Curvas Algebraicas

Práctica 2 – Primer Cuatrimestre de 2018

Nota: En esta práctica la palabra anillo significará anillo conmutativo con identidad $1 \neq 0$, y todo morfismo de anillos $f : A \to B$ manda el 1_A en el 1_B.

Ejercicio 1. Sea V la variedad

$$V : Y^2Z = X^3,$$

y sea ϕ la función racional $\phi : \mathbb{P}^1 \to V$,

$$\phi([S,T]) = [S^2T, S^3, T^3]$$

.

i) Probar que ϕ es un morfismo.

ii) Encontrar una función racional $\psi : V \to \mathbb{P}^1$ tal que $\phi \circ \psi$ y $\psi \circ \phi$ son la identidad (donde estén definidas).

iii) ¿Es ϕ un isomorfismo?

Ejercicio 2. Probar que la cubica cuspidal $y^2 = x^3$ en $\mathbb{A}^2$ es birracional, o sea es birracional equivalente a $\mathbb{P}^1$.

Ejercicio 3. Probar que la superficie cuádrica $Q : xy = zw$ en $\mathbb{P}^3$ es birracional a $\mathbb{P}^2$. ¿Son isomorfas? (hint: encontrar dos rectas en Q que no se corten).

Ejercicio 4. Sea Y una curva no singular, birracionalmente equivalente a $\mathbb{P}^1$, pero no isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

1. Probar que Y es isomorfa a un abierto de $\mathbb{A}^1$.
2. Probar que Y es afin.
3. Probar que $\overline{K}[Y]$ es un dominio de factorización única.

Ejercicio 5. Sea $E \subset \mathbb{P}62$ la curva $E : y^2z = x^3 - xz^2$. Supongamos que la cartacterística de K no es 2.

- Probar que E es no singular, con lo cual $\overline{K}[E] = \overline{K}[x,y]/\langle y^2 - x^3 - x\rangle$ es íntegramente cerrado sobre $\overline{K}$.
- Sea $\overline{K}[x] \subset \overline{K}[E]$ el subanillo generado por la función x en E. Probar que $\overline{K}[E]$ es la clausura entera de $\overline{K}[x]$ en $\overline{K}(E)$.
- Probar que existe un automorfismo $\sigma : E \to E$ que manda y en $-y$ y fija x. Definimos la norma, $\mathrm{Nm} : \overline{K}(E) \to \overline{K}(x)$ como $\mathrm{Nm}(f) = f \cdot \sigma(f)$. Probar que si $f \in \overline{K}[E]$ entonces $\mathrm{Nm}(f) \in \overline{K}[x]$, que $\mathrm{Nm}(1) = 1$ y $\mathrm{Nm}(fg) = \mathrm{Nm}(f)\,\mathrm{Nm}(g)$.

- Utilizando la norma, probar que las unidades de $\overline{K}[E]$ son exactamente los elementos no nulos de k. Probar también que x e y son irreducibles en $\overline{K}[E]$ y que $\overline{K}[E]$ no es un DFU.
- Deducir del ejercicio anterior, que E no es una curva racional.

Ejercicio 6. Sea $\mathcal{C}$ una curva suave. El *soporte* de un divisor $\mathcal{D} = \sum_P n_P(P)$ es el conjunto de puntos para los cuales n_P es no nulo. Sea $f \in \overline{K}(\mathcal{C})^\times$ una función tal que $div(f)$ y $\mathcal{D}$ tienen soporte disjunto. Luego tiene sentido definir:

$$f(\mathcal{D}) := \prod_{P \in C} f(P)^{n_P} \in \overline{K}^\times.$$

Sea $\phi : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ una función no constante de curvas suaves. Probar que las siguientes dos identidades valen en el sentido de que si ambos lados están definidos, entonces coinciden.

1. $f(\phi^*\mathcal{D}) = (\phi_* f)(\mathcal{D})$ para toda $f \in \overline{K}(\mathcal{C})1)^*$ y todo $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}(\mathcal{C}_2)$.
2. $f(\phi_*\mathcal{D}) = (\phi^* f)(\mathcal{D})$ para toda $f \in \overline{K}(\mathcal{C})1)^*$ y todo $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}(\mathcal{C}_2)$.

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{C}$ una curva y $f, g \in \overline{K}(\mathcal{C})^\times$ funciones cuyo soporte es disjunto. Probar la ley de reciprodicad de Weil

$$f(\mathrm{div}(g)) = g(\mathrm{div}(f)),$$

siguiendo los siguientes pasos:

- Verificarla a mano en el caso $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$.
- Probarlo para una curva $\mathcal{C}$ arbitraria usando la función $g : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^1$ y el ejercicio anterior para reducirlo al caso anterior.

Ejercicio 8. Consideremos los automorfismos de $\mathbb{P}^1$.

- Probar que si $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\overline{K})$, entonces la función $\phi_M([x, y]) = [ax + by, cx + dy]$ es un automorphismo de $\mathbb{P}^1$.
- Probar que dos matrices dan el mismo automorfismo si y sólo si difieren por una matriz escalar. Luego $\mathrm{PGL}_2(\overline{K}) := \mathrm{GL}_2(\overline{K})/\overline{K}^\times$ actúa en $\mathbb{P}^1$.
- Probar que si $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ es un automorfismo, entonces existe una matrix M tal que $\phi = \phi_M$. (hint: mirar los divisor $\phi^*(0)$ y $\phi^*(\infty)$)

Ejercicio 9. Sea $\mathcal{C}_1 \subset \mathbb{P}^3$ la curva dada por los ceros del ideal $\langle x^2 + y^2 - z^2, -3x^3 + 5yx^2 + 2xy^2 - 7xyz + 3xz^2 - w^3\rangle$, y $\mathcal{C}_2 \subset \mathbb{P}^2$ el círculo unidad, o sea $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = z^2$. Sea $\phi : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ la función dada por $\phi([x, y, z, w]) = [x, y, z]$.

1. Probar que la curva $\mathcal{C}_1$ es no singular.
2. Probar que ϕ es no constante y calcular su grado.
3. Calcular los puntos ramificados de ϕ y el grado de ramificación de ellos.