Curvas Algebraicas

Práctica 1 – Primer Cuatrimestre de 2018

Nota: En esta práctica la palabra anillo significará anillo conmutativo con identidad $1 \neq 0$, y todo morfismo de anillos $f : A \to B$ manda el 1_A en el 1_B.

Ejercicio 1.

i) Si $n \in \mathbb{N}$ probar que existe un anillo de caraterística n.

ii) Probar que A es un dominio íntegro si y sólo si su característica es 0 o un número primo.

iii) Si A es un dominio íntegro, probar que $A \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A)$, y además $\mathrm{Frac}(A)$ es un cuerpo.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo, y $p(x, y) \in K[x, y]$ un polinomio irreducible. Probar que la curva $\mathcal{C} : P(x, y) = 0 \subset \mathbb{A}^2$ es irreducible o todas sus componentes irreducibles son conjugadas. En particular, $\mathcal{C}$ no contiene ninguna curva propia definida sobre K.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$ una cúbica irreducible (o sea los ceros de un polinomio cúbico en dos variables).

i) Probar que $\mathcal{C}$ tiene a lo sumo un único punto singular.

ii) Probar qus si $P \in \mathcal{C}$ es un punto singular, y L es una recta que pasa por P, entonces el orden de contacto de L y $\mathcal{C}$ en P es 2 ó 3.

Ejercicio 4. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos cónicas, y P un punto no singular de ambas. ¿Cuál es el orden de contacto máximo de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en P? (dar un ejemplo)

Ejercicio 5. Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín, y P, Q puntos en X. Probar que existe $f \in K(X)$ tal que $f(P) = 0$ y $f(Q) = 1$.

Ejercicio 6. Sea k un cuerpo de característica distinta de 2, y sea $X \subset \mathbb{A}^3$ el conjunto algebraico dado por $I = \langle x^2 + y^2 + z^2, x^2 - y^2 - z^2 + 1\rangle$. Encontrar las componentes irreducibles de X.

Ejercicio 7. Probar que un conjunto algebraico afín $U \subset \mathbb{A}^n$ es irreducible si y sólo si su clausura proyectiva $\overline{U}$ lo es.

Ejercicio 8. Sean $A, B \in K$, de característica distinta de 2. Determinar los valores del par (A, B) para los cuales las siguientes variedades V_I son singulares:

i) $I = \langle y^2 z + Axyz + Byz^2 - x^3\rangle$.

ii) $I = \langle y^2 z - x^3 - Axz^2 - Bz^3\rangle$.

Notar que estas superficies parametrizadas son no singulares en un abierto de $\mathbb{A}^2$.