Estructuras Algebraicas II

Práctica 4 – Segundo Cuatrimestre de 2017

Teorema de Galois y aplicaciones

Ejercicio 1. Para los siguientes polinomios hallar el grupo de Galois de su cuerpo de descomposición:

i)$X^3 - 2$	ii)$(X^2 - 2)(X^2 - 3)$
iii)$X^4 - 2$	iv)$(X^4 + 1)(X^2 + 5)$

Ejercicio 2. ¿Es cierto que si E/K es una extensión Galois de grado n, entonces el grupo $\mathrm{Gal}(E/K)$ contiene elementos de orden n?

Ejercicio 3. Sea $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible de grado 3. Probar que si su cuerpo de descomposición es de grado 3, entonces todas las raíces de $p(x)$ son reales.

Ejercicio 4. Probar que si $p(x) \in K[x]$ es irreducible, entonces el grupo de Galois de su cuerpo de descomposición actúa transitivamente en sus raíces. ¿Como se relaciona esto con el Ejercicio 2?

Ejercicio 5. Sea $E = \mathbb{C}(X)$ y sean $f, g \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{C})$ dados por $f(X) = X^{-1}$ y $g(X) = \xi_n X$, donde $\xi_n \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Probar que:

i) $f^2 = g^n = \mathrm{id}_E$ y $fg = g^{-1}f$.

ii) El subgrupo H generado por f y g es isomorfo al grupo diedral de $2n$ elementos D_n.

iii) $E^H = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.

Ejercicio 6. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2}}]$. Probar que $E/\mathbb{Q}$ es normal, calcular su grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ y determinar todas sus subextensiones.

Ejercicio 7. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 8. Determinar todas las subextensiones cuadráticas del cuerpo de descomposición de $X^4 - 2X^2 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 9. Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión Galois. Si α es un generador de la extensión, probar que $m_\alpha(x)$ tiene todas sus raíces reales o todas complejas no reales.

Ejercicio 10. Sea $n > 2$ un número natural. Probar que la extensión $\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{Q}(\xi_n)$ tal que $[\mathbb{Q}(\xi_n) : F] = 2$, y F es una extensión Galois

sobre $\mathbb{Q}$ contenida en $\mathbb{R}$. Este es un ejemplo de las llamadas *extensiones CM* (de complex multiplication).

Ejercicio 11. Sea E/K una extensión Galois tal que $\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (n sumandos). Probar que existen $a_1, \ldots, a_n \in E$ tales que $E = K[a_1, \ldots, a_n]$ y $a_i^2 \in K \; \forall \, i$.

Ejercicio 12. Consideremos la extensión $\mathbb{Q}[\xi_{11}]/\mathbb{Q}$.

i) Probar que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{11})]$ es la única subextensión de grado 5.

ii) Probar que hay una única subextensión de grado 2. Determinarla.

Ejercicio 13. Sea E/K una extensión Galois de grado 15. Probar que E/K tiene solo dos subextensiones propias. Calcular sus grados y ver que dichas subextensiones son normales.

Ejercicio 14. Sea E/K una extensión Galois de grado 45. Probar que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K, entonces es normal.

Ejercicio 15. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión Galois de grado $p^n s$ con $n, s \in \mathbb{N}$ y $p \nmid s$. Probar que:

i) E/K tiene subextensiones de grado s y todas ellas son isomorfas.

ii) Si $p > s$ entonces hay una única subextensión de grado s, que además, resulta ser normal.

Ejercicio 16. Sea L/K una extensión y sean E/K y F/K dos subextensiones algebraicas. Probar que EF/K es abeliana si y solo si E/K y F/K son abelianas.

Ejercicio 17. Sea E/K una extensión algebraica. Probar que existe una subextensión L/K abeliana maximal (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas). ¿Cual es en el caso en que E es el cuerpo de descomposición de $X^4 + 2$ sobre $\mathbb{Q}$?

Ejercicio 18. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado mayor o igual a 2 y con una única raíz real. Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Probar que $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.

Ejercicio 19. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois de grado 4 tal que $\sqrt{-3} \in K$. Caracterizar la clase de isomorfismo de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Ejercicio 20. Para cada caso, calcular el grupo de Galois de los cuerpos de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$, y calcular todas las subextensiones intermedias.

i) $f = X^4 + 7$.

ii) $f = X^6 - 3$.

Un lindo resultado para calcular el grupo de Galois de polinomios irreducibles es el siguiente: sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irreducible. Dado un primo q que no divide al coeficiente principal de $p(x)$, podemos mirar la factorización de $p(x)$ módulo q. Digamos que se factoriza como polinomios de grado $m_1, \ldots, m_r$. Entonces el grupo de Galois del cuerpo de descomposicón de $p(x)$ contiene ciclos de tipo $m_1, \ldots, m_r$. La demostración precisa un poco de Teoría de Números que probablemente no lleguemos a ver en el curso.

Ejemplo: el grupo de Galois de $x^5 + x^2 + 1$ es S_5. Sugerencia: mirar la factorización módulo 53 y módulo 29.