Estructuras Algebraicas II

Práctica 3 - Segundo cuatrimestre de 2017

Extensiones normales, separables e inseparables

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.

ii) Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.

iii) Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición un polinomio $f \in K[X]$, entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

i) $X^p - a$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.

ii) $X^3 - 10$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

iii) $X^4 - 5$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.

iv) $X^3 - 2$, sobre $\mathbb{F}_7$.

v) $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.

vi) $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $X^3 + X^2 + X + 2$ y $X^3 + 2X + 1$ sobre $\mathbb{F}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{F}_3$.

Ejercicio 4. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_5$. ¿ Son isomorfos entre ellos?

Ejercicio 5. Sea E el cuerpo de descomposición de un $f \in K[X]$, con $\mathrm{gr}(f) = n$. Probar que $[E : K] \mid n!$. Mostrar ejemplos donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.

Ejercicio 6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Toda extensión finita es normal.

ii) Toda extensión finita está contenida en una extensión finita normal.

iii) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.

iv) Todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.

v) Si L/K es algebraica, entonces todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.

vi) Si $K \subset F \subset L$ y L/K es normal, entonces todo morfismo $f : F \to \overline{K}$ es la restricción a F de un automorfismo de L.

Ejercicio 7. Determinar cuales de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso, calcular $\mathrm{Gal}(E/K)$ y $\mathrm{Hom}_K(E, \overline{K})$.

i) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]/\mathbb{Q}$.

ii) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]$.

iii) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$.

iv) $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.

Ejercicio 8. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $X^4 + 3X^2 + 1$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 9. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 10.

i) Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es normal pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ no lo es.

ii) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

Ejercicio 11. Sea H/K una extensión algebraica y sean E/K y F/K subextensiones normales. Probar que EF/K y $(E \cap F)/K$ son normales.

Ejercicio 12. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ vale que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

Ejercicio 13. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_7$.

Ejercicio 14. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $m(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \ : \ \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 15. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E \ : \ x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \{x \in E \ : \ x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Probar que:

i) E_s y E_i son subcuerpos de E.

ii) E es puramente inseparable sobre E_s.

iii) $E_s \cap E_i = K$.

iv) Si E/K es normal, entonces E/E_i es separable y $E = E_s E_i$.

Ejercicio 16. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$ con t trascendente sobre $\mathbb{F}_p$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Probar que el grado de inseparabilidad de $K[\alpha]/K$ es p^m donde $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \ : \ p^k | r\}$.

Ejercicio 17. Sea K un cuerpo de característica p. Dentro de una clausura algebraica $\overline{K}$ de K, definimos $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in \mathrm{End}_K(\overline{K})\}$. Probar que:

i) Si $p = 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = K$.

ii) Si $p > 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Deducir que K es perfecto si y solo si $K^{p^{-\infty}} = K$.

iii) Probar que si K no es perfecto, entonces $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$.

Ejercicio 18. Sea K un cuerpo y E/K una extensión algebraica.

i) Probar que si K es perfecto, entonces E es perfecto.

ii) Probar que si E es perfecto y E/K es separable, entonces K es perfecto.

iii) Probar que si E/K es finita y E es perfecto, entonces E/K es separable.