 x_2 = 0, \\ [(\text{ad}_c x_1)(\text{ad}_c x_2)x_3, x_2]_c &= 0, \\ [x_1, (\text{ad}_c x_2)x_4]_c - q_{42}^{-1} [(\text{ad}_c x_1)x_4, x_2]_c - q_{12}(1 - q^{-1})x_2(\text{ad}_c x_1)x_4 &= 0. \end{aligned}$$

(iv) Ahora, si el diagrama de Dynkin de (V, c) es

$$\begin{array}{ccc} \circ q^2 & \xrightarrow{q^{-2}} & \circ^{-1} & \xrightarrow{q^2} & \circ^{-1} \\ & & \downarrow q & \searrow q^{-3} & \\ & & \circ^{-1} & & \end{array},$$

entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3, x_4 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_2^2 = x_3^2 = x_4^2 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, & \quad \text{donde } \alpha \neq \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, N_\alpha \neq 2, \\ (\text{ad}_c x_1)^2 x_2 = (\text{ad}_c x_1) x_3 = (\text{ad}_c x_1) x_4 = 0, \\ [(\text{ad}_c x_1)(\text{ad}_c x_2) x_3, x_2]_c = [(\text{ad}_c x_1) x_2, (\text{ad}_c x_1)(\text{ad}_c x_2) x_3]_c, x_2]_c = 0, \\ [x_2, (\text{ad}_c x_3) x_4]_c + q_{34}(1 + q + q^2) [(\text{ad}_c x_2) x_4, x_3]_c - q_{23}(1 - q^{-3}) x_3 (\text{ad}_c x_2) x_4 = 0. \end{aligned}$$

(v) Si el diagrama de Dynkin de (V, c) es

$$\circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{q^3} \circ q^{-3},$$

entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3, x_4 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^2 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, & \quad \text{donde } \alpha \neq \alpha_3, N_\alpha \neq 2, \\ (\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0, & \quad i \neq j, 3. \end{aligned}$$

(vi) Por último, si (V, c) tiene el siguiente diagrama de Dynkin

$$\circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ q^2 \xrightarrow{q^{-2}} \circ^{-1} \xrightarrow{q^3} \circ q^{-3},$$

entonces $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores x_1, x_2, x_3, x_4 , y relaciones

$$\begin{aligned} x_1^2 = x_\alpha^{N_\alpha} = 0, & \quad \text{donde } \alpha \neq \alpha_3, N_\alpha \neq 2, \\ (\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0, & \quad i \neq j, 3. \end{aligned}$$

Finalmente damos una presentación de las restantes familias de tipo súper o estándar (recorde-mos que las familias de trenzas estándares de tipo A, B coinciden con las respectivas familias de tipo súper). Notar que el resultado que presentamos a continuación se corresponde con el presente en [AAY], y las correspondientes presentaciones de las álgebras de Nichols con trenza de tipo estándar en [A1]. La prueba es diferente, y podemos entender que las potencias de raíces impares no simples constituyen relaciones redundantes (esto es, podemos no considerarlas para obtener entonces una presentación con una cantidad minimal de relaciones) a partir de los isomorfismos de Lusztig.

Teorema 4.3.7. *Sea (V, c) un espacio vectorial trenzado, con matriz de trenza $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$. Asumi-mos que el sistema de raíces asociado es de tipo súper, con componentes conexas de tipo A, B, C, D , o de tipo Cartan E_6, E_7, E_8 .*

El álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ está presentada por generadores $x_i, 1 \leq i \leq \theta$, y relaciones:

$$\begin{aligned} x_\alpha^{N_\alpha} = 0, & \quad \alpha \in \Delta_+^V \text{ tal que } N_\alpha \neq 2 \text{ o } \alpha \text{ es simple,} \\ (\text{ad}_c x_i)^{1-a_{ij}} x_j = 0, & \quad q_{ii}^{1-a_{ij}} \neq 1; \end{aligned}$$

si $q_{kk} = q_{kj}q_{jk} = q_{jj} = -1$, entonces

$$((\text{ad}_c x_k)x_j)^2 = 0$$

si $q_{kk} = -1$, $a_{kj} = a_{kl} = -1$ y $q_{kj}q_{jk}q_{kl}q_{lk} = q_{jl}q_{lj} = 1$, entonces

$$[\text{ad}_c x_j \text{ad}_c x_k(x_l), x_k]_c = 0;$$

si existe una componente de tipo B_N tal que $q_{NN}^2 + q_{NN} + 1 = q_{N-1, N-1} + 1 = 0$, entonces

$$[x_{\mathbf{u}_{N-1, N}}, x_{\mathbf{v}_{N-1, N}}]_c = 0;$$

$$[x_{\mathbf{v}_{N-2, N}}, x_{\mathbf{u}_{N-1, N}}]_c = 0;$$

si existe una componente de tipo C_N , entonces

$$[x_{\tilde{\mathbf{w}}_{N-2}}, x_{N-1}]_c = 0, \quad q_{N-2, N-2} = q_{N-1, N-1} = -1,$$

$$[x_{\mathbf{w}_{N-3, N-2}}, x_{N-1}]_c = 0, \quad q_{N-2, N-2} \neq q_{N-1, N-1} = -1,$$

$$[x_{\mathbf{w}_{N-2, N-1}}, x_{N-1}]_c = 0, \quad q_{N-1, N-1} \in \mathbb{G}_3;$$

si existe una componente de tipo D_N tal que $q_{N-1, N-1} = q_{NN} = -1$, entonces

$$[[x_{N-2}, x_{N-1}]_c, x_N]_c + q_{N-2, N-1}q_{N-1, N-2}q_{N-1, N} x_{\mathbf{u}_{N-2, N}} = 0.$$

□

4.4. Sobre una conjetura de Andruskiewitsch y Schneider

En esta sección daremos una respuesta positiva a la Conjetura 1, formulada por Andruskiewitsch y Schneider, en el caso en que el grupo de elementos de tipo grupo es abeliano; más aún, probaremos dicho resultado en el caso en que la trenza asociada es de tipo diagonal. La técnica que utilizaremos es la desarrollada por estos autores, ver por ejemplo [AS2], la cual luego fue extendida en varios trabajos para otras familias. En particular, los primeros Lemas del capítulo serán los correspondientes a relaciones que generan el ideal en el caso en que la trenza es estándar, presentes en [AGI].

En lo que sigue, Γ denotará un grupo finito y $S = \bigoplus_{n \geq 0} S(n)$ un álgebra de Hopf trezada graduada en $\frac{\mathbf{k}\Gamma}{\mathbf{k}\Gamma} \mathcal{YD}$ tal que $S(0) = \mathbf{k}1$. Fijemos una base $\{x_1, \dots, x_\theta\}$ de $V := S(1)$, y asumimos que $S(1)$ tiene trenza de tipo diagonal: así podemos considerar $x_i \in S(1)_{g_i}^{\chi_i}$, para algunos $g_i \in \Gamma$ y $\chi_i \in \hat{\Gamma}$; denotemos entonces $q_{ij} := \chi_j(g_i)$.

Probaremos que S es el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ asociada a V . De este resultado se sigue el Teorema principal de la sección, que dará la respuesta a la conjetura antes mencionada.

Para empezar, extenderemos [AS6, Lemma 5.4], probando que si las relaciones cuánticas de Serre no se satisfacen en S , entonces S no es de dimensión finita.

Proposición 4.4.1. *Sea S como antes. Si existen $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$, y además, $\text{ad}_c(x_i)^{1+m_{ij}}(x_j) \neq 0$, entonces S es de dimensión infinita.*

Demostración. Por definición de m_{ij} , tenemos que $q_{ii}^{m_{ij}} q_{ij} q_{ji} = 1$. El comienzo de esta prueba es como en [AS6, Lemma 5.4]. Para simplificar la notación, llamaremos $m = m_{ij}$, $q = q_{ii}$, $y_1 := x_i$, $y_2 := x_j$, $y_3 := \text{ad}_c(x_i)^{1+m}(x_j)$. También,

$$\begin{aligned} h_1 &= g_i, & h_2 &= g_j, & h_3 &= g_i^{m+1} g_j, \\ \eta_1 &= \chi_i, & \eta_2 &= \chi_j, & \eta_3 &= \chi_i^{m+1} \chi_j, \end{aligned}$$

de modo que $y_k \in S_{h_k}^{\eta_k}$, $1 \leq k \leq 3$. Si $W = \mathbf{k}y_1 + \mathbf{k}y_2 + \mathbf{k}y_3$, entonces $W \subset \mathcal{P}(S)$ (pues y_3 también es primitivo), lo cual induce un monomorfismo $\mathcal{B}(W) \hookrightarrow S$. Calculemos entonces la correspondiente matriz de trenza $(Q_{kl} = \eta_l(h_k))_{1 \leq k, l \leq 3}$, y consideremos el correspondiente diagrama de Dynkin generalizado:

$$\begin{array}{ccc} & \circ^{q_{jj}} & \\ q^{-m} \swarrow & & \searrow q^{-m(m+1)} q_{jj}^2 \\ \circ^q & \xrightarrow{q^{m+2}} & \circ^{q^{m+1}} q_{jj} \end{array} \quad (4.51)$$

Consideraremos los diferentes casos posibles y probaremos que ninguno de ellos está en la *Tabla 2*, ver página 25, por lo cual $\mathcal{B}(W)$, y en consecuencia S , es de dimensión finita. Supongamos entonces que tal diagrama está en la lista de Heckenberger:

Caso I: $Q_{kl} Q_{lk} \neq 1$ para todo $1 \leq k < l \leq 3$. De acuerdo al Lema 1.8.3, $1 = \prod_{k < l} Q_{kl} Q_{lk} = q^{2-m(m+1)} q_{jj}^2$, y al menos uno de los vértices está etiquetado con -1 . Notemos que $q \neq -1$, pues en tal caso $m = 0$ (y asumimos $q^{m+1} \neq 1$). También, $q_{jj} \neq q^{m+1} q_{jj}$ por hipótesis, de modo que un único vértice está etiquetado con -1 .

- Si $q_{jj} = -1$, entonces $1 = (q^{m+1} q_{jj})(q^{-m(m+1)} q_{jj}^2) = -q^{1-m^2}$ y $m = 1$ por el mismo Lema de Heckenberger, lo cual es un absurdo.
- Si $q^{m+1} q_{jj} = -1$, entonces por el mismo resultado, $1 = q q^{m+2} = q^{m+3}$ y también

$$1 = q_{jj}(q^{-m(m+1)} q_{jj}^2) = q_{jj}^3 q^{-m(m+3)+2m} = q_{jj}^3 q^{2m},$$

por lo cual deducimos que

$$-1 = (-1)^3 = q_{jj}^3 q^{3m+3} = (q_{jj}^3 q^{2m}) q^{m+3} = q^{m+3},$$

que también es una contradicción. Luego, (4.51) no pertenece a la lista en este caso.

Caso II: $Q_{12} Q_{21} = q^{-m} = 1$. En este caso, $m = 0$, por lo cual (4.51) queda de la siguiente forma:

$$\circ^q \xrightarrow{q^2} \circ^{q q_{jj}} \xrightarrow{q_{jj}^2} \circ^{q_{jj}}. \quad (4.52)$$

Si $q_{jj} = -1$ nos queda el siguiente subdiagrama conexo $\circ^q \xrightarrow{q^2} \circ^{-q}$, el cual no tiene vértices etiquetados con -1 , y tales etiquetas son diferentes entre sí. Además dicho diagrama no es de tipo Cartan finito ni se corresponde con los diagramas que no tienen vértices con etiqueta -1 en las filas 5, 9, 11, 12, 15 de la *Tabla 1* en la página 24, de modo que $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita en este caso.

Si $q_{jj} \neq -1$ y $q = -1$, la situación es análoga, por lo cual consideramos $q \neq -1$ y (4.52) es un diagrama conexo con 3 vértices. Si $q q_{jj} \neq -1$, el Lema 1.8.3 implica que vale alguna de las siguientes situaciones:

- el diagrama es de tipo Cartan finito, de modo que contiene un subdiagrama de Cartan de tipo A_2 . Luego, $1 = qq^2 = (qq_{jj})q^2$ o $1 = q_{jj}q_{jj}^2 = (qq_{jj})q_{jj}^2$, de donde $q = 1$ o $q_{jj} = 1$;
- $q^3 = 1$, q_{jj} , $q_{jj}q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$, y $q_{jj}q_{jj}^2 = 1$ o $q_{jj}^3 = 1$, $q, q_{jj}q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$ y $qq^2 = 1$.

Ninguno de estos casos es posible, por lo cual $qq_{jj} = -1$. Si el diagrama está en la *Tabla 2* se debe cumplir que $Q_{ii}Q_{i2}Q_{2i} = 1$ para algún $i \in \{1, 3\}$ en cualquiera de los casos posibles. Como estas situaciones son análogas, asumimos $i = 1$: $q^3 = 1$. Por el Lema 1.8.3, alguna de las siguientes situaciones vale para la trenza:

- $q_{jj}^3 = 1$, pero tenemos que $q_{jj}^3 = -q^{-3} = -1$,
- $q_{jj}^4 = 1$,
- $q_{jj} = -q$.

Luego, tenemos una contradicción en este caso, y así $m \neq 0$.

Caso III: $Q_{13}Q_{31} = q^{m+2} = 1$. Nos queda el siguiente diagrama:

$$\circ^q \xrightarrow{q^2} \circ^{q_{jj}} \xrightarrow{q^{-2}q_{jj}^2} \circ^{q^{-1}q_{jj}}.$$

Tal diagrama es el correspondiente a (4.52) cambiando q_{jj} con $q_{jj}q^{-1}$, de modo que tampoco pertenece a la *Tabla 2*. Luego, $q^{m+2} \neq 1$.

Caso IV: $Q_{23}Q_{32} = 1$. O sea, $q_{jj}^2 = q^{m(m+1)}$. Nos queda el siguiente diagrama:

$$\circ^{q_{jj}} \xrightarrow{q^{-m}} \circ^q \xrightarrow{q^{m+2}} \circ^{q^{m+1}q_{jj}}. \quad (4.53)$$

Por lo que ya hemos probado, tal diagrama es conexo. Como $m \neq 0$, $q^{m+1} \neq 1$, tenemos que $q \neq -1$. Consideremos entonces los diferentes valores que pueden tomar las etiquetas en los vértices:

$\mathbf{q}_{jj} = \mathbf{q}^{m+1}\mathbf{q}_{jj} = -1$: En este caso, $q^{m+1} = 1$ y nos queda el siguiente diagrama:

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^q \xrightarrow{q} \circ^{-1},$$

el cual no aparece en la lista de Heckenberger.

$\mathbf{q}_{jj} = -1, \mathbf{q}^{m+1}\mathbf{q}_{jj} \neq -1$: Mirando la *Tabla 2*, debería verificarse $1 = Q_{22}Q_{23}Q_{32} = q^{m+3}$, por lo cual el diagrama sería

$$\circ^{-q^{-2}} \xrightarrow{q^{-1}} \circ^q \xrightarrow{q^3} \circ^{-1}.$$

Además, $1 = q_{jj}^2 = q^{m(m+1)} = q^{2m} = q^{-6}$. Notemos que $q^3 \neq 1$ pues $q^m \neq 1$, por lo cual $q \in \mathbb{G}_6$. Pero tal diagrama no aparece en la lista de Heckenberger.

$\mathbf{q}_{jj} \neq -1, \mathbf{q}^{m+1}\mathbf{q}_{jj} = -1$: Como en el caso anterior, $1 = Q_{22}Q_{21}Q_{12} = q^{1-m}$. Por definición de m debemos tener $m = 1$, con el mismo diagrama del caso previo, siendo $q \in \mathbb{G}_6$ por la condición inicial del Caso IV, y obtenemos la misma contradicción.

$\mathbf{q}_{jj}, \mathbf{q}^{m+1}\mathbf{q}_{jj} \neq -1$: De acuerdo al Lema 1.8.3, vale alguna de las siguientes situaciones:

- el diagrama es de tipo Cartan. Luego, $q = q_{jj}$ y $m = 1$, o $q = q^{m+1}q_{jj} = q^{-m-2}$. En ambos casos llegamos al mismo diagrama,

$$\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^q \xrightarrow{q^3} \circ^{q^3}.$$

Fácilmente notamos que no es de tipo A_3, C_3 , pues $q, q^2 \neq q^3$. Si fuera de tipo B_3 , $q = (q^3)^2 = q^{-3}$, lo cual es una contradicción.

- $q_{jj} \in \mathbb{G}_3$, $q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$ y $1 = q^{1-m} = q_{jj}q^{2m+3}$. Luego, $m = 1$ y $q^5 = q_{jj}^{-1}$, con lo cual $q^{15} = 1$, pero obtenemos entonces una contradicción con el hecho que $q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$.
- $q^{m+1}q_{jj} \in \mathbb{G}_3$, $q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$ y $1 = q_{jj}q^{-m} = q^{m+3}$. Nuevamente $q^{15} = 1$, lo cual nos da la misma contradicción.

En consecuencia, (4.51) no está en la lista de Heckenberger, y S es de dimensión infinita. \square

A continuación presentaremos otros Lemas presentes en [AGI], que en algunos casos deberemos adaptar a este contexto más general, y luego consideraremos también relaciones que aparecen en diagramas de tipo súper.

Lema 4.4.2. *Sean $j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{kk} = -1$, $q_{kj}q_{jk} = q_{kl}^{-1}q_{lk}^{-1} \neq 1$, $q_{jl}q_{lj} = 1$. Si $[(\text{ad}_c x_j)(\text{ad}_c x_k)x_l, x_k]_c \neq 0$ es un elemento primitivo de S , entonces S es de dimensión infinita.*

Demostración. Para simplificar la notación llamaremos $u := [(\text{ad}_c x_j)(\text{ad}_c x_k)x_l, x_k]_c$, $g_u := g_j g_k^2 g_l \in \Gamma$, $\chi_u := \chi_j \chi_k^2 \chi_l \in \hat{\Gamma}$, $q := q_{lk}q_{kl}$, y trabajaremos como en la prueba anterior.

Consideramos la trenza determinada por los elementos primitivos $y_1 = x_j$, $y_2 = x_k$, $y_3 = x_l$ y $y_4 = u$, y los correspondientes elementos $h_i \in \Gamma$, $\eta_i \in \hat{\Gamma}$; probaremos que tal trenza corresponde a un álgebra de Nichols de dimensión infinita y por lo tanto S es de dimensión infinita. Para ello consideremos el correspondiente diagrama generalizado de Dynkin $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 4}$:

$$\begin{array}{ccc} \circ^{q_{jj}} & \xrightarrow{q^{-1}} & \circ^{-1} \\ q_{jj}^2 q^{-2} \Big| & & \Big| q \\ \circ^{q_{jj}q_u} & \xrightarrow{q_{ll}^2 q^2} & \circ^{q_u} \end{array} \quad (4.54)$$

Supongamos que tal diagrama aparece en la lista de Heckenberger. Notemos que si $q = -1$, entonces (4.54) contiene a (4.52) como subdiagrama, y por lo tanto no aparece en tal lista. Luego, $q \neq -1$ y como además todo diagrama de la *Tabla 3* no contiene un 4-ciclo como subdiagrama, tenemos que $q_{jj}^2 q^{-2} = 1$, o $q_{ll}^2 q^2 = 1$. Como las condiciones son simétricas, basta analizar el caso $q_{jj} = \pm q$.

Si también se tiene $q_{ll} = \pm q^{-1}$, como $Q_{44} = q_{jj}q_{ll} \neq 1$, el diagrama es de la forma

$$\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^{-q^{-1}},$$

lo cual contradice el Lema 1.8.3. Luego tenemos un diagrama conexo de 4 vértices:

$$\circ^{\pm q} \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^{q_u} \xrightarrow{q_{ll}^2 q^2} \circ^{q_{jj}q_u}.$$

Supongamos que $q_{jj} = -q$. Como $Q_{11}Q_{12}Q_{21} \neq 1$, considerando todos los diagramas de *Tabla 3* deberíamos tener $m_{12} = 2$; esto es,

$$0 = (1 - Q_{11}^3)(Q_{11}^2 Q_{12} Q_{21} - 1) = (1 + q^3)(q - 1),$$

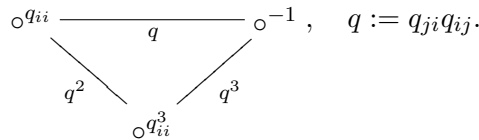
pero este hecho impone condiciones sobre q , que ningún diagrama del Lema 1.8.3 satisface.

Luego, $q_{jj} = q$. Recorriendo nuevamente la *Tabla 3* notamos que ningún diagrama satisface $Q_{22} = -1$, $Q_{11} = Q_{44}Q_{33}^{-1} = q \neq \pm 1$, de modo que (4.54) no está en tal lista. Por lo tanto, S es de dimensión infinita. \square

Lema 4.4.3. (i) Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = -1$, $q_{ii}q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_6$, y además $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$ o $m_{ij} \geq 3$. Si $[(\text{ad}_c x_j)^2 x_k, (\text{ad}_c x_j)x_k]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\}$, entonces S es de dimensión infinita.

(ii) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ii} = \pm q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ik}q_{ki} = 1$, y además $-q_{jj} = q_{ji}q_{ij}q_{jk}q_{kj} = 1$ o $q_{jj}^{-1} = q_{ji}q_{ij} = q_{jk}q_{kj} \neq -1$. Si $[(\text{ad}_c x_k)^2(\text{ad}_c x_j)x_l, (\text{ad}_c x_j)x_k]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\}$, entonces S es de dimensión infinita.

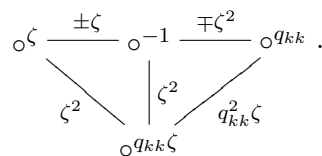
Demostración. (i) Seguimos el esquema de prueba de los Lemas anteriores. Llamamos $y_1 = x_i$, $y_2 = x_j$, $y_3 = [(\text{ad}_c x_j)^2 x_k, (\text{ad}_c x_j)x_k]_c$, y $h_i \in \Gamma$, $\eta_i \in \hat{\Gamma}$, $i = 1, 2, 3$ los elementos correspondientes. Supongamos que la trenza correspondiente a la matriz $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 3}$ aparece en la lista de Heckenberger. El diagrama generalizado de Dynkin asociado a ella es



Luego, $Q_{33} = q_{ii}^3 \neq 1$, con lo cual $m_{ij} \geq 3$. Además el diagrama es conexo, con lo cual debe ser de tipo súper $G(3)$, el único diagrama conexo de rango 3 que tiene algún $m_{rs} \geq 3$. Así, $1 = Q_{23}Q_{32} = q^3$, lo cual contradice las condiciones para el diagrama de tipo súper $G(3)$, de modo que el diagrama de (Q_{rs}) no corresponde a un álgebra de Nichols de dimensión finita. Luego, S es de dimensión infinita.

(ii) Llamemos $w := [(\text{ad}_c x_k)^2(\text{ad}_c x_j)x_l, (\text{ad}_c x_j)x_k]_c$, y denotemos como antes $y_1 = x_i$, $y_2 = x_j$, $y_3 = x_k$, $y_4 = w$, W el espacio trenzado que ellos generan, siendo además $h_i \in \Gamma$, $\eta_i \in \hat{\Gamma}$, $i = 1, 2, 3, 4$ los correspondientes elementos: suponemos nuevamente que la matriz de trenza $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 4}$ corresponde a un álgebra de Nichols de dimensión finita. Sea además $\zeta = q_{ii} \in \mathbb{G}_3$. Analizamos cada caso posible.

- $q_{jj} = -1$, $q_{ji}q_{ij}q_{jk}q_{kj} = 1$: el diagrama asociado a (Q_{rs}) es



Notemos que $Q_{12}Q_{21}$, $Q_{14}Q_{41}$, $Q_{42}Q_{24} \neq 1$, y el producto de estos tres escalares no es 1, con lo cual no está en la lista de Heckenberger, de acuerdo al Lema 1.8.3.

- $q_{jj}^{-1} = q_{ji}q_{ij} = q_{jk}q_{kj} \neq -1$: en este caso tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \circ\zeta & \xrightarrow{\pm\zeta} & \circ\pm\zeta^2 & \xrightarrow{\pm\zeta} & \circ q_{kk} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & \zeta^2 & & q_{kk}^2\zeta^2 & \\ & & \circ q_{kk}\zeta & & \end{array} .$$

Como no hay 4-ciclos, se tiene $1 = Q_{34}Q_{43} = q_{kk}^2\zeta^2$, con lo cual $q_{kk}\zeta = -1$, pues $Q_{44} = q_{kk}\zeta \neq 1$. Pero tal diagrama no aparece en la *Tabla 3*.

En todos los casos posibles obtenemos un absurdo, que viene de suponer que $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita. Luego, S es de dimensión infinita. \square

Lema 4.4.4. Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ik}q_{ki}, q_{ij}q_{ji}, q_{jk}q_{kj} \neq 1$. Si

$$[x_i, (\text{ad}_c x_j)x_k]_c - \frac{1 - q_{jk}q_{kj}}{q_{kj}(1 - q_{ik}q_{ki})} [(\text{ad}_c x_i)x_k, x_j]_c - q_{ij}(1 - q_{kj}q_{jk}) x_j(\text{ad}_c x_i)x_k \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\},$$

entonces S es de dimensión infinita.

Demostración. Como antes, sean $y_1 = x_i, y_2 = x_j, y_3 = x_k, y_4$ la relación en cuestión, W el espacio trenzado que ellos generan, y $h_i \in \Gamma, \eta_i \in \bar{\Gamma}, i = 1, 2, 3, 4$ los correspondientes elementos: suponemos nuevamente que la matriz de trenza de $W, (Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 4}$ corresponde a un álgebra de Nichols de dimensión finita. Calculamos entonces

$$Q_{14}Q_{41} = q_{ii}^2 q_{ij} q_{ji} q_{ik} q_{ki} = q_{ii}^2 q_{jk}^{-1} q_{kj}^{-1},$$

pues usamos el hecho que $q_{ij}q_{ji}q_{ik}q_{ki}q_{kj}q_{jk} = 1$, ver [H3, Lemma 9(ii)], el cual también nos dice que al menos un vértice está etiquetado con -1 . Así, si $q_{ii} = -1$, se tiene $Q_{14}Q_{41} \neq -1$; lo mismo vale para los otros vértices, con lo cual exactamente uno puede estar etiquetado con -1 . Mirando los pocos diagramas de este tipo en la *Tabla 2*, deducimos que $\mathcal{B}(W)$ tiene dimensión infinita, lo que termina la prueba. \square

Lema 4.4.5. (i) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que verifican alguna de las siguientes condiciones:

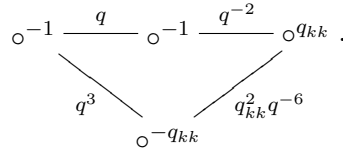
- $q_{ii} = q_{jj} = -1, (q_{ij}q_{ji})^2 = (q_{jk}q_{kj})^{-1}, q_{ik}q_{ki} = 1, o$
- $q_{jj} = q_{kk} = q_{jk}q_{kj} = -1, q_{ii} = -q_{ij}q_{ji} \in \mathbb{G}_3, q_{ik}q_{ki} = 1, o$
- $q_{ii} = q_{jj} = q_{kk} = -1, q_{ij}q_{ji} = q_{kj}q_{jk} \in \mathbb{G}_3, q_{ik}q_{ki} = 1, o$
- $q_{ii} = q_{kk} = -1, q_{jj} = -q_{kj}q_{jk} = (q_{ij}q_{ji})^{\pm 1} \in \mathbb{G}_3, q_{ik}q_{ki} = 1.$

Si $[[(\text{ad}_c x_i)x_j, (\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k]_c, x_j]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\}$, entonces S es de dimensión infinita.

(ii) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ii} = q_{jj} = -1, (q_{ij}q_{ji})^3 = (q_{jk}q_{kj})^{-1}, q_{ik}q_{ki} = 1$. Si $[[(\text{ad}_c x_i)x_j, [(\text{ad}_c x_i)x_j, (\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k]_c]_c, x_j]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\}$, entonces S es de dimensión infinita.

Demostración. (i) Sean $y_1 = x_i, y_2 = x_j, y_3 = x_k, y_4 = [[(\text{ad}_c x_i)x_j, (\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k]_c, x_j]_c$, W el espacio trenzado que ellos generan, y $h_i \in \Gamma, \eta_i \in \hat{\Gamma}, i = 1, 2, 3, 4$ los correspondientes elementos. Calculamos la matriz de trenza $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 4}$ en cada caso, y el correspondiente diagrama de Dynkin generalizado.

Para el primer caso, nos queda el siguiente diagrama, donde $q = q_{ij}q_{ji}$:



Supongamos que $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión finita. Entonces, $Q_{33}Q_{32}Q_{23} = 1$, por lo cual $q_{kk} = q^2$, y así $Q_{34}Q_{43} = q^{-2} \neq 0$: el diagrama anterior debe corresponder a uno de tipo súper $F(4)$. Luego, $1 = Q_{14}Q_{41} = q^3$, lo cual es un absurdo (por las condiciones en la trenza de este tipo).

Para el segundo caso, $Q_{12}Q_{21} = Q_{14}Q_{41} = -q_{ii} \neq 1, Q_{24}Q_{42} = -q_{ii}^2 \neq 1$, con lo cual

$$Q_{12}Q_{21}Q_{14}Q_{41}Q_{24}Q_{42} = -q_{ii} \neq 1 \quad \text{pues } q_{ii} \in \mathbb{G}_3,$$

y así $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, a partir del Lema 1.8.3.

Para el tercero, $Q_{44} = 1$, de donde $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita. Finalmente, en el último caso,

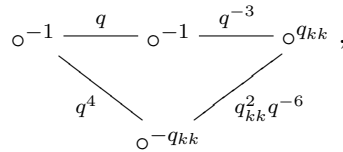
$$Q_{23}Q_{32} = -q_{jj} \neq -1, \quad Q_{34}Q_{43} = -1, \quad Q_{24}Q_{42} = \begin{cases} -1, \\ -q_{jj}^2 \end{cases}$$

con lo cual $Q_{12}Q_{21}Q_{14}Q_{41}Q_{24}Q_{42} = -q_{jj} \neq 1$, o -1 , y vale la misma conclusión que en el segundo caso. Así, para los cuatro diagramas, $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, por lo cual S también.

(ii) Usamos la misma notación, donde en este caso

$$y_4 = [[(\text{ad}_c x_i)x_j, [(\text{ad}_c x_i)x_j, (\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k]_c], x_j]_c .$$

Así nos queda el siguiente diagrama para (Q_{rs}) :



donde $q = q_{ij}q_{ji}$. Supongamos que $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión finita. Mirando la *Tabla 3*, la única posibilidad de extender un diagrama de tipo súper $G(3)$ es cuando $q \in \mathbb{G}_4, Q_{34}Q_{43} = 1, Q_{44} = q, Q_{14}Q_{41} = -q$, lo cual no es posible es nuestro caso. En consecuencia, se debe tener $1 = Q_{41}Q_{14} = Q_{34}Q_{43}$, de donde $q_{kk} = \pm 1$. Absurdo, pues en tal caso $Q_{33} = 1$, o $Q_{44} = 1$. Luego, $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, y en consecuencia S también. \square

Lema 4.4.6. Sean $i, j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj}q_{ij}q_{ji} = q_{jj}q_{kj}q_{jk} = 1, (q_{kj}q_{jk})^2 = (q_{lk}q_{kl})^{-1} = q_{ll}, q_{kk} = -1, q_{ik}q_{ki} = q_{il}q_{li} = q_{jl}q_{lj} = 1$. Si

$$[[[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)(\text{ad}_c x_k)x_l, x_k]_c, x_j]_c, x_k]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\},$$

entonces S es de dimensión infinita.

Demostración. Con una notación similar a la de los Lemas anteriores, debemos determinar si $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, donde W es un espacio trenzado de tipo diagonal, cuyo diagrama generalizado de Dynkin es

$$\begin{array}{ccccccc} \circ^{q_{ii}} & \xrightarrow{q^{-1}} & \circ^q & \xrightarrow{q^{-1}} & \circ^{-1} & \xrightarrow{q^2} & \circ^{q^{-2}}, & q = q_{jj}. \\ & \searrow & & & & & & \\ & & \circ^{-q_{ii}} & & & & & \\ & & & \nearrow & & & & \\ & & & & & & & \end{array}$$

Además, $q_{ii} \in \{q, -1\}$. Supongamos que $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión finita: como no existen 5-ciclos, se tiene $1 = Q_{15}Q_{51}$, de donde $q_{ii} = q$, pero tal diagrama conexo de 5 vértices no es de tipo finito. Así obtenemos un absurdo, con lo cual $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, y S también. \square

Lema 4.4.7. (i) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1} = q_{jk}q_{kj} \in \mathbb{G}_3$. Si

$$[[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c, x_j]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\},$$

entonces S es de dimensión infinita.

(ii) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jj} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1} = q_{jk}q_{kj} \in \mathbb{G}_4$. Si

$$[[[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c, x_j]_c, x_j]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\},$$

entonces S es de dimensión infinita.

Demostración. (i) Siguiendo una notación análoga a los Lemas anteriores, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ^{q_{ii}} & \xrightarrow{\zeta^2} & \circ^\zeta & \xrightarrow{\zeta} & \circ^{q_{kk}}, & \zeta = q_{jj} \in \mathbb{G}_3, \\ & \searrow & & & & & \\ & & \circ^{q_{kk}q_{ii}} & & & & \\ & & & \nearrow & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

donde $y_1 = x_i$, $y_2 = x_j$, $y_3 = x_k$, $y_4 = [[(\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c, x_j]_c$, y miramos la trenza correspondiente (Q_{rs}) . También llamamos W al espacio vectorial trenzado que generan. Ahora,

- si $q_{ii} = q_{kk} = -1$, entonces $Q_{44} = 1$;
- si $q_{ii}, q_{kk} \neq -1$, entonces el diagrama posee un 4-ciclo;
- si $q_{ii} = -1$, $q_{kk} \neq -1$, o $q_{ii} \neq -1$, $q_{kk} = -1$, el diagrama contiene un subdiagrama conexo de rango 2 de la forma $\circ^q \xrightarrow{q^2} \circ^{-q}$, que no aparece en la *Tabla 1*.

En cualquier caso, $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, y S también.

(ii) La solución es análoga. \square

Lema 4.4.8. (i) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{ii} = -1$, $q_{jj}^{-1} = -q_{ij}q_{ji}q_{jk}q_{kj} \notin \{-1, q_{ij}q_{ji}\}$, $q_{ik}q_{ki} = 1$. Si $[(\text{ad}_c x_i)x_j, (\text{ad}_c x_i)(\text{ad}_c x_j)x_k]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\}$, entonces S es de dimensión infinita.

(ii) Sean $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $q_{jk}q_{kj} = 1$, $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$, $q_{ij}q_{ji}, q_{ki}q_{ik} \neq q_{ii}^{-1}$. Si

$$[(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i)^2 x_k]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\},$$

entonces S es de dimensión infinita.

Demostración. Para los dos ítems consideraremos la misma notación. Miraremos el espacio trezado W determinado por $y_1 = x_i, y_2 = x_j, y_3 = x_k$ e y_4 el elemento primitivo correspondiente a la relación en cuestión, donde $y_i \in W_{h_i}^{\eta_i}$, para ciertos $h_i \in \Gamma, \eta_i \in \hat{\Gamma}$, y obtendremos el diagrama generalizado de Dynkin correspondiente a $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))$.

(i) Consideramos los tres diagramas posibles para i, j, k , como en el Lema 4.2.19:

$$\begin{array}{ccc} \circ^{-1} \xrightarrow{\zeta} \circ^{-\zeta} \xrightarrow{\zeta} \circ^{-1}, & \circ^{-1} \xrightarrow{-1} \circ \xrightarrow{\zeta^2} \circ^{-1}, & \circ^{-1} \xrightarrow{\zeta} \circ \xrightarrow{-\zeta} \circ^{-1}. \\ \swarrow \zeta^2 \quad \downarrow \zeta \quad \searrow -\zeta^2 & \swarrow -\zeta & \swarrow \zeta^2 \quad \downarrow -\zeta \quad \searrow -\zeta^2 \\ & \circ^{-\zeta^2} & \circ^{-\zeta^2} \end{array}$$

Para el primer y el tercer diagrama, $Q_{12}Q_{21}, Q_{24}Q_{42}, Q_{14}Q_{41} \neq 1$, y el producto de estos tres escalares no es 1, por lo cual $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, por el Lema 1.8.3. El segundo vemos que no aparece en la *Tabla 3*, de modo que también $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita en este caso. Así, S es de dimensión infinita.

(ii) Ahora, consideramos las dos posibilidades para la trenza (q_{rs}) : $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = -q_{ik}q_{ki} =: \zeta \in \mathbb{G}_3, q_{jj} = -1, q_{kk} \in \{-1, -\zeta^2\}$. Luego, el diagrama de (Q_{rs}) es:

$$\begin{array}{ccc} \circ^{-1} \xrightarrow{\zeta} \circ \xrightarrow{-\zeta} \circ^{q_{kk}}. \\ \downarrow -\zeta \quad \searrow q_{kk}^2 \zeta \\ \circ^{-q_{kk}} \end{array}$$

Si $q_{kk} = -1$, entonces $Q_{44} = 1$; si $q_{kk} = -\zeta^2$, entonces

$$Q_{23}Q_{32}, Q_{24}Q_{42}, Q_{34}Q_{43} \neq 1, \quad Q_{23}Q_{32}Q_{24}Q_{42}Q_{34}Q_{43} \neq 1.$$

En cualquier caso, $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, y S también. □

Lema 4.4.9. Sean $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que se verifica alguna de las siguientes situaciones:

(i) $-q_{ii}, -q_{jj}, q_{ii}q_{ij}q_{ji}, q_{jj}q_{ji}q_{ij} \neq 1$,

$$(1 - q_{ij}q_{ji})q_{jj}q_{ji} [x_i, [(\text{ad}_c x_i)x_j, x_j]_c]_c - (1 + q_{jj})(1 - q_{jj}q_{ji}q_{ij}) ((\text{ad}_c x_i)x_j)^2 \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\};$$

(ii) $q_{jj} = -1, q_{ii}q_{ij}q_{ji} \notin \mathbb{G}_6$, y además $m_{ij} \in \{4, 5\}$, o $m_{ij} = 3, q_{ii} \in \mathbb{G}_4$,

$$[x_i, [(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c]_c - \frac{1 - q_{ii}q_{ji}q_{ij} - q_{ii}^2 q_{ji}^2 q_{ij}^2 q_{jj}}{(1 - q_{ii}q_{ij}q_{ji})q_{ji}} ((\text{ad}_c x_i)^2 x_j)^2 \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\};$$

(iii) $4\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^X, q_{jj} = -1$ o $m_{ij} = 2$, y además $m_{ij} \geq 3$, o $m_{ij} = 2, q_{ii} \in \mathbb{G}_3$,

$$[x_{3\alpha_i+2\alpha_j}, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\};$$

(iv) $3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^X, 5\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^X$, y $q_{ii}^3 q_{ij} q_{ji}, q_{ii}^4 q_{ij} q_{ji} \neq 1$,

$$[(\text{ad}_c x_i)^2 x_j, x_{3\alpha_i+2\alpha_j}]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\};$$

(v) $4\alpha_i + 3\alpha_j \in \Delta_+^X$, $5\alpha_i + 4\alpha_j \notin \Delta_+^X$,

$$[x_{4\alpha_i+3\alpha_j}, (\text{ad}_c x_i)x_j]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\};$$

(vi) $5\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^X$, $7\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^X$,

$$[[(\text{ad}_c x_i)^3 x_j, (\text{ad}_c x_i)^2 x_j], (\text{ad}_c x_i)^2 x_j]_c \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\};$$

(vii) $q_{jj} = -1$, $5\alpha_i + 4\alpha_j \in \Delta_+^X$,

$$[x_{2\alpha_i+\alpha_j}, x_{4\alpha_i+3\alpha_j}]_c - ax_{3\alpha_i+2\alpha_j}^2 \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\},$$

para algún escalar $a \in \mathbf{k}$.

Entonces S es de dimensión infinita.

Demostración. Para empezar, observamos que el único diagrama generalizado de Dynkin conexo de rango 3 tal que $3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^X$, para algunos i, j , es el de tipo súper $G(3)$, que es justamente el único tal que algún $m_{kl} \geq 3$ (justamente, $m_{ij} = 3$). Además, ningún diagrama conexo de rango 3 contiene una raíz de la forma $4\alpha_i + 3\alpha_j$, o de la forma $5\alpha_i + 4\alpha_j$.

Como en los Lemas anteriores, miramos la trenza correspondiente a W , el subespacio trenzado determinado por elementos primitivos $y_1 = x_i$, $y_2 = x_j$ e y_3 el elemento primitivo correspondiente a la relación a considerar, y su correspondiente diagrama de Dynkin.

(i) Si $Q_{13}Q_{31} \neq 1$ o $Q_{23}Q_{32} \neq 1$, entonces $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita. En otro caso,

$$Q_{13}Q_{31} = q_{ii}^4 q_{ij}^2 q_{ji}^2 = 1, \quad Q_{23}Q_{32} = q_{jj}^4 q_{ij}^2 q_{ji}^2 = 1,$$

con lo cual $Q_{33} = q_{ii}^4 q_{ij}^4 q_{ji}^4 q_{jj}^4 = 1$, y $\mathcal{B}(W)$ también es de dimensión infinita.

(ii) Si $q_{ii} \in \mathbb{G}_4$, $q_{ij}q_{ji} = q_{ii} = q_{jj}^{-1}$ (esto es, (q_{rs}) es de tipo Cartan G_2), entonces

$$Q_{33} = q_{ii}^{16} q_{ij}^8 q_{ji}^8 q_{jj}^4 = 1,$$

con lo cual $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita. En otro caso, $Q_{13}Q_{31} \neq 1$, o $Q_{23}Q_{32} \neq 1$, o

$$Q_{13}Q_{31} = q_{ii}^8 q_{ij}^2 q_{ji}^2 = 1, \quad Q_{23}Q_{32} = q_{ij}^4 q_{ji}^4 q_{jj}^4, \quad \text{con lo cual } Q_{33} = 1,$$

y en cualquier caso $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, por lo observado al comenzar el Lema.

(iii) En este caso, calculamos

$$Q_{33} = q_{ii}^{16} q_{ij}^{12} q_{ji}^{12} q_{jj}^9, \quad Q_{13}Q_{31} = q_{ii}^8 q_{ij}^3 q_{ji}^3, \quad Q_{23}Q_{32} = q_{ij}^4 q_{ji}^4 q_{jj}^6.$$

Si (q_{rs}) es de tipo Cartan G_2 con $q_{ii} \in \mathbb{G}_6$, $q_{ij}q_{ji} = q_{jj} = -1$, entonces $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita, pues es un diagrama conexo de rango 3, que no es de tipo súper $G(3)$ y tal que $M_{12} = 3$. En otro caso, basta con verificar que $Q_{13}Q_{31} \neq 1$ o $Q_{23}Q_{32} \neq 1$ para concluir que $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita. Si $m_{ji} \geq 2$, los casos posibles son:

- $q_{ii} = -\zeta$, $q_{ij}q_{ji} = \zeta^7$, $q_{jj} = \zeta^3$, $\zeta \in \mathbb{G}_9$; en tal caso, $Q_{23}Q_{32} = \zeta$.
- $q_{ii} = -\zeta$, $q_{ij}q_{ji} = -\zeta^{12}$, $q_{jj} = \zeta^5$, $\zeta \in \mathbb{G}_{15}$; así, $Q_{23}Q_{32} = \zeta^3$.

Además, si $q_{ii} = \zeta^8$, $q_{ij}q_{ji} = \zeta^3$, $q_{jj} = -1$, $\zeta \in \mathbb{G}_{12}$, se tiene $Q_{13}Q_{31} = \zeta$. En todos los casos restantes, $q_{jj} = -1$ y $q_{ij}q_{ji} \notin \mathbb{G}_4$, con lo cual $Q_{23}Q_{32} \neq 1$.

(iv) Analizamos los dos casos posibles para los cuales la relación no es redundante.

$$\circ\zeta^3 \xrightarrow{\zeta^8} \circ^{-1}, \quad \zeta \in \mathbb{G}_9, \quad \circ\eta^3 \xrightarrow{-\eta^4} \circ^{-\eta^{-4}}, \quad \eta \in \mathbb{G}_{15}.$$

Para ello, notamos primero que ambos no están contenidos en ningún diagrama conexo de rango 3 cuya álgebra de Nichols sea de dimensión finita, de modo que basta verificar que $Q_{13}Q_{31} \neq 1$ o $Q_{23}Q_{32} \neq 1$. Para el primero, $Q_{23}Q_{32} = \zeta^4 \neq 1$; y para el segundo, $Q_{23}Q_{32} = -\eta^{-4} \neq 1$, con lo cual $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita para ambos.

(v) La prueba es similar al caso (iii). Notemos que

$$Q_{33} = q_{ii}^{25} q_{ij}^{12} q_{ji}^{20} q_{jj}^{16}, \quad Q_{13}Q_{31} = q_{ii}^{10} q_{ij}^4 q_{ji}^4, \quad Q_{23}Q_{32} = q_{ij}^5 q_{ji}^5 q_{jj}^8.$$

Para los diagramas que satisfacen las condiciones de este ítem, $q_{jj} = -1$. Además, si $q_{ii} = \zeta \in \mathbb{G}_5$, $q_{ij}q_{ji} = \zeta^2$, se tiene que $Q_{33} = 1$. Para los restantes, $q_{ij}q_{ji} \notin \mathbb{G}_5$, con lo cual $Q_{32}Q_{23} \neq -1$, y por lo observado al comienzo de la prueba, $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita en todos los casos posibles.

(vi) Nuevamente calculamos

$$Q_{33} = q_{ii}^{49} q_{ij}^{21} q_{ji}^{21} q_{jj}^9, \quad Q_{13}Q_{31} = q_{ii}^{14} q_{ij}^3 q_{ji}^3, \quad Q_{23}Q_{32} = q_{ij}^7 q_{ji}^7 q_{jj}^6.$$

Para los diagramas que satisfacen las condiciones de este ítem, $q_{jj} = -1$ y $q_{ij}q_{ji} \notin \mathbb{G}_7$, con lo cual $Q_{23}Q_{32} \neq 1$. Luego, $\mathcal{B}(W)$ es de dimensión infinita.

(vii) La prueba es análoga a la de (i).

En todos los casos, concluimos que S es de dimensión infinita. □

A continuación podremos probar los Teoremas 4.4.10 y 4.4.12, que constituyen los resultados centrales de esta Sección.

Teorema 4.4.10. *Sea $S = \bigoplus_{n \geq 0} S(n)$ un álgebra de Hopf graduada en ${}_{\mathbf{k}\Gamma}^{\mathbf{k}\Gamma} \mathcal{YD}$ de dimensión finita, Γ un grupo abeliano finito, tal que $S(0) = \mathbf{k}1$. Fijemos una base x_1, \dots, x_θ de $V := S(1)$, tal que $x_i \in S(1)_{g_i}^{\chi_i}$ para algunos $g_i \in \Gamma$ y $\chi_i \in \hat{\Gamma}$, y llamemos $q_{ij} := \chi_j(g_i)$. Si S está generada como álgebra por $S(0) \oplus S(1)$, entonces $S \cong \mathcal{B}(V)$.*

Demostración. Como S está generada como álgebra por $S(0) \oplus S(1)$, la proyección canónica $T(V) \rightarrow \mathcal{B}(V) = T(V)/I(V)$ induce un morfismo suryectivo de álgebras de Hopf trenzadas $\pi : S \rightarrow \mathcal{B}(V)$, que es graduado; podemos considerar $S = T(V)/I$, para algún ideal de Hopf trenzado I de $T(V)$, generado por elementos de grado ≥ 2 , $I \subseteq I(V)$.

Supongamos que $I(V) \not\supseteq I$. Entonces al menos uno de los generadores de $I(V)$ del Teorema 4.2.1 no pertenece a I . Consideremos entonces un generador $\mathbf{x} \in I(V) \setminus I$ de grado mínimo k . Luego, \mathbf{x} es primitivo en S , de acuerdo al Lema 4.2.2.

A partir de la Proposición 4.4.1, y los Lemas 4.4.2-4.4.9, deducimos que $\mathbf{x} = x_\alpha^{N_\alpha}$ para algún $\alpha \in \Delta_+^X \setminus \mathcal{O}$, o alguna raíz simple $\alpha = \alpha_i$ tal que i no es un vértice de Cartan, o $\alpha = \alpha_i + \alpha_j$,

$N_\alpha = 2$, $q_{ii} = q_{jj} = q_{ij}q_{ji} = -1$. Entonces, si $g_\alpha \in \Gamma$, $\chi_\alpha \in \hat{\Gamma}$ son los correspondientes elementos, se tiene que $q_\alpha = \chi_\alpha(g_\alpha)$, la cual es una raíz de la unidad de orden N_α . Luego, $g_\alpha^{N_\alpha} \in \Gamma$ y $\chi_\alpha^{N_\alpha} \in \hat{\Gamma}$ son los elementos correspondientes a \mathbf{x} , de modo que

$$c(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) = g_\alpha^{N_\alpha} \cdot \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = \chi_\alpha^{N_\alpha} (g_\alpha^{N_\alpha}) \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x},$$

y \mathbf{x} genera en S una subálgebra de dimensión infinita, por ser primitiva en S . Absurdo, que viene de suponer que $I(V) \neq I$. Luego, $S \cong \mathcal{B}(V)$. \square

Observación 4.4.11. Podemos notar que en la prueba del Teorema anterior no usamos el hecho que la trenza se realiza sobre un grupo abeliano, sino simplemente que la trenza es de tipo diagonal. Por lo tanto, la conclusión del Teorema sigue valiendo si $S \in_H^H \mathcal{YD}$ tiene trenza de tipo diagonal, para H cualquier álgebra de Hopf.

El siguiente Teorema responde afirmativamente [AS2, Conj. 1.4] en el caso en que el grupo de elementos de tipo grupo es abeliano, y extiende [AS6, Thm. 5.5].

Teorema 4.4.12. *Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita sobre un grupo abeliano Γ . Entonces H está generada por sus elementos casi primitivos y de tipo grupo.*

Demostración. Sea $\text{gr } H = R\#\mathbf{k}\Gamma$, $V = R(1)$. Entonces H está generada por sus elementos de tipo grupo y casi primitivos si y sólo si $\text{gr } H$ lo está, lo cual es equivalente a que R es el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$. Sea S el dual graduado R^* en la categoría $\mathbf{k}_\Gamma^\Gamma \mathcal{YD}$. De acuerdo al Lema 1.5.3 basta con probar que S es el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V^*)$, lo cual se sigue del Teorema 4.4.10. \square

Capítulo 5

Álgebras cuasi-Hopf básicas sobre grupos cíclicos

En este capítulo introducimos la noción de álgebra cuasi-Hopf y damos su relación con las categorías tensoriales. Luego, abordamos el problema de clasificación de las álgebras cuasi-Hopf básicas salvo torcimiento siguiendo los resultados presentes en [A2].

5.1. Preliminares sobre álgebras cuasi-Hopf y categorías tensoriales

En esta sección recordaremos las definiciones de álgebra cuasi-Hopf y categoría tensorial punteada. También describiremos los procesos de equivariantización y de-equivariantización de categorías tensoriales. Luego consideraremos algunos ejemplos que nos serán importantes en las siguientes secciones.

En esta sección \mathbf{k} es simplemente un cuerpo. A partir de la sección siguiente pediremos de nuevo que sea un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0.

5.1.1. Álgebras cuasi-Hopf, definición y ejemplos

Definición 5.1.1. Una *cuasi-bialgebra* es una cuaterna $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, donde H es una \mathbf{k} -álgebra asociativa con unidad, $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$, $\varepsilon : H \rightarrow \mathbf{k}$ son morfismos de álgebras (denominados coproducto y counidad respectivamente) y $\Phi \in H^{\otimes 3}$ es un elemento invertible (llamado el *asociador*) que satisfacen:

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi)(\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi) = (1 \otimes \Phi)(\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi)(\Phi \otimes 1), \quad (5.1)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\Phi) = 1 \otimes 1, \quad (5.2)$$

y para cada $h \in H$:

$$(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(h) = \Phi((\Delta \otimes \text{id})\Delta(h))\Phi^{-1}, \quad (5.3)$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id})\Delta(h) = (\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta(h) = h. \quad (5.4)$$

Notemos que (5.3) es una forma débil de coasociatividad. Usaremos para el coproducto la notación de Sweedler $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$, omitiendo las sumatorias pero recordando que el coproducto no es coasociativo, y denotaremos

$$\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2 \otimes \Phi_3, \quad \Phi^{-1} = \bar{\Phi}_1 \otimes \bar{\Phi}_2 \otimes \bar{\Phi}_3.$$

Definición 5.1.2. Sea H una cuasi-biálgebra. Un *torcimiento* para H es un elemento invertible $J \in H \otimes H$ tal que $(\varepsilon \otimes \text{id})(J) = (\text{id} \otimes \varepsilon)(J) = 1$.

Para cada torcimiento J se define una nueva cuasi-biálgebra H^J , cuya estructura de álgebra y counidad son las mismas que las de H , pero donde el coproducto y el asociador están dados por:

$$\Delta^J(h) := J^{-1} \Delta(h) J, \quad h \in H, \quad (5.5)$$

$$\Phi^J := (1 \otimes J)^{-1} (\text{id} \otimes \Delta)(J)^{-1} \Phi (\Delta \otimes \text{id})(J)(J \otimes 1). \quad (5.6)$$

H^J se dice *equivalente por torcimiento* a H .

Definición 5.1.3. Sea H una cuasi-biálgebra. Una *antípoda* de H es una terna $(\mathcal{S}, \alpha, \beta)$, donde $\mathcal{S} : H \rightarrow H^{op}$ es un morfismo de álgebras y $\alpha, \beta \in H$ satisfacen:

$$\mathcal{S}(h_1) \alpha h_2 = \varepsilon(h) \alpha, \quad h_1 \beta \mathcal{S}(h_2) = \varepsilon(h) \beta, \quad \text{para todo } h \in H, \quad (5.7)$$

$$\Phi_1 \beta \mathcal{S}(\Phi_2) \alpha \Phi_3 = 1, \quad \mathcal{S}(\bar{\Phi}_1) \alpha \bar{\Phi}_2 \beta \mathcal{S}(\bar{\Phi}_3) = 1. \quad (5.8)$$

Un *álgebra cuasi-Hopf* es una cuasi-biálgebra $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ que admite una antípoda $(\mathcal{S}, \alpha, \beta)$ tal que \mathcal{S} es biyectiva.

La antípoda de un álgebra cuasi-Hopf no es única, pero está unívocamente caracterizada, salvo elementos invertibles de H .

Lema 5.1.4. [D2, Prop. 1.1] Sea $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathcal{S}, \alpha, \beta)$ un álgebra cuasi-Hopf. $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ es otra antípoda de H si y sólo si existe un elemento invertible $u \in H$ tal que

$$\bar{\alpha} = u \alpha, \quad \bar{\beta} = \beta u^{-1}, \quad \bar{\mathcal{S}}(h) = u \mathcal{S}(h) u^{-1}, \quad \text{para todo } h \in H.$$

Demostración. Se deduce al considerar $u = \bar{\mathcal{S}}(\Phi_1) \bar{\alpha} \bar{\Phi}_2 \beta \mathcal{S}(\bar{\Phi}_3)$. □

Observación 5.1.5. Sea H un álgebra cuasi-Hopf. Entonces $\text{Rep } H$ es una categoría tensorial.

Para ello, $M \otimes N$ tiene la estructura canónica de H -módulo dada por $\Delta, h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$, y el isomorfismo de asociatividad $a : (\bullet \otimes \bullet) \otimes \bullet \rightarrow \bullet \otimes (\bullet \otimes \bullet)$ está dado por la acción de Φ . La unidad es $\mathbb{I} = (\mathbf{k}, \varepsilon)$ como en el caso de las álgebras de Hopf, y los duales a derecha e izquierda se construyen a partir de \mathcal{S} , sólo que α y β alteran los morfismos de evaluación y coevaluación: si $(v_i)_{i=1, \dots, n}$ y $(f_i)_{i=1, \dots, n}$ son bases duales de $V, V^* \in \text{Rep } H$, se tiene:

$$b_V(1) = \sum_{i=1}^n \beta \cdot v_i \otimes f_i, \quad e_V(f \otimes v) = f(\alpha \cdot v), \quad v \in V, f \in V^*.$$

Ejemplo 5.1.6. Todo álgebra de Hopf es un álgebra cuasi-Hopf con $\Phi = 1 \otimes 1 \otimes 1$ y $\alpha = \beta = 1$.

Para cada grupo finito Γ con unidad e y cada $\omega \in H^3(\Gamma, \mathbf{k}^\times)$, el álgebra $H = \text{Fun}(\Gamma, \mathbf{k})$ del Ejemplo 1.1.10 es un álgebra cuasi-Hopf (que denotaremos $\text{Fun}(\Gamma, \mathbf{k})_\omega$) con las estructuras usuales

$$\Delta(1_g) = \sum_{h \in \Gamma} 1_h \otimes 1_{h^{-1}g}, \quad \varepsilon(1_g) = \delta_{g,e}, \quad \mathcal{S}(1_g) = 1_{g^{-1}},$$

y donde se tienen los elementos:

$$\Phi = \sum_{g,h,k \in \Gamma} \omega(g,h,k) 1_g \otimes 1_h \otimes 1_k, \quad \alpha = \sum_{g \in \Gamma} \omega(g, g^{-1}, g) 1_g, \quad \beta = 1.$$

La importancia de las álgebras cuasi-Hopf de dimensión finita radica en su relación con las categorías tensoriales finitas. Para ello, citamos el siguiente resultado de reconstrucción Tannakiana, que puede encontrarse por ejemplo en [EGNO, Thm. 1.34.8]:

Teorema 5.1.7. *La aplicación $H \mapsto (\text{Rep } H, \text{Forget})$ es una biyección entre:*

- *álgebras cuasi-Hopf sobre \mathbf{k} de dimensión finita, salvo equivalencia por torcimiento e isomorfismo,*
- *categorías tensoriales finitas que admiten un funtor de cuasi-fibra, salvo equivalencia monoidal.* □

Introducimos ahora una familia de categorías tensoriales, que será el objeto de estudio en este capítulo.

Definición 5.1.8. Sea \mathcal{C} una categoría tensorial. Un objeto X de \mathcal{C} se dice *invertible* si $e_X : X^* \otimes X \rightarrow \mathbb{I}$ y $b_X : \mathbb{I} \rightarrow X \otimes X^*$ son isomorfismos. \mathcal{C} se dice *punteada* si todo objeto simple de \mathcal{C} es invertible.

Observación 5.1.9. La categoría Vec_Γ^ω es punteada para todo grupo Γ y todo 3-cociclo ω .

Si H es un álgebra cuasi-Hopf, entonces $\text{Rep } H$ es punteada si y sólo si H es básica: esto es, todo módulo simple es de dimensión 1. Así la correspondencia del Teorema 5.1.7 induce una correspondencia entre álgebras cuasi-Hopf básicas de dimensión finita, salvo torcimiento e isomorfismo, y categorías tensoriales finitas punteadas (las cuales admiten siempre funtores de cuasi-fibra, ver [EO, Prop. 2.6]), salvo equivalencia de categorías.

Por otro lado, si H es un álgebra de Hopf, la categoría de comódulos \mathcal{M}^H es punteada si y sólo si H es punteada.

5.1.2. Equivariantización y de-equivariantización

Sea \mathcal{C} una categoría tensorial finita. Denotaremos por $\text{Aut } \mathcal{C}$ a la categoría que tiene por objetos las auto-equivalencias tensoriales de \mathcal{C} , y cuyos morfismos son los isomorfismos de funtores tensoriales. Notemos que $\text{Aut } \mathcal{C}$ es monoidal, donde el producto tensorial está dado por la composición de funtores tensoriales.

Para cada grupo Γ denotaremos por $\underline{\Gamma}$ a la categoría cuyos objetos son los elementos de Γ , sus morfismos son las identidades en cada objeto, y el producto tensorial es la multiplicación en Γ .

Definición 5.1.10. Una *acción* de un grupo Γ en una categoría tensorial finita \mathcal{C} es un funtor monoidal $\mathcal{F} : \underline{\Gamma} \rightarrow \text{Aut } \mathcal{C}$.

Esto es, una colección de funtores $\{F_g : g \in \Gamma\} \subset \text{Aut } \mathcal{C}$, e isomorfismos

$$\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \xrightarrow{\sim} F_{gh}, \quad g, h \in \Gamma,$$

que definen la estructura tensorial del funtor \mathcal{F} .

Definición 5.1.11. Sea Γ un grupo finito actuando sobre una categoría tensorial finita \mathcal{C} . Un *objeto* Γ -equivariante de \mathcal{C} es un objeto $X \in \mathcal{C}$ junto con una familia de isomorfismos $u_g : F_g(X) \rightarrow X$ tales que para todo par de elementos $g, h \in \Gamma$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F_g(F_h(X)) & \xrightarrow{F_g(u_h)} & F_g(X) \\ \downarrow \gamma_{g,h} & & \downarrow u_g \\ F_{gh}(X) & \xrightarrow{u_{gh}} & X. \end{array}$$

Un *morfismo de objetos equivariantes* $\beta : (X, (u_g)_{g \in \Gamma}) \rightarrow (Y, (v_g)_{g \in \Gamma})$ es un morfismo $\beta : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} tal que para todo $g \in \Gamma$, $\beta \circ u_g = v_g \circ F_g(\beta)$. La categoría de Γ -objetos equivariantes se denomina la *equivariantización* de \mathcal{C} , la cual denotaremos \mathcal{C}^Γ .

\mathcal{C}^Γ es una categoría tensorial con el producto tensorial $(X, (u_g)_{g \in \Gamma}) \otimes (Y, (v_g)_{g \in \Gamma}) = (X \otimes Y, (w_g)_{g \in \Gamma})$, donde para cada $g \in \Gamma$, w_g está dado por la composición

$$F_g(X \otimes Y) \xrightarrow{\sim} F_g(X) \otimes F_g(Y) \xrightarrow{u_g \otimes v_g} X \otimes Y.$$

Notemos que \mathcal{C}^Γ admite una inclusión natural $\iota : \text{Rep } \Gamma \rightarrow \mathcal{C}^\Gamma$.

Consideraremos el proceso inverso; para ello, sea \mathcal{D} una categoría tensorial finita tal que $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ contiene a $\text{Rep } \Gamma$ como subcategoría Tannakiana, donde Γ es un grupo finito; esto es, la trenza de $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^\Gamma)$ se restringe a la trenza simétrica de $\text{Rep } \Gamma$. Asumimos además que la composición $\text{Rep } \Gamma \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}$ es una inclusión. El álgebra $\text{Fun}(\Gamma, \mathbf{k})$ de funciones $\Gamma \rightarrow \mathbf{k}$ es un álgebra en $\text{Rep } \Gamma$: Γ actúa sobre $\text{Fun}(\Gamma, \mathbf{k})$ por traslaciones a izquierda. Así, $\text{Fun}(\Gamma, \mathbf{k})$ es un álgebra en la categoría trezada $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$.

Definición 5.1.12. La categoría de $\text{Fun}(\Gamma, \mathbf{k})$ -módulos en \mathcal{D} se llama la *de-equivariantización* de \mathcal{D} , la cual denotaremos \mathcal{D}_Γ ; es una categoría tensorial.

Nos será útil el siguiente resultado sobre equivariantización y de-equivariantización. En [DGNO, Prop. 4.19] puede encontrarse la prueba de este resultado y referencias a otros trabajos.

Teorema 5.1.13. (i) *Sea Γ un grupo finito que actúa sobre una categoría tensorial finita \mathcal{C} . Entonces $\text{Rep } \Gamma$ es una subcategoría Tannakiana de $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^\Gamma)$, y la composición de esta inclusión $\text{Rep } \Gamma \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C}^\Gamma)$ con el funtor de olvido $\mathcal{Z}(\mathcal{C}^\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}^\Gamma$ es la inclusión natural ι .*

(ii) *Los procedimientos de equivariantización y de-equivariantización son naturalmente inversos: $(\mathcal{C}^\Gamma)_\Gamma \cong \mathcal{C}$, $(\mathcal{D}_\Gamma)^\Gamma \cong \mathcal{D}$.* \square

Ejemplo 5.1.14. Describiremos cómo obtener de-equivariantizaciones de ciertas categorías semi-simples. Más allá que no trabajaremos sobre estas categorías, trabajaremos luego con categorías no semisimples que las incluyen.

Consideremos una acción de un grupo Γ sobre la categoría $\mathcal{C} = \text{Vec}_{K,\omega}$, donde K es un grupo abeliano y $\omega \in H^3(K, \mathbf{k}^\times)$. Nuestro objetivo es describir acciones tales que \mathcal{C}^Γ sea punteada. Para ello seguiremos el trabajo sobre categorías duales [N], dado que por [Ni] se tiene $\mathcal{C}^\Gamma \cong (\mathcal{C} \rtimes \Gamma)_{\mathcal{C}}^*$. En nuestro contexto, obtenemos que Γ debe ser abeliano, con lo cual $\text{Rep } \Gamma \cong \text{Vec}_{\widehat{\Gamma}}$. A partir de [N], la acción de $\widehat{\Gamma}$ sobre K es trivial, con lo cual $\mathcal{C} \rtimes \Gamma \cong \text{Vec}_{K \times \widehat{\Gamma}}$.

Probaremos que existe una correspondencia entre las extensiones de grupos de K por $\widehat{\Gamma}$, y las equivariantizaciones según acciones de Γ sobre \mathcal{C} .

Denotemos los elementos simples de \mathcal{C} simplemente con los elementos de K . Asumimos que la acción sobre los objetos es trivial; esto es, $F_\gamma(X) = X$ para todo objeto X y todo $\gamma \in \Gamma$. Siguiendo la descripción dada en [T, Section 7], la acción está descrita por un elemento $\psi \in H^2(\Gamma, \widehat{K})$:

$$\psi(\gamma_1, \gamma_2) : F_{\gamma_1} \circ F_{\gamma_2} \rightarrow F_{\gamma_1 \gamma_2}, \quad \gamma_i \in \Gamma.$$

A partir de la estructura tensorial de cada F_γ obtenemos un elemento $\xi \in H^2(K, \widehat{\Gamma})$,

$$\xi(k_1, k_2)(\gamma) : F_\gamma(k_1) \otimes F_\gamma(k_2) = k_1 + k_2 \rightarrow F_\gamma(k_1 + k_2) = k_1 + k_2,$$

donde $k_i \in K, \gamma \in \Gamma$.

Por otro lado, notemos que $FPdim(\mathcal{C}^\Gamma) = |\Gamma|FPdim\mathcal{C} = |\Gamma||K|$ (ver [EO] para la definición y propiedades de la dimensión de Perron-Frobenius en categorías tensoriales), con lo cual \mathcal{C}^Γ tiene $|\Gamma||K|$ objetos simples no isomorfos. Tales objetos son pares $(k, (u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, para algunos escalares $u_\gamma \in \mathbf{k}^\times$ que satisfacen $u_{\gamma_1} u_{\gamma_2} = \psi(\gamma_1, \gamma_2)(k) u_{\gamma_1 \gamma_2}$. Luego dos objetos simples $(k, (u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ y $(k, (v_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ están relacionados por un elemento $f \in \widehat{\Gamma}$ tal que $v_\gamma = u_\gamma f(\gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, y son isomorfos si y sólo si $f = 1$. Luego podemos identificar objetos simples en \mathcal{C}^Γ como pares $(k, f) \in K \times \widehat{\Gamma}$.

Para cada k fijo, existen $|\Gamma|$ elementos $(k, (u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, y

$$\psi(\gamma_1, \gamma_2)(k) = u_{\gamma_1} u_{\gamma_2} u_{\gamma_1 \gamma_2}^{-1} = \psi(\gamma_2, \gamma_1)(k).$$

Así $\psi(\gamma_1, \gamma_2) = \psi(\gamma_2, \gamma_1)$ para todo par $\gamma_i \in \Gamma$, y por [T] se tiene que $\xi(k_1, k_2) = \xi(k_2, k_1)$ para todo par $k_i \in K$. Los elementos de $H^2(K, \widehat{\Gamma})$ parametrizan extensiones centrales de K por $\widehat{\Gamma}$, y si L es la extensión correspondiente a ξ , L es abeliano. Más aún, podemos identificar $\mathcal{C}^\Gamma = \text{Vec}_{L, \widetilde{\omega}}$ para algún $\widetilde{\omega} \in H^3(L, \mathbf{k}^\times)$, dado que el producto tensorial en \mathcal{C}^Γ satisface, bajo las consideraciones anteriores:

$$(k_1, f_1) \otimes (k_2, f_2) = (k_1 + k_2, f_1 + f_2 + \xi(k_1, k_2)), \quad k_i \in K, f_i \in \widehat{\Gamma}.$$

Más aún, $\widetilde{\omega}$ es el pullback de ω bajo la proyección $\pi : L \rightarrow K$ que corresponde a la extensión, dado que el funtor de olvido $\mathcal{C}^\Gamma \rightarrow \mathcal{C}$ es tensorial, lo cual también puede obtenerse de [N].

Notar que $\psi \in H^2(\Gamma, \widehat{K})$ es el elemento correspondiente a la extensión dual \widehat{L} de Γ por \widehat{K} .

Además, dado un morfismo $T : \widehat{\Gamma} \rightarrow \widehat{L}$ tal que para todo par $f_1, f_2 \in \widehat{\Gamma}$,

$$\langle T(f_1), (0, f_2) \rangle = 1,$$

la función $\omega : K^3 \rightarrow \mathbf{k}^\times$ dada por

$$\omega(k_1, k_2, k_3) = \langle T(\xi(k_2, k_3)), (k_1, 0) \rangle, \quad k_i \in K,$$

define un elemento en $H^3(K, \mathbf{k}^\times)$, que también denotaremos por ω . El pullback $\tilde{\omega}$ es trivial en $H^3(L, \mathbf{k}^\times)$. De hecho, si consideramos la función $\alpha : L \times L \rightarrow \mathbf{k}^\times$ dada por

$$\alpha((k_1, f_1), (k_2, f_2)) = \langle T(f_2), (k_1, f_1) \rangle = \langle T(f_2), (k_1, 0) \rangle,$$

entonces $\delta^2(\alpha) = \tilde{\omega}$. Así, $\mathcal{C}^\Gamma \cong \text{Vec}_L$, y tenemos una inclusión

$$\text{Rep } \Gamma \cong \text{Vec}_{\hat{\Gamma}} \hookrightarrow \mathcal{Z}(\text{Vec}_L) \cong \text{Vec}_{L \oplus \hat{L}},$$

la cual, al componer con el funtor de olvido $\mathcal{C}^\Gamma = \text{Vec}_L$, da lugar a la inclusión canónica $\text{Rep } \Gamma \hookrightarrow \text{Vec}_L$, de modo que tenemos una inclusión de grupos $\hat{\Gamma} \hookrightarrow L \oplus \hat{L}$, que compuesta con la proyección en la primer componente da lugar a la inclusión $\hat{\Gamma} \hookrightarrow L$.

Ejemplo 5.1.15. Recíprocamente consideramos la de-equivariantización de $\mathcal{D} = \text{Vec}_L$, fijada una inclusión $\text{Rep } \Gamma$ como subcategoría Tannakiana de $\mathcal{Z}(\text{Vec}_L) \cong \text{Vec}_{L \oplus \hat{L}}$, donde nuevamente Γ y L son grupos abelianos. Sea K el correspondiente cociente, donde también asumimos que K es abeliano. En consecuencia tenemos una inclusión $\iota : \hat{\Gamma} \rightarrow L$, y un morfismo $T : \hat{\Gamma} \rightarrow \hat{L}$, tal que para todo par $f_1, f_2 \in \hat{\Gamma}$, $\langle T(f_1), (0, f_2) \rangle = 1$. Tal T parametriza los morfismos naturales $c_{\bullet, V} : \bullet \otimes V \rightarrow V \otimes \bullet$ para cada $V \in \text{Rep } \Gamma$, visto como elemento de \mathcal{D} .

Consideramos L como una extensión de K por $\hat{\Gamma}$, de manera que ι es la inclusión canónica, y es la extensión correspondiente a $\xi \in H^2(K, \hat{\Gamma})$. El álgebra $A = \text{Fun } \Gamma$ es la suma directa $A = \bigoplus_{f \in \hat{\Gamma}} \mathbf{k} f$ visto como elemento de $\text{Vec}_{\hat{\Gamma}}$, con el producto canónico, y podemos considerar $A = \bigoplus_{f \in \hat{\Gamma}} \mathbf{k}(0, f)$ dentro de \mathcal{D} . De acuerdo a las consideraciones anteriores, $\mathcal{D}_\Gamma \cong \text{Vec}_{K, \omega}$ para algún $\omega \in H^3(K, \mathbf{k}^\times)$.

El funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_\Gamma$, $F(X) = A \otimes X$ es monoidal, donde los isomorfismos naturales $J_{X, Y} : F(X) \otimes F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y)$ corresponden a los isomorfismos naturales inducidos por T más la multiplicación en A . Por el axioma (1.1) se tiene que

$$\omega(k_1, k_2, k_3) = \langle T(\xi(k_2, k_3)), (k_1, 0) \rangle. \quad (5.9)$$

5.2. Álgebras cuasi-Hopf básicas graduadas sobre grupos cíclicos

Consideremos un álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada de dimensión finita: $H = \bigoplus_{i \geq 0} H[i]$, donde $I := \text{Rad } H = \bigoplus_{i \geq 1} H[i]$, $I^k = \bigoplus_{i \geq k} H[i]$. En tal caso, $H[0]$ es semisimple y H está generada por $H[0]$ y $H[1]$ ([EG1, Lemma 2.1]).

Notemos que si H es básica, entonces $H[0] = \text{Fun } \Gamma$ para algún grupo finito Γ , con asociador correspondiente a un elemento de $H^3(\Gamma, \mathbf{k}^\times)$, ver [EG1, Preliminaries]. Además $H[1]$ es un módulo libre sobre $H[0]$, ver [S2].

Consideremos ahora $\Gamma = \mathbb{Z}_m$ y fijemos q una raíz primitiva de la unidad de orden m^2 . Sean σ, χ generadores de los grupos cíclicos $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_{m^2}$, respectivamente, donde consideramos la inclusión canónica $\mathbb{Z}_m \hookrightarrow \mathbb{Z}_{m^2}$, y fijamos $\chi^m = \sigma$. Sea $\{1_b : 0 \leq b \leq m^2 - 1\}$ el conjunto de idempotentes de

$\mathbf{k}[\mathbb{Z}_{m^2}]$, parametrizados por la condición $\chi 1_b = q^b 1_b$. Sea además $\{\mathbf{1}_s : 0 \leq s \leq m-1\}$ el conjunto de idempotentes de $\mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$: de acuerdo a [Ge],

$$\sum_{0 \leq i \leq m-1} \mathbf{1}_{mi+s} = \mathbf{1}_s, \quad 0 \leq s \leq m-1. \quad (5.10)$$

También por [Ge], $\{\omega_s : 0 \leq s \leq m-1\} = H^3(\mathbb{Z}_m, \mathbf{k}^\times)$, donde $\omega_s : (\mathbb{Z}_m)^3 \rightarrow \mathbf{k}^\times$ está definido por

$$\omega_s(i, j, k) = q^{s(i+j-(i+j)')k} \quad (5.11)$$

y j' denota el resto de j en la división por m .

En consecuencia, si H es básica radicalmente graduada, el asociador es

$$\Phi_s := \sum_{i,j,k=0}^{m-1} \omega_s(i, j, k) \mathbf{1}_i \otimes \mathbf{1}_j \otimes \mathbf{1}_k, \quad (5.12)$$

para algún $0 \leq s \leq m-1$, el cual es trivial si y sólo si $s = 0$.

Sea $J_s = \sum_{i,j=0}^{m^2-1} c(i, j)^s \mathbf{1}_i \otimes \mathbf{1}_j$, donde denotamos $c(i, j) := q^{(i-i')j}$. Notemos que J_s es un torcimiento [Ge]: es invertible y satisface $(\varepsilon \otimes \text{id})(J_s) = (\text{id} \otimes \varepsilon)(J_s) = 1$. Además,

$$\Phi_s := d J_s = (1 \otimes J_s)^{-1} (\text{id} \otimes \Delta)(J_s)^{-1} (\Delta \otimes \text{id})(J_s) (J_s \otimes 1). \quad (5.13)$$

5.2.1. Álgebras cuasi-Hopf $A(H, s)$

Consideremos un álgebra de Hopf $H = \bigoplus_{n \geq 0} H(n)$ radicalmente graduada, generada por un elemento de tipo grupo χ de orden m^2 , y elementos casi-primitivos x_1, \dots, x_θ que satisfacen

$$\chi x_i \chi^{-1} = q^{d_i} x_i, \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + \chi^{b_i} \otimes x_i, \quad (5.14)$$

para algunos $b_i, d_i \in \{0, 1, \dots, m^2 - 1\}$. Así, $H = R \# \mathbf{k}[\Gamma]$, donde $R \in \mathbf{k}_{\Gamma}^{\Gamma} \mathcal{YD}$ es el álgebra de coinvariantes. Notemos que si H es de dimensión finita, m^2 no divide a $b_i d_i$, pues $q^{b_i d_i} \neq 1$. Sea

$$\Upsilon(H) := \{s \in \{1, \dots, m-1\} : b_i \equiv s d_i (m), 1 \leq i \leq \theta\}. \quad (5.15)$$

Para cada $s \in \Upsilon(H)$ definiremos un álgebra cuasi-Hopf $A(H, s)$ tal que $A(H, s)/\text{Rad } A(H, s) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$ y el asociador será el correspondiente a $\omega_s \in H^3(\mathbb{Z}_m, \mathbf{k}^\times)$.

Consideremos el álgebra cuasi-Hopf $(H_{J_s}, \Delta_{J_s}, \varepsilon, \Phi_{J_s}, S_{J_s}, \alpha_{J_s} \beta_{J_s}, 1)$ que se obtiene al modificar la estructura por el torcimiento J_s , y la subálgebra generada por $\sigma := \chi^m$ y x_1, \dots, x_k , que llamaremos $A(H, s)$. Si H es de dimensión finita, tenemos $\dim A(H, s) = \dim H/m = m \dim R$.

Proposición 5.2.1. *$(A(H, s), \Delta_{J_s}, \varepsilon, \Phi_{J_s}, S_{J_s}, \sigma^{-s}, 1)$ es una álgebra cuasi-Hopf, que no es equivalente por torcimiento a un álgebra de Hopf.*

Demostración. Denotemos $A = A(H, s)$ para simplificar la notación en la prueba. Ya vimos que

$\Phi_s \in A \otimes A \otimes A$. Usando que $1_z x_i = x_i 1_{z-d_i}$ y que m divide a $b_i - sd_i$,

$$\begin{aligned} \Delta_{J_s}(x_i) &= \sum_{k,l=0}^{m^2-1} \frac{c(k,l)^s}{c(k+d_i,l)^s} x_i 1_k \otimes 1_l + \frac{c(k,l)^s}{c(k,l+d_i)^s} q^{b_i k} 1_k \otimes x_i 1_l \\ &= \sum_{y=0}^{m-1} q^{b_i y} \left(\sum_{z=0}^{m-1} q^{mz(b_i-sd_i)} 1_{mz+y} \otimes x_i \right) + \sum_{k,l=0}^{m^2-1} q^{((k+d_i)'-d_i-k')ls} x_i 1_k \otimes 1_l \\ &= \sum_{y=0}^{m-1} q^{b_i y} \mathbf{1}_y \otimes x_i + \sum_{z=0}^{m-1} \left(\sum_{y=0}^{m-d'_i-1} q^{(d'_i-d_i)sz} x_i \mathbf{1}_y \otimes \mathbf{1}_z \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=m-d'_i}^{m-1} q^{(d'_i+m-d_i)sz} x_i \mathbf{1}_y \otimes \mathbf{1}_z \right). \end{aligned}$$

Así $\Delta_{J_s}(x_i) \in A \otimes A$, con lo cual $(A, \Delta_{J_s}, \varepsilon_{J_s}, \Phi_{J_s})$ es una cuasi-bialgebra, pues Δ_{J_s} es un morfismo de álgebras.

Por otro lado, $\alpha_{J_s} = \sum_{z=0}^{m^2-1} c(-z,z)^{-s} 1_z$, $\beta_{J_s} = \sum_{z=0}^{m^2-1} c(z,-z)^s 1_z$, con lo cual β_{J_s} es una unidad y podemos cambiar la antípoda usando esta unidad según el Lema 5.1.4, y se tiene

$$\alpha_{J_s} \beta_{J_s} = \sum_{z=0}^{m^2-1} c(-z,z)^{-s} c(z,-z)^s 1_z = \sum_{z=0}^{m^2-1} q^{smz} 1_z = \sum_{k=0}^{m-1} q^{smk} \mathbf{1}_k = \left(\sum_{k=0}^{m-1} q^k \mathbf{1}_k \right)^{ms} = \sigma^{-s}.$$

Además, $S(x_i) = -x_i \chi^{b_i}$, de donde deducimos

$$\begin{aligned} S_{J_s}(x_i) &= \beta_{J_s} S(x_i) \beta_{J_s}^{-1} = -x_i \left(\sum_{y=0}^{m^2-1} \frac{c(y+d_i, -y-d_i)^s}{c(y, -y)^s} q^{b_i y} \mathbf{1}_y \right) \\ &= -x_i \left(\sum_{y=0}^{m^2-1} q^{b_i y - s(y+d_i)(y+d_i-(y+d_i)') + sy(y-y')} \mathbf{1}_y \right) \\ &= -x_i \left(\sum_{k,l=0}^{m-1} q^{b_i l + s(l+d_i)((l+d_i)'-l-d_i) + km(b_i-sd_i)} \mathbf{1}_{km+l} \right) \\ &= -x_i \left(\sum_{l=0}^{m-1} q^{b_i l + s(l+d_i)((l+d_i)'-l-d_i)} \mathbf{1}_l \right), \end{aligned}$$

usando nuevamente que m divide a $b_i - sd_i$.

Supongamos que A^J es un álgebra de Hopf para algún elemento invertible $J \in A \otimes A$. Entonces la componente de grado cero es

$$J_0 = \sum_{i,j=0}^{m-1} a(i,j) \mathbf{1}_i \otimes \mathbf{1}_j, \quad a(i,j) \in \mathbf{k},$$

de modo que $\Phi_s = dJ_0$, lo cual es equivalente a que $\omega_s = da$, que es una contradicción. \square

5.2.2. Álgebras cuasi-Hopf como subálgebras de álgebras de Hopf.

Probaremos que toda álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada sobre \mathbb{Z}_m se relaciona con un álgebra cuasi-Hopf como las de la subsección anterior. Obtenemos así una caracterización de estas álgebras cuasi-Hopf, las cuales clasificaremos en la siguiente subsección.

Teorema 5.2.2. *Sea $A = \bigoplus_{n \geq 0} A[n]$ un álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada de dimensión finita sobre \mathbb{Z}_m , con asociador Φ_s para algún s , y $A[1] \neq 0$. Entonces existe un álgebra de Hopf básica radicalmente graduada de dimensión finita H , donde $H = \mathcal{B}(V) \# \mathbb{Z}_{m^2}$ para algún módulo de Yetter-Drinfeld V sobre $\mathbf{k}\mathbb{Z}_{m^2}$, y un epimorfismo graduado de álgebras cuasi-Hopf $\pi : A \twoheadrightarrow A(H, s)$, el cual restringido a grados 0 y 1 es la identidad.*

Demostración. La prueba es análoga a la de [EG1, Thm. 3.1]. Para simplificar la notación, llamemos $\bar{A} := A(H, s)$. Escribimos $A[1] = \bigoplus_{0 \leq r < m} A_r[1]$, donde si llamamos $Q = q^m$, que es una raíz primitiva de la unidad de orden m , definimos

$$A_r[1] = \{x \in A[1] : \sigma x \sigma^{-1} = Q^r x\}.$$

Notemos que para cada $x \in A_r[1]$ se tiene $\mathbf{1}_i x = x \mathbf{1}_{i-r}$. Por [EO, Thm. 2.17], tenemos que $A_0[1] = 0$.

Sea \hat{A} el álgebra tensorial de $A[1]$ sobre $A[0]$. \hat{A} es un álgebra cuasi-Hopf, ver la prueba de [EG1, Thm. 3.1], tal que el homomorfismo suryectivo canónico $\pi_1 : \hat{A} \twoheadrightarrow A$ es de álgebras cuasi-Hopf. Consideremos el automorfismo γ de \hat{A} definido por

$$\gamma|_{A[0]} = \text{id}, \quad \gamma|_{A_r[1]} = q^r \text{id}.$$

Llamemos L a la suma de todos los ideales cuasi-Hopf de \hat{A} contenidos en $\bigoplus_{i \geq 2} \hat{A}[i]$. Luego, $\ker \pi_1 \subseteq L$ y $\gamma(L) = L$, con lo cual γ actúa sobre $\bar{A} := \hat{A}/L$. Definimos \bar{H} como el álgebra cuasi-Hopf generada por \bar{A} y un elemento de tipo grupo χ , donde $\chi^m = \sigma$ y χ tiene orden m^2 , de modo que $\chi z \chi^{-1} = \gamma(z)$ para todo $z \in H$. Luego $\text{Ad}(\sigma) = \gamma^m$, de modo que tal elemento está bien definido, y χ genera un grupo isomorfo a \mathbb{Z}_{m^2} .

Consideremos el álgebra $H := \bar{H}^{J^{-1}}$ modificada por el torcimiento $J = J_s$, que resulta ser un álgebra de Hopf radicalmente graduada de dimensión finita. Así, $H = R \# \mathbb{Z}_{m^2}$, para algún álgebra de Hopf trezada de dimensión finita R en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\mathbf{k}\mathbb{Z}_{m^2}$. Consideremos los elementos casi-primitivos $x_1, \dots, x_k \in H[1]$ que son autovectores de $\text{Ad}(\chi)$:

$$\chi x_i \chi^{-1} = q^{d_i} x_i, \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + \chi^{b_i} \otimes x_i, \quad b_i, d_i \in \mathbb{Z}_{m^2}$$

Entonces, $\sigma x_i \sigma^{-1} = q^{d_j m} x_i$; como $H_0[1] = 0$, se tiene $m \nmid d_j$.

Si denotamos $\bar{\Delta}$ el coproducto de \bar{H} , se tiene $\bar{\Delta}(x_i) \in \bar{A} \otimes \bar{A}$ pues \bar{A} es subálgebra cuasi-Hopf de \hat{H} . Como $\Delta(x_i) = J \bar{\Delta}(x_i) J^{-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(x_i) &= \sum_{k,l=0}^{m^2-1} \frac{c(k,l)^s}{c(k+d_i,l)^s} x_i \mathbf{1}_k \otimes \mathbf{1}_l + \frac{c(k,l)^s}{c(k,l+d_i)^s} q^{b_i k} \mathbf{1}_k \otimes x_i \mathbf{1}_l \\ &= \sum_{k,l=0}^{m^2-1} q^{((k+d_i)'-k'-d_i)ls} x_i \mathbf{1}_k \otimes \mathbf{1}_l + q^{(b_i-sd_i)(k-k')+b_i k'} \mathbf{1}_k \otimes x_i \mathbf{1}_l \\ &= \sum_{w,y,z=0}^{m-1} q^{((y+d_i)'-y-d_i)zs} x_i \mathbf{1}_k \otimes \mathbf{1}_l + q^{(b_i-sd_i)wm+b_i y} \mathbf{1}_{wm+y} \otimes x_i \mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

Dado que el primer sumando pertenece a $\bar{A} \otimes \bar{A}$, deducimos que $b_i \equiv sd_i(m)$.

Por otro lado, el álgebra de Hopf trenzada graduada R en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre \mathbb{Z}_{m^2} está generada en grado 1; denotemos $V := R[1]$. Existe entonces un epimorfismo de álgebras de Hopf $H \twoheadrightarrow \mathcal{B}(V)\#\mathbb{Z}_{m^2}$, el cual induce por torcimiento y restricción un morfismo suryectivo $\bar{A} = A(H, s) \twoheadrightarrow A(\mathcal{B}(V)\#\mathbb{Z}_{m^2}, s)$, pues el núcleo del morfismo de álgebras de Hopf anterior está generado por elementos de grado ≥ 2 . Ambas álgebras tienen las mismas componentes en grados 0 y 1, y \bar{A} no tiene ideales cuasi-Hopf propios generados por elementos de grado ≥ 2 , de donde el morfismo suryectivo es en realidad un isomorfismo: $H = \mathcal{B}(V)\#\mathbb{Z}_{m^2}$. \square

5.2.3. Clasificación de las álgebras cuasi-Hopf graduadas

Usaremos ahora los resultados sobre generación en grado uno para álgebras de Hopf.

Proposición 5.2.3. *Sea A un álgebra cuasi Hopf básica de dimensión finita, y $\pi : A \twoheadrightarrow A(H, s)$ la proyección del Teorema 5.2.2. Entonces π es un isomorfismo.*

Demostración. Notemos que la presentación por generadores y relaciones de $A(H, s)$ coincide en las relaciones entre los elementos casi-primitivos x_i , sólo difiere en el orden del elemento de tipo grupo que genera el grupo de estos elementos. Luego, supongamos que π no es un isomorfismo, con lo cual algunas de las relaciones que definen $\mathcal{B}(V)$ no se verifica en A : sea x la relación de menor grado.

Sea \mathcal{B} el cociente de $T(V)$ por las relaciones de grado menor que x , y $\hat{H} := \mathcal{B}\#\mathbb{k}\mathbb{Z}_{m^2}$. Por el Lema 4.2.2, x es primitiva en \hat{H} . Además x es \mathbb{N}^θ -homogénea: sea $\alpha = \sum_{i=1}^\theta n_i \alpha_i \in \mathbb{N}^\theta$ su grado. En consecuencia, usando la construcción de la Proposición 5.2.1 tenemos el siguiente esquema de proyecciones canónicas:

$$\begin{array}{ccc} T(V)\#\mathbb{k}\mathbb{Z}_{m^2} & \twoheadrightarrow & \hat{H} & \rightsquigarrow & A(T(V)\#\mathbb{k}\mathbb{Z}_{m^2}, s) & \twoheadrightarrow & A(\hat{H}, s) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H & & A & \twoheadrightarrow & A(H, s) \end{array}$$

Notar que además se tiene un morfismo suryectivo $A(\hat{H}, s) \rightarrow A$, por la definición de \hat{H} .

Sean $b = \sum_i n_i b_i$ y $d = \sum_i n_i d_i$. De esta forma, en \hat{H} ,

$$\chi x \chi^{-1} = q^d x, \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + \chi^b \otimes x,$$

y m divide a $b - sd = \sum_i n_i (b_i - sd_i)$. Luego podemos considerar $\bar{V} \in \mathbb{k}_{\Gamma}^{\Gamma} \mathcal{YD}$ extendiendo V con el elemento x con la acción anterior, y cuya coacción es $\lambda(x) = \chi^b \otimes x$. Por la condición entre b y d , podemos aplicar la Proposición 5.2.1 para construir $A(\mathcal{B}(\bar{V})\#\mathbb{k}\mathbb{Z}_{m^2}, s)$. El morfismo suryectivo de álgebras de Hopf $T(\bar{V})\#\mathbb{k}\mathbb{Z}_{m^2} \twoheadrightarrow \bar{H}$ induce un morfismo suryectivo de álgebras cuasi-Hopf $A(T(\bar{V})\#\mathbb{k}\mathbb{Z}_{m^2}, s) \twoheadrightarrow A(\bar{H}, s) \twoheadrightarrow A$, que en consecuencia induce un morfismo suryectivo $A \twoheadrightarrow A(\mathcal{B}(\bar{V})\#\mathbb{k}\mathbb{Z}_{m^2}, s)$. Esto implica que $\mathcal{B}(\bar{V})\#\mathbb{k}\mathbb{Z}_{m^2}$ es de dimensión finita, lo cual es un absurdo por lo probado en el Teorema 4.4.12. \square

Usando los resultados previos podemos describir todas las álgebras cuasi-Hopf radicalmente graduadas sobre \mathbb{Z}_m para m impar, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 5.2.4. *Sea A un álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada de dimensión finita tal que para algún entero impar m ,*

$$A/\text{Rad}(A) = \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m].$$

Entonces A es equivalente por torcimiento a una de las siguientes álgebras cuasi-Hopf:

1. *un álgebra de Hopf radicalmente graduada A tal que $A/\text{Rad}(A) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$,*
2. *un álgebra semisimple cuasi-Hopf $\mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$ con asociador correspondiente a $\omega_s \in H^3(\mathbb{Z}_m, \mathbf{k}^\times)$, para algún $s \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,*
3. *un álgebra $A(H, s)$, para algún álgebra de Hopf radicalmente graduada de dimensión finita H tal que $A/\text{Rad}(A) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{m^2}]$, y algún $s \in \Upsilon(H)$.*

Demostración. Consideramos un álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada A ; si su asociador es trivial, entonces A es un álgebra de Hopf cuyo dual es corradicalmente graduado, con corradical $\mathbf{k}\mathbb{Z}_m$, pero esta familia es autodual.

Consideremos entonces álgebras cuasi-Hopf radicalmente graduadas A con asociador no trivial Φ_s . Si el rango de $A[1]$ sobre $A[0]$ es cero, A es semisimple, es decir $A = \text{Fun}(\mathbb{Z}_m, \mathbf{k})_{\omega_s}$. Si el rango de $A[1]$ sobre $A[0]$ no es cero, por el Teorema 5.2.2 existe un álgebra de Hopf radicalmente graduada H , con $H/\text{Rad} H \cong \mathbf{k}\mathbb{Z}_{m^2}$, y una proyección de álgebras cuasi-Hopf $\pi : A \rightarrow A(H, s)$. Por la Proposición 5.2.3, π es un isomorfismo, lo que completa la prueba. \square

5.3. Levantamientos de álgebras cuasi-Hopf básicas sobre grupos cíclicos

En esta sección, para cada álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada A_0 no semisimple, tal que $A_0/\text{Rad}(A_0) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$ y su asociador es Φ_s , consideraremos sus posibles levantamientos: esto es, todas las álgebras cuasi-Hopf A tales que el álgebra cuasi-Hopf graduada asociada (con respecto a la filtración radical) es A_0 .

De acuerdo a la sección anterior, tales A_0 están relacionadas con álgebras de Hopf radicalmente graduadas H_0 tales que $H_0/\text{Rad}(H_0) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{m^2}]$ del siguiente modo: $A_0 = A(H_0, s)$. Relacionaremos entonces los levantamientos A de A_0 con los levantamientos H de H_0 .

Nos restringimos al caso en que m no es divisible por los primos ≤ 7 : ésto se debe a que hasta el momento las álgebra de Hopf punteadas sobre grupos abelianos están clasificadas bajo esta restricción en el orden de los grupos, [AS6].

5.3.1. Levantamientos de álgebras cuasi-Hopf con asociador trivial

Comenzaremos con los levantamientos de álgebras cuasi-Hopf cuyo radical es un ideal cuasi-Hopf tal que el álgebra cuasi-Hopf graduada correspondiente es un álgebra de Hopf; esto es, el correspondiente asociador del álgebra graduada es trivial. Para ello recordemos el siguiente resultado:

Proposición 5.3.1. [EG3, Prop. 2.3] *Sea A un álgebra cuasi-Hopf de dimensión finita cuyo radical es un ideal cuasi-Hopf, y la correspondiente álgebra graduada $\mathcal{A} = \text{gr}(A)$ es un álgebra de Hopf. Si $H^3(\mathcal{A}^*, \mathbf{k}) = 0$, entonces A es equivalente por torcimiento a un álgebra de Hopf.* \square

Fijemos un álgebra de Hopf radicalmente graduada \mathcal{A} tal que $\mathcal{A}/\text{Rad } \mathcal{A} \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$; consideremos un conjunto de elementos casi primitivos x_i y un elemento de tipo grupo σ que generan \mathcal{A} como álgebra. De modo similar a la Sección anterior, sean b_i, d_i tales que:

$$\sigma x_i \sigma^{-1} = Q^{d_i} x_i, \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + \sigma^{b_i} \otimes x_i.$$

Escribimos a m como producto de primos: $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_i > 7$ por hipótesis. Definimos

$$V(p_i) := \{j \in \{1, \dots, \theta\} : b_i d_i \not\equiv 0(p_i^{\alpha_i})\}. \quad (5.16)$$

Dado que consideramos álgebras de Hopf de dimensión finita: $Q^{b_i d_i} \neq 1$, o equivalentemente m no divide a $b_i d_i$. Así, $\cup_l V(p_l) = \{1, \dots, \theta\}$. También, para cada par $i \sim j$, tenemos $a_{ij}, a_{ji} \in \{-1, -2, -3\}$ y $a_{ij} b_i d_i \equiv a_{ji} b_j d_j(m)$, con lo cual $i \in V(p_l)$ si y sólo si $j \in V(p_l)$. De esta forma, cada $V(p_l)$ es una unión de componentes conexas del diagrama de Dynkin asociado a la trenza diagonal de \mathcal{A} .

Lema 5.3.2. *Sean $p_l, V(p_l)$ como antes. Entonces $|V(p_l)| \leq 2$.*

Demostración. Sea $A_{p_l} = (a_{ij})_{i,j \in V(p_l)}$ la matriz de Cartan obtenida por restricción de A : es otra matriz de Cartan finita. Así,

$$a_{ij} b_i d_i \equiv b_i d_j + b_j d_i \equiv a_{ji} b_j d_j (p_l^{\alpha_l}).$$

Sea $m' = \prod_{k \neq l} p_k^{\alpha_k}$, y $\bar{q} = q^{m'}$, la cual es una raíz de la unidad de orden $p_l^{\alpha_l}$. Luego, la trenza $(\bar{q}^{b_i d_j})_{i,j \in V_l}$ es de tipo Cartan finito A_{p_l} , asociada a un espacio vectorial trenzado W con base \bar{x}_i , tal que se puede fijar un generador $\bar{\sigma}$ of $\mathbb{Z}_{p_l^{\alpha_l}}$ que satisface:

$$\bar{\sigma} \bar{x}_i \bar{\sigma}^{-1} = \bar{q}^{d_i} \bar{x}_i, \quad \Delta(\bar{x}_i) = \bar{x}_i \otimes 1 + \bar{\sigma}^{b_i} \otimes \bar{x}_i.$$

En consecuencia este espacio es uno de la Sección 5.4, y $|V(p_l)| = \dim W \leq 2$. \square

A continuación enunciaremos un resultado análogo a [EG3, Thm. 1.3], para el cual daremos una prueba adaptada a este caso más general.

Teorema 5.3.3. *Sea A un álgebra cuasi-Hopf básica de dimensión finita tal que $A/\text{Rad}(A) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$, y el álgebra cuasi-Hopf graduada asociada $\mathcal{A} = \text{gr}(A)$ es un álgebra de Hopf. Entonces A es equivalente por torcimiento a un álgebra de Hopf.*

Demostración. De acuerdo a la Proposición 5.3.1, nos basta probar que $H^3(\mathcal{A}^*, \mathbf{k}) = 0$. Notemos que \mathcal{A}^* es álgebra de Hopf corradicalmente graduada con $G(\mathcal{A}^*) = \mathbb{Z}_m$. De acuerdo a la clasificación de Heckenberger (ver [H3] y también [AS6]), tal álgebra de Hopf es de la forma $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}(V) \# \mathbf{k}\mathbb{Z}_m$, la cual como álgebra es $\mathcal{A}^* = \mathbb{Z}_m \rtimes \mathcal{B}(V)$, donde V es un espacio vectorial trenzado de tipo Cartan. Sea \mathbf{u}_q^+ la parte positiva del grupo cuántico pequeño cuya trenza es equivalente por torcimiento a la de V , donde q es raíz de la unidad de orden m . Notemos que:

$$H^\bullet(\mathcal{A}^*, \mathbf{k}) = H^\bullet(\mathcal{B}(V), \mathbf{k})^{\mathbb{Z}_m} = H^\bullet(\mathbf{u}_q^+, \mathbf{k})^{\mathbb{Z}_m}.$$

La última igualdad se sigue de la prueba de [EG3, Prop. 5.1]: a pesar que $\mathcal{B}(V)$ y \mathbf{u}_q^+ pueden no ser isomorfos como álgebras, se tiene $H^\bullet(\mathcal{B}(V), \mathbf{k}) = H^\bullet(\mathbf{u}_q^+, \mathbf{k})$.

De acuerdo a [GK] se tiene que $H^\bullet(\mathfrak{u}_q^+, \mathbf{k}) = \sum_{w \in W} \mathbb{C} \eta_w \otimes S(\mathfrak{n}_+)$, donde W es el grupo de Weyl, cada η_w tiene grado la longitud de w (que denotaremos $\ell(w)$) y $S(\mathfrak{n}_+)$ es el álgebra simétrica de la parte positiva del álgebra de Lie asociada considerada con grado 2.

Sea $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$. Un generador σ de \mathbb{Z}_m actúa trivialmente en $S(\mathfrak{n}_+)$ y por un escalar λ_w en cada η_w . Tal escalar es

$$\lambda_w := q^{-\sum_i n_i d_i} \quad \text{donde} \quad \sum_i n_i \alpha_i = \gamma_w := \sum_{\alpha \in \Delta_+ : w(\alpha) < 0} \alpha = \rho - w(\rho).$$

Como \mathbb{Z}_m actúa trivialmente en $S(\mathfrak{n}_+)$ y por $q_i^d \neq 1$ sobre $w = s_i$, para probar que $H^3(\mathfrak{u}_q^+, \mathbf{k})^{\mathbb{Z}_m} = 0$ nos basta con probar que $\lambda_w \neq 1$ para cada w tal que $\ell(w) = 3$. Escribimos entonces $w = s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3}$, donde dos elementos consecutivos son necesariamente distintos.

Asumimos primero que $i_1, i_2, i_3 \in V(p_l)$ para algún primo p_l que divida a m . Luego dos de ellos son iguales, pues cada $V(p_l)$ tiene a lo sumo dos elementos por el Lema anterior; así, $i_1 = i_3$ y $V(p_l) = \{i_1, i_2\}$. Tal conjunto corresponde a un subdiagrama de tipo $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 or G_2 . La condición $\lambda_w = 1$ es equivalente a $\sum_i n_i d_i \equiv 0(m)$, la cual podemos considerar entonces módulo $p_l^{\alpha_l}$. Usando la caracterización en la Sección 5.4 y un cálculo análogo al de [EG3, Prop. 5.1], concluimos que $\lambda_w \neq 1$ en este caso.

Asumimos ahora que no todos están en el mismo $V(p_l)$. Luego todos los i_j 's son diferentes: fijemos por simplicidad $i_j = j$. Así existe uno de ellos en una componente distinta: asumimos que $3 \in V(p_l)$ y que $1, 2 \notin V(p_l)$; esto es, $p_l^{\alpha_l}$ divide a $b_1 d_1, b_2 d_2$, pero no divide a $b_3 d_3$.

Escribimos $b_i = p_l^{\beta_i} a_i$, $d_i = p_l^{\gamma_i} c_i$, donde p_l no divide a a_i, c_i . Entonces $\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2 \geq \alpha_l$, pero $\beta_1 + \gamma_1 < \alpha_l$. También, $b_1 d_2 + b_2 d_1 \equiv 0(p_l)$, lo que se deduce de $b_1 d_2 + b_2 d_1 \equiv 0(m)$ si $1 \not\sim 2$, o por considerar $1, 2 \notin V(p_l)$ si $1 \sim 2$. Entonces $\min\{\beta_1 + \gamma_2, \beta_2 + \gamma_1\} \geq \alpha_l$. De las desigualdades anteriores,

$$\min\{\beta_1, \beta_2\} + \min\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \alpha_l.$$

Supongamos entonces que $\lambda_w = 1$. Luego $d_3 \equiv -n_1 d_1 - n_2 d_2(m)$, al menos uno de los naturales n_1, n_2 pertenece a $\{1, 2, 3\}$ ($n_3 = 1$ porque 3 está en una componente conexa distinta del diagrama de Dynkin). Dado que $p_l^{\alpha_l}$ no divide a d_3 (pues no divide a $b_3 d_3$) obtenemos que $\min\{\gamma_1, \gamma_2\} \leq \gamma_3$. También, como 3 no está conectado con 1, 2, tenemos que $b_1 d_3 + b_3 d_1 \equiv b_2 d_3 + b_3 d_2 \equiv 0(p_l^{\alpha_l})$, de donde

$$b_3 d_3 \equiv -b_3(n_1 d_1 + n_2 d_2) \equiv d_3(n_1 b_1 + n_2 b_2)(p_l^{\alpha_l}).$$

Se sigue entonces que $\beta_3 + \gamma_3 \geq \min\{\beta_1, \beta_2\} + \gamma_3 \geq \min\{\beta_1, \beta_2\} + \min\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \alpha_l$, lo que contradice la hipótesis $3 \in V(p_l)$. Entonces vale $\lambda_w \neq 1$ también en este caso.

A partir de lo calculado, $H^3(\mathfrak{u}_q^+, \mathbf{k})^{\mathbb{Z}_m} = 0$. □

5.3.2. Equivariantización de levantamientos de álgebras cuasi-Hopf.

En esta subsección obtendremos para cada álgebra cuasi-Hopf A que es un levantamiento de $\mathcal{A} = A(\mathcal{H}, s)$, un álgebra de Hopf H que es un levantamiento de \mathcal{H} . Usaremos la misma notación de deformaciones que en [EG3, Section 2.4]: dado un morfismo graduado f_0 de grado d de $\mathcal{A}^{\otimes n}$ en otro espacio graduado, diremos que f es una *deformación* de f_0 si f se obtiene a partir de f_0 agregando términos de grado mayor que d , lo cual escribiremos $f = f_0 + tgm$ ($tgm =$ términos en

grados mayores). Lo utilizaremos para hablar de deformaciones de álgebras, coálgebras, antípodas e incluso para mirar el asociador. Por ejemplo, un levantamiento será visto como una deformación de \mathcal{A} vía identificar A con \mathcal{A} como espacios vectoriales y pensar que se modifican algunas estructuras.

Teorema 5.3.4. *Sea A un álgebra cuasi-Hopf tal que $gr(A) = \mathcal{A}$. Entonces existe una acción de $\Gamma = \mathbb{Z}_m$ en la categoría $\mathcal{C} = \text{Rep}(A)$ que fija los elementos simples de \mathcal{C} , tal que la equivariantización \mathcal{C}^Γ es tensorialmente equivalente a $\text{Rep } H$, para algún álgebra de Hopf H . Tal álgebra de Hopf es un levantamiento de \mathcal{H} , y existe una inclusión de álgebras cuasi-Hopf $A \hookrightarrow H^J$, para algún torcimiento $J \in H \otimes H$.*

Demostración. En un primer paso construiremos H . La idea es 'extender' A como en el caso radicalmente graduado siguiendo el procedimiento de [EG3, Section 4]. Recordemos los distintos pasos de la demostración en tal trabajo para notar que aún sigue siendo válida en nuestro contexto.

Consideremos el automorfismo $\chi = \mathcal{S}^2$ del álgebra A . Definimos $\Delta_\chi(x) := (\chi \otimes \chi)(\Delta(\chi^{-1}(x)))$ para cada $x \in A$. De acuerdo a [D2, Prop. 1.2], existe un torcimiento K tal que $\Delta_\chi(x) = K\Delta(x)K^{-1}$ para todo $x \in A$. Denotemos por K_0 la componente de grado cero de K , la cual conmuta con $\Delta_0(x)$ para todo x , donde Δ_0 denota el coproducto de \mathcal{A} y miramos a A como el mismo espacio vectorial que \mathcal{A} . Así $K_0 = 1$, de donde $K = 1 + hdt$.

Notemos que [EG3, Lemma 4.1] sigue valiendo en nuestro contexto: lo que se utiliza es que el caracter λ , el cual determina el isomorfismo de funtores tensoriales $V \rightarrow \lambda \otimes V^{****} \otimes \lambda^{-1}$ en $\text{Rep } A$ satisface $\lambda^m = 1$, sin importar que el orden sea primo. Así concluimos que \mathcal{S}^{2m} es un automorfismo interior: luego, existe $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ y $b = \sigma^k + hdt \in A$ ($\sigma \in \mathcal{A}$ es el elemento de tipo grupo que genera el grupo cíclico fijado antes) tal que $\mathcal{S}^{2m}(x) = bxb^{-1}$ para todo $x \in A$. También podemos aplicar [EG3, Lemma 4.2], pues usa solamente el hecho que A es un levantamiento de \mathcal{A} con $\mathcal{A}/\text{Rad}(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}_m$ pero no usa la estructura particular de \mathcal{A} , de modo que podemos elegir b satisfaciendo la relación

$$K^{-1}\chi^{\otimes 2}(K^{-1}) \dots (\chi^{m-1})^{\otimes 2}(K^{-1}) = \Delta(b)(b^{-1} \otimes b^{-1}). \quad (5.17)$$

Usando la misma construcción de producto semidirecto de [EG3, Section 3], podemos definir el álgebra cuasi-Hopf

$$\tilde{H} := (\mathbf{k}[\chi, \chi^{-1}] \ltimes A) / (\chi^m - b).$$

Notemos que tal álgebra está caracterizada por la multiplicación de A , $\chi a \chi^{-1} = \chi(a) = \mathcal{S}^2(a)$ y la relación $\chi^m = b$ que determina el cociente.

Consideremos una deformación $J \in \tilde{H} \otimes \tilde{H}$ de J_s , $H := \tilde{H}^{J^{-1}}$ es un levantamiento cuasi-Hopf de \mathcal{H} . De acuerdo al Teorema 5.3.3, $H^3(\mathcal{H}^*, \mathbf{k}) = 0$, pues \mathcal{H} corresponde a un álgebra de Nichols de tipo Cartan sobre \mathbb{Z}_{m^2} . Así podemos razonar como en [EG3, Theorem 4.3] y cambiar J por JF , para algún $F = 1 + hdt$, de modo que H es un álgebra de Hopf, que sigue siendo un levantamiento de \mathcal{H} , pero ahora de álgebras de Hopf.

Además $\text{Rep } \tilde{H} \cong \text{Rep } H$. Para completar la prueba, definimos una acción de \mathbb{Z}_m sobre $\mathcal{C} = \text{Rep } A$, que es análoga a la presente en [EG4, Thm. 4.2]: llamamos h al generador de \mathbb{Z}_m , para distinguirlo de $\chi \in \tilde{H}$. Para dar dicha acción, debemos definir una colección de funtores $\{F_k := F_{h^k}\}_{k=0,1,\dots,m-1} \subset \text{Aut}(\mathcal{C})$. Para cada $(V, \pi_V) \in \text{Rep } A$, consideramos

$$F_k(V) = V, \quad \pi_{F_k(V)}(a) = \pi_V(\mathcal{S}^{2k}(a)), \quad \text{para todo } a \in A.$$

El isomorfismo natural $\gamma_{i,j} : F_i(F_j(V)) \rightarrow F_{(i+j)'}(V)$ está dado por la acción de $b^{\frac{(i+j)'-i-j}{n}} \in A$: explícitamente, $F_k \circ F_j = F_{k+j}$ si $j+k < m$; y $F_k \circ F_j$ está relacionado con F_{j+k-m} a menos de la acción de b^{-1} , si $j+k \geq m$. Notar que tales morfismos son de A -módulos por la condición que \mathcal{S}^{2m} es el automorfismo interior correspondiente a b .

Para tal acción, un Γ -objeto equivariante de \mathcal{C} es un objeto $X \in \mathcal{C}$ junto con una colección de isomorfismos lineales $u_k : F_k(X) = X \rightarrow X$ tales que

$$\begin{aligned} u_k(a \cdot v) &= \mathcal{S}^{2k}(a)u_k(v), & a \in A, v \in V; \\ u_k u_j &= u_{(k+j)'} b^{\frac{(i+j)'-i-j}{n}}. \end{aligned}$$

Estas relaciones son exactamente las que definen H tal como hemos visto, si $u_k = \chi^k$, de modo que obtenemos una equivalencia de categorías entre \mathcal{C}^Γ y $\text{Rep } H$; el producto tensorial en \mathcal{C}^Γ es el mismo que para las representaciones de $H^J = \tilde{H}$. \square

5.3.3. De-equivariantizaciones de $\text{Rep } \mathcal{H}$

Ahora buscamos obtener A a partir de H , para cada levantamiento H del álgebra de Hopf \mathcal{H} como antes; ésto se sigue del proceso de de-equivariantización, pues es el inverso de la equivariantización. De acuerdo a la Observación 1.6.7, nos basta con analizar las de-equivariantizaciones de $\text{Rep } \mathcal{H}$. De esta forma, necesitamos conocer todas las inclusiones $\text{Rep } \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{Z}(\text{Rep } \mathcal{H}) \cong \text{Rep } D(\mathcal{H})$ que factorizan la inclusión $\text{Rep } \mathbb{Z}_m \rightarrow \text{Rep } \mathcal{H}$. Comenzaremos entonces caracterizando tales funtores, para lo cual consideramos \mathcal{H} tal que $\Upsilon(\mathcal{H}) \neq \emptyset$.

Proposición 5.3.5. *Existe una biyección entre:*

- (i) *funtores $F : \text{Rep } \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{Z}(\text{Rep } H)$ tales que $\text{Rep } \mathbb{Z}_m$ es una subcategoría Tannakiana de $\mathcal{Z}(\text{Rep } H)$, y la composición $\text{Rep } \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{Z}(\text{Rep } H) \rightarrow \text{Rep } H$ es una inclusión,*
- (ii) *enteros $s \in \Upsilon(\mathcal{H})$.*

Demostración. Consideremos un funtor como en (i) : tal funtor induce una proyección $H \rightarrow H/\text{Rad}(H) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{m^2}] \twoheadrightarrow \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$, que es la composición de las proyecciones canónicas. $\text{Rep } \mathbb{Z}_m$ es semisimple, de modo que esencialmente debemos identificar los \mathbb{Z}_m -módulos simples $M_i = \mathbf{k}v_i$: estos módulos son de dimensión uno, y fijamos un vector v_i no nulo tal que el generador g de \mathbb{Z}_m fijado verifica $g \cdot v_i = q^{mi}v_i$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Por la equivalencia $\mathcal{Z}(\text{Rep } H) \cong_H^H \mathcal{YD}$, consideramos $M_i \in_H^H \mathcal{YD}$, con la acción determinada por $\chi \cdot v_i = q^{-i}v_i$, para χ un generador del grupo $\mathbb{Z}_{m^2} \hookrightarrow H$.

Así debemos definir una estructura de H -comódulo para cada M_i , $\delta : M_i \rightarrow H \otimes M_i$. Como $\dim M_i = 1$, tal coacción está determinada por un elemento de tipo grupo $\chi_i \in H$ para cada $i = 0, 1, \dots, m-1$, tal que $\delta(v_i) = \chi_i \otimes v_i$.

En $\text{Rep } G$, $M_i \otimes M_j \cong M_{(i+j)'}$, y estamos buscando una inclusión tensorial $\text{Rep } \mathbb{Z}_m \rightarrow_H^H \mathcal{YD}$, de donde obtenemos que $\chi_i \chi_j = \chi_{(i+j)'}$. Luego, $\chi_1 = \chi^{ms}$ para algún $s \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, lo cual determina la coacción: $\chi_i = \chi^{msi}$ para todo $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Nos falta considerar la compatibilidad (1.6) entre la acción y la coacción. Como $\chi, x_1, \dots, x_\theta$ generan H como álgebra, basta considerar esta relación para los generadores. Para $h = \chi$ y $v = v_i$, ambos miembros de (1.6) son iguales a $q^{mi} \chi^{msi} \otimes v_i$. Para $h = x_k$ y $m = v_i$, como $x_k \in \text{Rad } H$

actúa por 0, la compatibilidad (1.6) nos da la siguiente identidad:

$$0 = \delta(x_k \cdot v_i) = (1 - q^{(sd_k - b_i)mi})x_k \chi^{msi} \otimes v_i.$$

Luego, la acción y coacción anteriores satisfacen (1.6) si y sólo si $b_k \equiv sd_k(m)$ para todo k .

Además la trenza de ${}^H_H\mathcal{YD}$ se restringe a la trenza simétrica canónica de $\text{Rep } \mathbb{Z}_m$. De hecho, para cada par k, j , la trenza $c_{M_k, M_j} : M_k \otimes M_j \rightarrow M_j \otimes M_k$ resulta ser, por (1.7),

$$c(v_k \otimes v_j) = (v_k)_{(-1)} \cdot v_j \otimes (v_k)_{(0)} = \chi^{msk} \cdot v_j \otimes v_k = q^{m^2skj} v_j \otimes v_k = v_j \otimes v_k.$$

Recíprocamente, consideremos $s \in \Upsilon(\mathcal{H})$. Definimos $\mathcal{F}_s : \text{Rep } \mathbb{Z}_m \rightarrow {}^H_H\mathcal{YD}$ como el funtor inducido por la proyección $H \twoheadrightarrow H/\text{Rad}(H) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m] \twoheadrightarrow \mathbf{k}[Z_m]$ si miramos ${}^H_H\mathcal{YD} \hookrightarrow \text{Rep } H$, y para cada $M_i = \mathbf{k}v_i$ definimos como antes $\delta : M_i \rightarrow H \otimes M_i$, $\delta(v_i) = \chi^{msi} \otimes v_i$. De acuerdo a lo calculado en el comienzo de la prueba, estas estructuras satisfacen la condición de compatibilidad (1.6), y \mathcal{F}_s aplica objetos de $\text{Rep } \mathbb{Z}_m$ en objetos de ${}^H_H\mathcal{YD}$. Para los morfismos, el hecho que $\text{Rep } \mathbb{Z}_m$ es semisimple, nos da una definición canónica de \mathcal{F}_s , de modo que se preserve la estructura de categorías abelianas.

\mathcal{F}_s resulta tensorial, y más aún preserva la trenza, si consideramos la trenza simétrica canónica de $\text{Rep } \mathbb{Z}_m$, lo cual finaliza la prueba. \square

Para terminar de caracterizar las posibles de-equivariantizaciones de $\text{Rep } \mathcal{H}$, necesitaremos un par de lemas.

Lema 5.3.6. *Sea $s \in \Upsilon(\mathcal{H})$. Entonces la de-equivariantización $(\text{Rep } \mathcal{H})_{\mathbb{Z}_m}$ inducida por la inclusión \mathcal{F}_s es $\text{Rep } A$, para algún álgebra cuasi-Hopf básica A tal que $A/\text{Rad } A \cong \mathbf{k}[Z_m]$, cuyo asociador está dado por $\omega_s \in H^3(\mathbb{Z}_m, \mathbf{k}^\times)$.*

Demostración. Por [DGNO, Corollary 4.27], la categoría $(\text{Rep } H)_{\mathbb{Z}_m}$ es equivalente a $\text{Rep } A$ para algún álgebra cuasi-Hopf A . Aplicando el Ejemplo 5.1.15 a la subcategoría de los objetos simples, obtenemos que $\text{Rep } A$ contiene a $\text{Vec}_{\mathbb{Z}_m, \omega}$, donde ω está dado por la fórmula (5.9), presente en dicho ejemplo. En nuestro caso, $T : \mathbb{Z}_m \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_{m^2}$, $T(a)(b) = q^{sab}$ para q una raíz de la unidad de orden m^2 como antes, y el 2-cociclo que define \mathbb{Z}_m como extensión de \mathbb{Z}_m por $\widehat{\mathbb{Z}}_m \cong \mathbb{Z}_m$ es

$$\xi : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m \cong \langle m \rangle \subseteq \mathbb{Z}_{m^2}, \quad \xi(j, k) = (j + k)' - j - k,$$

de donde obtenemos que $\omega = \omega_s$. \square

Lema 5.3.7. *Sea \mathcal{H} un álgebra de Hopf radicalmente graduada de dimensión finita tal que*

$$\mathcal{H}/\text{Rad } \mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_{m^2}.$$

Para cada $s \in \Upsilon(\mathcal{H})$, la de-equivariantización de $\text{Rep } \mathcal{H}$ correspondiente al funtor \mathcal{F}_s es la categoría $\text{Rep } A(\mathcal{H}, s)$.

Demostración. Por las pruebas de los Teoremas 5.2.2 y 5.2.4, podemos extender cada álgebra $A(\mathcal{H}, s)$ a \mathcal{H}^{J_s} de tal forma que obtenemos $\text{Rep } \mathcal{H}$ como una equivariantización de $\text{Rep } A(\mathcal{H}, s)$ por una acción de \mathbb{Z}_m que fija los elementos invertibles, para ello ver la prueba del Teorema 5.3.4. De acuerdo al Teorema 5.1.13, cada categoría tensorial $\text{Rep } A(\mathcal{H}, s)$ es en consecuencia una de-equivariantización de $\text{Rep } \mathcal{H}$ por una inclusión de $\text{Rep } \mathbb{Z}_m$. Aplicando el Lema previo concluimos la prueba. \square

5.3.4. Clasificación de las categorías tensoriales finitas punteadas sobre \mathbb{Z}_m .

El principal resultado de esta sección es el siguiente:

Teorema 5.3.8. *Sea A un álgebra cuasi-Hopf de dimensión finita básica, tal que $A/\text{Rad } A \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$ como álgebras, para algún $m \in \mathbb{N}$ que no es divisible por primos ≤ 7 . Entonces A es equivalente por torcimiento a una de las siguientes álgebras cuasi-Hopf:*

1. *un álgebra de Hopf A básica radicalmente graduada de dimensión finita tal que*

$$A/\text{Rad } A \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m],$$

2. *un álgebra cuasi-Hopf semisimple $\text{Fun}(\mathbb{Z}_m, \mathbf{k})$, con asociador dado por $\omega_s \in H^3(\mathbb{Z}_m, \mathbf{k}^\times)$, $s \in \{1, \dots, m-1\}$,*
3. *un álgebra cuasi-Hopf $A(H, s)$, donde H es un álgebra de Hopf radicalmente graduada tal que $H/\text{Rad } H \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{m^2}]$, y $s \in \Upsilon(H)$.*

Demostración. Sea A un álgebra cuasi-Hopf como en el enunciado, consideramos su álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada asociada \mathcal{A} . Si \mathcal{A} tiene asociador trivial, entonces \mathcal{A} es un álgebra de Hopf, y A es equivalente por torcimiento a un álgebra de Hopf usando el Teorema 5.3.3. El álgebra dual tiene corradical isomorfo a $\mathbf{k}\mathbb{Z}_m$, porque de acuerdo a [Mo] dualizando la filtración radical obtenemos la filtración corradical. Por el Teorema 1.6.4, su dual es un levantamiento $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$ para algún dato \mathcal{D} sobre \mathbb{Z}_m , pero por el Teorema 1.6.6, A^* es deformación por cociclo de $\mathcal{A}^* = u(\mathcal{D}, 0, 0)$, de donde A es equivalente por torcimiento a \mathcal{A} , la cual también es del tipo $u(\mathcal{D}', 0, 0)$ para algún dato \mathcal{D}' sobre \mathbb{Z}_m .

Consideremos ahora el caso en que \mathcal{A} tiene asociador no trivial: por el Teorema 5.2.4, \mathcal{A} es semisimple con asociador no trivial, o es de la forma $A(\mathcal{H}, \omega_s)$ para algún álgebra de Hopf radicalmente graduada \mathcal{H} tal que $\mathcal{H}/\text{Rad } \mathcal{H} \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{m^2}]$, y algún $s \in \Upsilon(\mathcal{H})$. Para el primer caso no hay nada que hacer, de modo que consideramos el segundo. Por el Teorema 5.3.4, la categoría $\text{Rep } A$ admite una acción de \mathbb{Z}_m cuya equivariantización es $\text{Rep } H$, donde H es un levantamiento (en el sentido de filtraciones radicales) del álgebra de Hopf \mathcal{H} .

Por otro lado, $\text{Rep } H$ es tensorialmente equivalente a $\text{Rep } \mathcal{H}$ por la Observación 1.6.7. De este modo, una inclusión de la categoría $\text{Rep } \mathbb{Z}_m$ en $\text{Rep } H$ que se factoriza por $\mathcal{Z}(\text{Rep } H)$ corresponde unívocamente a una inclusión en $\text{Rep } \mathcal{H}$ que se factoriza por $\mathcal{Z}(\text{Rep } \mathcal{H})$, y la equivalencia tensorial anterior induce una equivalencia tensorial entre los $\text{Fun } \mathbb{Z}_m$ -módulos en tales categorías. Esto es, las de-equivariantizaciones de $\text{Rep } H$ son equivalentes tensorialmente a las de-equivariantizaciones de $\text{Rep } \mathcal{H}$.

En consecuencia, reducimos el problema al caso graduado, y $\text{Rep } \mathcal{H}$ admite tantas inclusiones $\text{Rep } G \rightarrow \text{Rep } D(\mathcal{H})$ como enteros s hay en $\Upsilon(\mathcal{H})$. Además cada s corresponde a la de-equivariantización $\text{Rep } A(\mathcal{H}, \omega_s) = (\text{Rep } H)_{\mathbb{Z}_m}$ por el Lema 5.3.7, y así obtenemos todas las de-equivariantizaciones. Por el Teorema 5.1.13 estos procesos son inversos uno del otro, y así $\text{Rep } A \cong \text{Rep } A(\mathcal{H}, \omega_s)$ para algún s ; o sea, A es equivalente por torcimiento a $A(\mathcal{H}, \omega_s)$. \square

El Teorema anterior implica la correspondiente clasificación de las categorías tensoriales punteadas.

Teorema 5.3.9. *Sea \mathcal{C} una categoría tensorial punteada finita cuyos objetos simples forman un grupo cíclico de orden m , para algún m no divisible por $2, 3, 5, 7$. Entonces \mathcal{C} es tensorialmente equivalente a alguna de las siguientes categorías:*

1. *la categoría de H -módulos de dimensión finita, donde H es un álgebra de Hopf básica radicalmente graduada de dimensión finita tal que $H/\text{Rad } H \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_m]$,*
2. *la categoría semisimple $\text{Vec}_{\mathbb{Z}_m}^{\omega_s}$, para algún $s \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,*
3. *la categoría de $A(H, s)$ -módulos de dimensión finita, para algún álgebra de Hopf H básica radicalmente graduada de dimensión finita tal que $H/\text{Rad } H \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{m^2}]$, y algún $s \in \Upsilon(H)$.*

Demostración. Toda categoría punteada corresponde a la categoría de A -módulos de dimensión finita, para algún álgebra cuasi-Hopf de dimensión finita por [EO, Prop.2.6]. Tal álgebra cuasi-Hopf es básica, pues \mathcal{C} es punteada, por lo cual podemos aplicar el Teorema 5.3.8. \square

5.4. Ejemplos de álgebras cuasi-Hopf básicas sobre p -grupos cíclicos

En esta sección presentaremos como aplicación del Teorema 5.3.8 todas las álgebras cuasi-Hopf A básicas de dimensión finita tales que $A/\text{Rad } A \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{p^n}]$, para algún primo $p \geq 11$ y algún $n \in \mathbb{N}$, salvo equivalencia por torcimiento. Tales ejemplos son importantes también en la prueba del Teorema 5.3.3. Este resultado se basa en la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas sobre \mathbb{Z}_{p^n} , para lo cual primero describiremos todas las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre $\mathbf{k}[\mathbb{Z}_{p^n}]$. Este resultado es completamente análogo al presente en [AS2] para $n = 1$. Más aún, clasificaremos todas las álgebras cuasi-Hopf radicalmente graduadas sobre \mathbb{Z}_{p^n} para cualquier p primo impar, de acuerdo al Teorema 5.2.4.

5.4.1. Álgebras de Nichols sobre \mathbb{Z}_{p^n}

Describiremos las posibles álgebras de Nichols sobre \mathbb{Z}_{p^n} siguiendo esencialmente los pasos de [AS2]. Fijemos q una raíz primitiva de la unidad de orden p^n y g un generador de \mathbb{Z}_{p^n} , siendo p primo impar.

Consideremos una base x_1, \dots, x_l , donde $x_i \in V_{g_i}^{\chi_i}$ para algún $g_i \in \mathbb{Z}_{p^n}$ y algún caracter χ_i . Los caracteres están determinados por $\chi_i(g) = q^{d_i}$, y sea $b_i \in \mathbb{N}$ tal que $g_i = g^{b_i}$. Consideremos $a_i, c_i \in \mathbb{N}$ no divisibles por p , y $\alpha_i, \gamma_i \geq 0$ tales que $b_i = p^{\alpha_i} a_i$, $d_i = p^{\gamma_i} c_i$.

Siguiendo la clasificación de [H3], la matriz de trenza $(q_{ij} := \chi_i(g_j))$ es de tipo Cartan, o $p = 3$ y la trenza tiene uno de los siguientes diagramas generalizados de Dynkin:

$$\widehat{B}_2 : \circ \xi \xrightarrow{\zeta^{-1}} \circ \zeta, \quad \xi \in \mathbb{G}_3, \zeta \in \mathbf{k}^\times \setminus \{1, \xi, \xi^2\}, \quad (5.18)$$

$$\widehat{B}_3 : \circ \zeta \xrightarrow{\zeta^{-1}} \circ \zeta \xrightarrow{\zeta^{-1}} \circ \zeta^{-3}, \quad \circ \zeta \xrightarrow{\zeta^{-1}} \circ \zeta^{-4} \xrightarrow{\zeta^4} \circ \zeta^{-3}, \quad \zeta \in \mathbb{G}_9. \quad (5.19)$$

Si $l = 1$, no hay consideraciones para hacer, salvo que $q^{b_1 d_1} \neq 1$; esto es, p^n no divide a $b_1 d_1$, que es equivalente a $\alpha_1 + \gamma_1 < n$.

Si $l = 2$, la trenza es de tipo Cartan $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 , G_2 , o no es Cartan, y es de tipo \widehat{B}_2 .

A₁ × A₁: tenemos $1 = q_{12}q_{21} = q^{b_1d_2+b_2d_1}$, de donde $b_1d_2+b_2d_1 \equiv 0(p^n)$. Primero, $\alpha_1 + \gamma_2 = \alpha_2 + \gamma_1$, dado que ambos enteros son menores que n ; sea m tal entero. También, $a_1c_2 + a_2c_1 \equiv 0(p^{n-m})$. El conjunto de soluciones se describe entonces eligiendo $\alpha_i \leq m < n$, a_1, a_2, c_1, c_2 no divisibles por p tales que $a_1c_2 + a_2c_1 \equiv 0(p^{n-m})$, de modo que podemos elegir libremente tres de ellos y determinar el cuarto por tal ecuación, y finalmente definir $\gamma_i = m - \alpha_i$.

A₂: En este caso, $b_1c_1 \equiv b_2c_2 \equiv -b_1c_2 - b_2c_1(p^n)$, de donde

$$\alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \gamma_2 = \min\{\alpha_1 + \gamma_2, \alpha_2 + \gamma_1\}.$$

Aquí, $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\gamma_1 = \gamma_2$. También, $a_1c_1 \equiv a_2c_2 \equiv -a_1c_2 - a_2c_1(p^{n-m})$, donde $m = \alpha_i + \gamma_i$. Entonces, $a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2 \equiv 0(p^{n-m})$, de donde $p = 3$, $m = n - 1$ y $a_1 \equiv a_2(3)$, o $a_1a_2^{-1} \not\equiv 1(p^{n-m})$ es una raíz cúbica de la unidad en \mathbb{Z}_{p^n} , en cuyo caso $p \equiv 1(3)$.

B₂: Tenemos ahora $b_1c_1 \equiv 2b_2c_2 \equiv -b_1c_2 - b_2c_1(p^n)$, de donde

$$\alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \gamma_2 = \min\{\alpha_1 + \gamma_2, \alpha_2 + \gamma_1\}.$$

Como en el caso anterior, $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\gamma_1 = \gamma_2$. También, $a_1c_1 \equiv 2a_2c_2 \equiv -a_1c_2 - a_2c_1(p^{n-m})$, si $m = \alpha_i + \gamma_i$. En tal caso, $a_1^2 + 2a_1a_2 + 2a_2^2 \equiv 0(p^{n-m})$, y como en [AS2], esta ecuación tiene solución si y sólo si -1 es un cuadrado módulo p , lo cual implica que $p \equiv 1(4)$.

G₂: Ahora, $b_1c_1 \equiv 3b_2c_2 \equiv -b_1c_2 - b_2c_1(p^n)$. Si $p = 3$, entonces

$$\alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \gamma_2 + 1 = \min\{\alpha_1 + \gamma_2, \alpha_2 + \gamma_1\},$$

que es una contradicción. Si $p \neq 3$, $\alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \gamma_2 = \min\{\alpha_1 + \gamma_2, \alpha_2 + \gamma_1\}$. Entonces, $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\gamma_1 = \gamma_2$. También, $a_1c_1 \equiv 3a_2c_2 \equiv -a_1c_2 - a_2c_1(p^{n-m})$, donde $m = \alpha_i + \gamma_i$. Luego, $a_1^2 + 3a_1a_2 + 3a_2^2 \equiv 0(p^{n-m})$, que tiene solución si y sólo si -3 es un cuadrado módulo p , esto es, $p \equiv 1(3)$.

\widehat{B}_2 : Para este caso $p = 3$ y ζ es una raíz primitiva de orden 3^k , donde $2 \leq k \leq n$ (si $k = 1$ la trenza es de tipo Cartan). Así $\xi = \zeta^{\pm 3^{k-1}}$. Podemos asumir $\zeta = q^{3^{n-k}}$ a menos de cambiar q , de donde

$$b_1d_1 \equiv \pm 3^{n-1}(3^n), \quad b_2d_2 \equiv 3^{n-k}(3^n), \quad b_1d_2 + b_2d_1 \equiv -3^{n-k}(3^n).$$

A partir de estas igualdades, $\alpha_1 + \gamma_1 = n - 1$, $\alpha_2 + \gamma_2 = n - k$ y $\min\{\alpha_1 + \gamma_2, \alpha_2 + \gamma_1\} = n - k$, con lo cual $\alpha_1 = \alpha_2$ (en cuyo caso $\gamma_1 = \gamma_2 + k - 1$), o $\gamma_1 = \gamma_2$ (en cuyo caso $\alpha_1 = \alpha_2 + k - 1$), y

$$a_1c_1 \equiv \pm 1(3), \quad a_2c_2 \equiv 1(3^k), \quad \begin{cases} a_1c_2 + 3^{k-1}a_2c_1 \equiv -1(3^k), & \alpha_1 = \alpha_2; \\ 3^{k-1}a_1c_2 + a_2c_1 \equiv -1(3^k), & \gamma_1 = \gamma_2. \end{cases}$$

Consideremos el segundo caso (el primero es análogo). Multiplicando por el elemento invertible c_2 (módulo p^k), tenemos

$$a_1c_2^2 + c_2 + 3^{k-1}c_1 \equiv 0(3^k).$$

Tal ecuación tiene solución si y sólo si $1 - 4a_1c_13^{k-1} \equiv 1 \pm 3^{k-1}(3^k)$ es un residuo cuadrático. Notemos que

$$(\pm 3^{k-1} \pm 1)^2 \equiv \pm 2 \cdot 3^{k-1} + 1 \equiv 1 \mp 3^{k-1}(3^n),$$

de donde $1 \pm 3^{k-1}$ son residuos cuadráticos. Obtenemos así las posibles estructuras de módulos de Yetter-Drinfeld reconstruyendo b_i, d_i .

Probemos ahora un enunciado análogo a [AS2, Prop. 5.1] pero para p^n en lugar de p .

Proposición 5.4.1. *Sea V un módulo de Yetter-Drinfeld sobre Z_{p^n} tal que $\dim V \geq 3$, y cuya álgebra de Nichols es de dimensión finita. Entonces, $p = 3$ y V es de tipo Cartan $A_2 \times A_1$ o $A_2 \times A_2$.*

Demostración. Consideremos V de dimensión 3; descartemos primero los casos no Cartan: tenemos $\widehat{B}_2 \times A_1$ o (5.19). Para cualquiera de ellos, consideremos vértices 1,2 determinando un subdiagrama de tipo \widehat{B}_2 , vértices 1,3 no conectados, y vértices 2,3 determinando en consecuencia un subdiagrama de tipo A_2 o $A_1 \times A_1$. A partir de la primer condición, $\alpha_1 + \gamma_1 > \alpha_2 + \gamma_2$; de la segunda, $\alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_3 + \gamma_3$, y de la última, $\alpha_2 + \gamma_2 = \alpha_3 + \gamma_3$. Pero esto es una contradicción.

Consideremos V de tipo Cartan. Como en [AS2], no puede ser de tipo $A_1 \times A_1 \times A_1$, con lo cual asumimos que los vértices 1 y 2 del correspondiente diagrama de Dynkin están conectados, y los vértices 1 y 3 no están conectados. Más aún, consideremos que si existe una arista múltiple, entonces ella está entre los vértices 1 y 2. Esto es, hay tres posibilidades

- $b_1 d_3 \equiv -b_3 c_1(p^n)$;
- $b_1 c_1 \equiv m b_2 c_2 \equiv -b_1 c_2 - b_2 c_1(p^n)$ para algún $m = 1, 2, 3$, en cuyo caso $b_2 d_3 \equiv -b_3 c_2(p^n)$ (los casos $X_2 \times A_1$ para $X = A, B, G$), o $b_3 c_3 \equiv b_2 c_2 \equiv -b_3 c_2 - b_2 c_3(p^n)$ y $m = 1, 2$ (casos A_3, B_3),
- $2b_1 c_1 \equiv b_2 c_2 \equiv -b_1 c_2 - b_2 c_1(p^n)$, en cuyo caso $b_3 c_3 \equiv b_2 c_2 \equiv -b_3 c_2 - b_2 c_3(p^n)$ y $m = 1, 2$ (caso C_3).

Como las correspondientes submatrices son de tipo Cartan finito, usamos la descripción previa para rango 2. Después de reducir las potencias de p en cada ecuación, reducimos a una ecuación módulo p para a_i, c_i no divisibles por p . Considerando los casos detalladamente de modo análogo a [AS2] obtenemos que las únicas posibilidades son $A_2 \times A_1$, en cuyo caso $p = 3$.

Si consideramos $\dim V \geq 4$, cada subdiagrama de 3 vértices es de tipo $A_2 \times A_1$, de modo que la única posibilidad es $A_2 \times A_2$ para $p = 3$. En tal caso, los posibles V son los siguientes:

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = 3^\alpha a, \quad d_1 = d_2 = 3^\gamma c & \qquad \alpha + \gamma = n - 1, \quad 3 \nmid ac, \\ b_3 = b_4 = 3^{\alpha'} a', \quad d_3 = d_4 = 3^{\gamma'} c' & \qquad \alpha' + \gamma' = n - 1, \quad 3 \nmid a'c', \end{aligned}$$

donde $\alpha + \gamma' = \alpha' + \gamma$ (y así $\alpha = \alpha', \gamma = \gamma'$, y $ac' + a'c \equiv 0(3)$). □

5.4.2. Álgebras cuasi-Hopf básicas sobre Z_{p^n}

Observación 5.4.2. Notemos que para cada m , $A(q) = A(\mathcal{B}(V) \# \mathbb{Z}_{m^2}, \omega_1)$ que es el álgebra de [Ge], donde V es el espacio vectorial trenzado de dimensión 1 y matriz de trenza q .

Analizamos entonces la posibilidad de tener nuevas álgebras.

Proposición 5.4.3. *Sea A un álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada básica de dimensión finita, con $A[0] = \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{p^n}]$ y asociador Φ_s tal que p no divide a s . Entonces el rango de $A[1]$ sobre $A[0]$ es ≤ 1 .*

Demostración. Supongamos que existe A como antes tal que el rango de $A[1]$ sobre $A[0]$ es ≥ 2 , y consideremos A de dimensión mínima con tales condiciones. Por el Teorema 5.2.2, $A = A(H, s)$, $\overline{H} = R \# \mathbb{Z}_{p^{2n}}$ donde R es un álgebra de Nichols de tipo diagonal, $\dim R[1] = 2$ y la trenza está dada por $(q^{b_i d_j})_{i,j=1,2}$. De acuerdo a la clasificación de Heckenberger, ver *Tablas 1-4*, es de tipo Cartan:

- de tipo A_2, B_2 or G_2 , donde

$$b_1 d_1 + b_1 d_2 + b_2 d_1 \equiv m b_2 d_2 + b_1 d_2 + b_2 d_1 \equiv 0(p^{2n}), \quad m = 1, 2, 3 \text{ respectivamente; o}$$

- de tipo $A_1 \times A_1$, $b_1 d_2 + b_2 d_1 \equiv 0(p^{2n})$;

o $p = 3$ y

- es estándar \widehat{B}_2 , bajo las condiciones de la Subsección anterior.

Escribimos $b_i = p^{\alpha_i} a_i$, $d_i = p^{\gamma_i} c_i$, donde p no divide a $a_i c_i$. Dado que $b_i \equiv s d_i(p^n)$, tenemos $\alpha_i = \gamma_i$.

Para los casos X_2 , notemos que $p^{2\alpha_1} a_1 c_1 \equiv p^{2\alpha_2} m a_2 c_2(p^{2n})$, de donde $\alpha_1 = \alpha_2$, que denotaremos α . Así, $a_1 c_1 \equiv m a_2 c_2 \equiv -a_1 c_2 - a_2 c_1(p^{2n-2\alpha})$, $a_i \equiv s c_i(p^{n-\alpha})$. Luego, $a_1^2 \equiv -2a_1 a_2(p^{n-\alpha})$, con lo cual $a_1 \equiv -2a_2(p^{n-\alpha})$, y $m a_2^2 \equiv a_1^2 \equiv 4a_2^2(p^{n-\alpha})$. Esto es, $p^{n-\alpha} \mid (4-m)a_2^2$. La única posibilidad es entonces $p = 3, \alpha = n - 1$ y $m = 1$. Pero en tal caso,

$$(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) \equiv 3a_1 c_1 \quad (9).$$

Como $a_1 \equiv -2a_2 \equiv a_2(9)$ y $a_i \equiv c_i(3)$, deducimos que $9 \mid 3a_1 c_1$, una contradicción.

Si estamos en el tipo $A_1 \times A_1$, se tiene $\alpha_1 = \alpha_2$, y $a_1 c_2 + a_2 c_1 \equiv 0(p^{2n-2\alpha})$. Luego $2a_1 a_2 \equiv 0(p^{n-\alpha})$, y también es una contradicción.

Así, el rango de $H[1]$ sobre $H[0]$ es ≤ 1 . □

La pregunta es entonces qué pasa cuando p divide a s y consideramos el asociador dado por $\omega_s \in H^3(\mathbb{Z}_m, \mathbf{k}^\times)$. Consideremos un álgebra cuasi-Hopf $A(H, s)$, para $H = R \# \mathbb{Z}_{p^{2n}}$, y escribamos $s = p^\theta t$, donde $\alpha \geq 1$ y p no divide a t . Consideremos $\alpha_i, \gamma_i \geq 0$ tales que $b_i = p^{\alpha_i} a_i$, $d_i = p^{\gamma_i} c_i$.

Si R tiene rango 1, la única condición es $b_1 \equiv s d_1(p^n)$, que es posible eligiendo cualquier d_1 , $\gamma_1 < n$: si $\theta + \gamma_1 < n$, entonces b_1 está unívocamente determinado módulo p^n , si $\theta + \gamma_1 \geq n$, simplemente elegimos b_1 tal que p^n divide a b_1 .

Si R tiene rango 2, R es de tipo Cartan $A_1 \times A_1, A_2, B_2$ or G_2 , o $p = 3$ y es estándar de tipo \widehat{B}_2 . En el primer caso, tenemos que $\alpha_i \leq m < n$, a_1, a_2, c_1, c_2 no son divisibles por p , $a_1 c_2 + a_2 c_1 \equiv 0(p^{2n-m})$, y definimos $\gamma_i = m - \alpha_i$. Como también $b_i \equiv s d_i(p^n)$, si suponemos que p^n no divide a b_1 ($\alpha_1 < n$), tenemos que $\alpha_1 = \theta + \gamma_1$ y $a_1 \equiv c_1(p)$. Pero en tal caso, $\alpha_2 = \theta + \gamma_2$ y $a_2 \equiv c_2(p)$ de donde $2c_1 c_2 \equiv 0(p)$, absurdo. Así, p^n divide a b_i , y tenemos que $\gamma_i + \theta \geq n$. Así debemos elegir γ_i, α_i tales que $n \leq \gamma_i + \theta, \gamma_i + \alpha_i < 2n$.

En los casos restantes, la condición $b_i \equiv sd_i(p^n)$ da una contradicción si suponemos que p^n no divide a b_i de modo análogo, con lo cual consideramos $p^n | b_i$ para todo i . Las restantes restricciones están en la Subsección anterior.

Si R tiene rango mayor que 2, $p = 3$ y R es de tipo $A_2 \times A_1$ o $A_2 \times A_2$. En tal caso, $\alpha_i + \gamma_i = 2n - 1$, y en todos ellos p^n divide a β_i : tenemos $\alpha_i = n$, $\gamma_i = n - 1$, y el hecho que p divide a s implica que $b_i \equiv sd_i(p^n)$ vale trivialmente.

A partir del Teorema 5.2.4, hemos probado que:

Corolario 5.4.4. *Sea $A = \bigoplus_{n \geq 0} A[n]$ un álgebra cuasi-Hopf radicalmente graduada de dimensión finita sobre \mathbb{Z}_{p^n} , con asociador Φ_s para algún s tal que el rango de $A[1]$ sobre $A[0]$ es $\theta \geq 1$. Entonces $A = A(\mathcal{B}(V) \#_{\mathbb{Z}_{p^{2n}}, \omega_s})$ para algún módulo de Yetter-Drinfeld V sobre $\mathbb{Z}_{p^{2m}}$ de dimensión $\theta = 2, 3, 4$. Más aún, $\theta = 3, 4$ si y sólo si $p = 3$ y V es de tipo $A_2 \times A_1$, $A_2 \times A_2$, respectivamente.*

Además existen álgebras cuasi-Hopf $H(p^n, s)$, $1 \leq s \leq p^n - 1$, generadas por un elemento de tipo grupo σ de orden p^n , cuyo asociador Φ_s es no trivial. De modo análogo al caso $n = 1$, todo automorfismo preserva la potencia de p que divide a s , con lo cual hay $2(n-1)$ clases de equivalencias salvo isomorfismo: si s_0 es un residuo no cuadrático coprimo con p , tales clases son

$$H_+(p^n, m) := H(p^n, p^m), \quad H_-(p^n, m) := H(p^n, s_0 p^m) \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

Tales clases no son equivalentes por torcimiento.

Como consecuencia del Teorema 5.3.8 tenemos:

Teorema 5.4.5. *Sea A un álgebra cuasi-Hopf básica de dimensión finita tal que $A/\text{Rad}(A) \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}_{p^n}]$ para algún primo $p > 7$ y algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces A es equivalente por torcimiento a una de las siguientes álgebras cuasi-Hopf:*

1. un álgebra de Hopf radicalmente graduada $u(\mathcal{D}, 0, 0)$ para algún dato \mathcal{D} de tipo A_2 , B_2 o G_2 sobre \mathbb{Z}_{p^n} ,
2. un álgebra cuasi-Hopf semisimple $H_{\pm}(p^n, m)$ ($1 \leq m \leq n-1$),
3. un álgebra $A(H, \omega_s)$, donde $H \cong u(\mathcal{D}, 0, 0)$ para algún dato \mathcal{D} de tipo A_2 , B_2 o G_2 sobre $\mathbb{Z}_{p^{2n}}$ y algún $s \in \Upsilon(H)$.

Bibliografía

- [An] N. Andruskiewitsch, *About finite dimensional Hopf algebras*, Notes of a course given at the CIMPA School Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics Bariloche 2000. Contemp. Math. **294**, 1–57 (2002).
- [AA] N. Andruskiewitsch and I. Angiono, *On Nichols algebras with generic braiding* Modules and Comodules. Trends in Mathematics. Brzezinski, T.; Gómez Pardo, J.L.; Shestakov, I.; Smith, P.F. (Eds.), pp. 47–64 (2008). ISBN: 978-3-7643-8741-9.
- [AAY] N. Andruskiewitsch, I. Angiono and H. Yamane, *On pointed Hopf superalgebras*. Accepted in Contemp. Math. arxiv:1009.5148, 18 pp
- [AF] N. Andruskiewitsch and W. Ferrer, *The beginnings of the theory of Hopf algebras*, Acta Appl. Math. (2009) **108**, 3–17.
- [AS1] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3* , J. Algebra **209**, 658–691 (1998).
- [AS2] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Finite quantum groups and Cartan matrices*, Adv. Math. **154**, 1–45 (2000).
- [AS3] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Finite quantum groups over abelian groups of prime exponent*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **35** (2002), 1–26.
- [AS4] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Pointed Hopf algebras*, “New directions in Hopf algebras”, MSRI series Cambridge Univ. Press; 1–68 (2002).
- [AS5] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *A characterization of quantum groups*. J. Reine Angew. Math. 577 (2004), 81–104.
- [AS6] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. Math. **171** (2010), No. 1, 375–417.
- [A1] I. Angiono, *On Nichols algebras with standard braiding*, Alg. Number Th. **3**, no. 1 (2009), 35–106.
- [A2] I. Angiono, *Basic quasi-Hopf algebras over cyclic groups*. Adv. Math. **225** (2010), 3545–3575.
- [A3] I. Angiono, *A presentation by generators and relations of Nichols algebras of diagonal type and convex orders on root systems*, submitted. arXiv:1008.4144, 30 pp.

- [A4] I. Angiono, *On Nichols algebras of diagonal type*, en desarrollo.
- [AGI] I. Angiono and A. García Iglesias, *Pointed Hopf algebras with standard braiding are generated in degree one*, *Contemp. Math.* **537** (2011), 57–70.
- [BaKi] B. Bakalov and A. Kirillov Jr., *Lectures on Tensor categories and modular functors*, AMS, Providence, (2001).
- [Be] J. Beck, *Convex Bases of PBW Type for Quantum Affine Algebras*, *Comm. Math. Phys.* **165** (1994), 193–199.
- [B] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts*, *Ann. Math.* **87** (1953), 115–207.
- [Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie, Ch. 4, 5 et 6*. Elements de mathematique. Hermann, Paris, 1968.
- [C] P. Cartier, *Hyperalgebres et groupes de Lie formels*, *Seminaire Sophus Lie*, 2e annee: 1955/56, (1957).
- [CH1] M. Cuntz and I. Heckenberger, *Weyl groupoids with at most three objects*. *J. Pure Appl. Algebra* **213**, No. 6 (2009), 1112–1128.
- [CH2] M. Cuntz and I. Heckenberger, *Finite Weyl groupoids of rank three*, *math. QA/0912.0212*.
- [Do] Y. Doi, *Braided bialgebras and quadratic bialgebras*, *Commun. Algebra* **21**, 1731–1749 (1993).
- [DT] Y. Doi and M. Takeuchi, *Cleft comodule algebras for a bialgebra*, *Commun. Algebra* **14**, 801–817 (1986).
- [D1] V. Drinfeld, *Quantum groups*, *Proc. Int. Congr. Math., Berkeley 1986*, Vol. **1** (1987), 798–820.
- [D2] V. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*. (Russian) *Algebra Anal.* **1** (1989), no. 6, 114–148; (English translation) *Leningr. Math. J.* **1** (1990), no. 6, 1419–1457.
- [DGNO] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych and V. Ostrik, *On braided fusion categories I*. *Sel. Math., New Ser.*, **16** (2010), 1–119.
- [EG1] P. Etingof and S. Gelaki, *Finite-dimensional quasi-Hopf algebras with radical of codimension 2*. *Math. Res. Lett.* **11** (2004), 685–696.
- [EG2] P. Etingof and S. Gelaki, *On radically graded finite-dimensional quasi-Hopf algebras*. *Mosc. Math. J.* **5** (2005), no. 2, 371–378.
- [EG3] P. Etingof and S. Gelaki, *Liftings of graded quasi-Hopf algebras with radical of prime codimension*. *J. Pure Appl. Algebra* **205**, no.2, 310–322 (2006).
- [EG4] P. Etingof, S. Gelaki, *The small quantum group as a quantum double*. *J. Algebra* **322** (2009), 2580–2585.

- [EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych and V. Ostrik, *Tensor Categories*. Lecture notes of the MIT course 'Tensor categories' by P. Etingof, <http://www-math.mit.edu/etingof/tenscat.pdf>.
- [EO] P. Etingof and V. Ostrik, *Finite tensor categories*. Moscow Math. J. **4** (2004), no. 3, 627–654, 782–783.
- [Ga] M. Gaberdiel, *An algebraic approach to logarithmic conformal field theory*, Int. J. Mod. Phys. A18 **25**, 4593–4638, (2003).
- [Ge] S. Gelaki, *Basic quasi-Hopf algebras of dimension n^3* . J. Pure Appl. Algebra **198** (2005), 165–174.
- [GHV] M. Graña, I. Heckenberger and L. Vendramín, *SARNA: Arithmetic Root Systems and Nichols Algebras Software*, a program to calculate the Arithmetic Root System associated to a braid of diagonal type. Available at <http://mate.dm.uba.ar/lvendram/>
- [GK] V. Ginzburg and S. Kumar, *Cohomology of quantum groups at root of unity*. Duke Math. J. **69** (1993), no. 1, 179–198.
- [Gu] R. Gunther, *Crossed products for pointed Hopf algebras*. Commun. Algebra **27**, no. 9 (1999), 4389–4410.
- [H1] I. Heckenberger, *The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type*, Invent. Math. **164**, 175–188 (2006).
- [H2] I. Heckenberger, *Examples of finite dimensional rank 2 Nichols algebras of diagonal type*, Compos. Math. **143** (2007) 165–190.
- [H3] I. Heckenberger, *Classification of arithmetic root systems*, Adv. Math. **220** (2009), 59–124.
- [H4] I. Heckenberger, *Lusztig isomorphisms for Drinfel'd doubles of bosonizations of Nichols algebras of diagonal type*, J. Alg. **323** (2010), 2130–218
- [HS] I. Heckenberger and H.-J. Schneider, *Right coideal subalgebras of Nichols algebras and the Duflo order on the Weyl groupoid*. math.QA/0909.0293.
- [He] M. Helbig, *Lifting of Nichols algebras*. Sudwestdeutscher Verlag für Hochschulschriften, 2009. Available at <http://edoc.ub.uni-muenchen.de/10378>.
- [HeY] I. Heckenberger and H. Yamane, *A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem*, Math. Z. **259** (2008), 255–276.
- [I] K. Ito, *The classification of convex orders on affine root systems*, Commun. Algebra **29** (2001), 5605–5630.
- [Kac1] V. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math. **26** (1977), 8–96.
- [Kac2] V. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd Edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Kas] C. Kassel, *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics 155 (1995). New York, NY: Springer-Verlag.

- [Kh1] V. Kharchenko, *A quantum analog of the Poincare-Birkhoff-Witt theorem*, Alg. Log. **38**, (1999), 259–276.
- [Kh2] V. Kharchenko, *A combinatorial approach to the quantifications of Lie algebras*, Pac. J. Math. **203** (2002), 191–233.
- [Kh3] V. Kharchenko, *PBW-bases of coideal subalgebras and a freeness theorem*, Trans. Am. Math. Soc. **360** (2008), 5121–5143.
- [KhL] V. Kharchenko and A. Lara Sagahon, *Right coideal subalgebras in $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$* , J. Alg. **319**, (2008), 2571–2625.
- [KhoT] S. Khoroshkin and V. Tolstoy, *The Cartan-Weyl basis and the universal R-matrix for quantum Kac-Moody algebras and superalgebras*, Proc. of the Int. Workshop on Math. Physics. "Quantum Symmetries"(1993), 336–351.
- [Ji] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), pp. 63–69.
- [LaR] P. Lalonde and A. Ram, *Standard Lyndon bases of Lie algebras and enveloping algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **137**, (1995), 1821–1830.
- [Le] B. Leclerc, *Dual canonical bases, quantum shuffles and q-characters*, Math. Z. **246** (2004), 691–732.
- [Lo] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*. Encyclopedia Math. Appl. **17** , Addison-Wesley, 1983.
- [Lu] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser (1993).
- [M1] A. Masuoka, *Cleft extensions for a Hopf algebra generated by a nearly primitive element*, Commun. Algebra **22** (1994), 4537–4559.
- [M2] A. Masuoka, *Abelian and non-abelian second cohomologies of quantized enveloping algebras*, J. Alg. **320** (2008), 1–47.
- [Mo] S. Montgomery, *Hopf algebras and their action on rings*, CBMS Regional Conference Series **82** (1993).
- [N] D. Naidu, *Categorical Morita Equivalence for Group-Theoretical Categories*, Commun. Algebra **35**, Issue 11 (2007), 3544–3565.
- [Ni] D. Nikshych, *Non-group-theoretical semisimple Hopf algebras from group actions on fusion categories*. Sel. Math. **14**, no. 1 (2008), 145–161.
- [P] P. Papi, *A characterization of a special ordering in a root system*, Proc. Am. Math. Soc. **120** (1994), 661–665.
- [Po] B. Pogorelsky, *Right coideal subalgebras of the quantum Borel algebra of type G_2* . J. Alg. **322** (2009), 2335–2354.
- [R1] M. Rosso, *Quantum groups and quantum shuffles*, Invent. Math. **133** (1998), 399–416.

- [R2] M. Rosso, *Lyndon words and Universal R-matrices*, talk at MSRI, October 26, 1999, available at <http://www.msri.org>; *Lyndon basis and the multiplicative formula for R-matrices*, preprint (2003).
- [S] P. Schauenburg, *Hopf Bigalois extensions*. Commun. Algebra **24** (1996) 3797–3825.
- [S2] P. Schauenburg, *A quasi-Hopf algebra freeness theorem*. Proc. Am. Math. Soc. **132** no.4 (2004), 965–972.
- [Sch] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf algebras*. Trabajos de Matemática 31/95 (FaMAF, 1995).
- [Se] V. Serganova, *On generalizations of root systems*. Commun. Algebra **24** (1996), 4281–4299.
- [Sh] A.I. Shirshov, *On bases for free Lie algebra*, Alg. Log. **1**, no. 1, 14–19 (1962).
- [Sw] M. Sweedler, *Hopf algebras*. Benjamin, New York, 1969.
- [T] D. Tambara, *Invariants and semi-direct products for finite group actions on tensor categories*, J. Math. Soc. Japan **53**, no. 2 (2001), 429–456.
- [U] S. Ufer, *PBW bases for a class of braided Hopf algebras*, J. Alg. **280** (2004) 84–119.
- [Y] H. Yamane, *Quantized enveloping algebras associated to simple Lie superalgebras and their universal R-matrices* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), 15–87.
- [Z] D. Zhelobenko, *Principal structures and methods of representation theory*. AMS, Providence, RI, 2006.

Índice alfabético

- álgebra, 1
 - cuasi-Hopf, 134
 - de Hopf, 5
 - de Hopf en una categoría trenzada, 12
 - de Nichols, 12
 - de Taft, 5
 - en una categoría monoidal, 11
- antípoda, 5, 134
- asociador, 133
- base PBW, 18
- bi-ideal, 4
- biálgebra, 4
 - en una categoría trenzada, 12
- bosonización, 14
- categoría
 - acción de un grupo en una, 136
 - finita, 9
 - localmente finita, 8
 - monoidal, 6
 - monoidal rígida, 8
 - objeto dual en una, 7
 - tensorial, 8
 - tensorial punteada, 135
 - trenzada, 9
- centro de una categoría monoidal, 9
- coálgebra, 2
 - cosemisimple, 4
 - en una categoría monoidal, 11
 - punteada, 4
 - simple, 4
- coacción, 3
- cociclo, 17
 - deformación por, 17
- coideal, 3
 - a izquierda, 3
- coinvariantes, 6
 - subálgebra de, 6
- comódulo, 3
- comultiplicación, 2
- coproducto, 2
- corchete trenzado, 19
- corradical, 4
- counidad, 2
- cuasi-biálgebra, 133
- de-equivariantización, 136
- descomposición
 - de Lyndon, 18
 - de Shirshov, 19
- diagrama de Dynkin generalizado, 22
- elemento
 - casi-primitivo, 4
 - primitivo, 4
 - tipo grupo, 4
- equivariantización, 136
- espacios vectoriales trenzados, 10
 - de tipo Cartan, 54
 - de tipo diagonal, 10
 - de tipo estándar, 54
 - de tipo grupo, 10
 - de tipo súper, 71
- esquema de Cartan, 35
- filtración
 - corradical, 4
 - de álgebras de Hopf, 15
 - de coálgebras, 4
- funtor
 - cuasi-tensorial, 8
 - de cuasi-fibra, 9
 - de fibra, 9
 - monoidal, 7
 - tensorial, 8
- grupoide
 - conexo, 36

- de Cartan, 36
 - longitud de un elemento, 36
- hiperletra, 19
- hiperpalabra, 19
- ideal de aumento, 5
- ideal de Hopf, 5
- método del Levante, 15
- módulo de Yetter-Drinfeld, 10
- morfismo
 - de álgebras de Hopf, 5
 - de coálgebras, 3
 - de comódulos, 3
- número q-combinatorio, 12
- objeto invertible, 135
- orden
 - convexo, 37
 - de Duflo, 40
 - deg-lex, 20
 - fuertemente convexo, 37
 - sub-convexo, 37
- palabra de Lyndon, 18
- producto
 - de convolución, 4
- raíz
 - positiva, 36
 - real, 36
- serie de Hilbert, 41
- sistema de raíces, 36
 - de tipo súper, 70
 - finito, 36
- soporte de una raíz, 36
- Sweedler
 - notación sigma de, 2
- torcimiento, 134
 - equivalencia por, 134
- vértice de Cartan, 84

