Estructuras Algebraicas II

Práctica 5 – Segundo Cuatrimestre de 2017

Norma y traza. Extensiones resolubles.

Ejercicio 1.

1. Calcular la norma y la traza de $\sqrt[3]{2}$ en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$.
2. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular la norma y la traza de ξ_p y de $1 - \xi_p$ en $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$.
3. Sea $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados y sea $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] - \mathbb{Q}$. Probar que $m(\alpha, \mathbb{Q}) = X^2 - \mathrm{Tr}(\alpha)X + \mathrm{N}(\alpha)$.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea t trascendente sobre K. Calcular la norma y la traza en $K(t)/K(t^p)$.

Ejercicio 3. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X]$ irreducible de grado n. Sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz. Probar que para todo $c \in K$ se tiene

$$N_{K[\alpha]/K}(\alpha - c) = (-1)^n f(c).$$

Ejercicio 4. Probar que:

1. Todo grupo abeliano es soluble.
2. Todo p-grupo finito es soluble (recordar que G es un p-grupo si todo elemento de G tiene orden una potencia de p).
3. D_n es soluble.
4. El grupo de cuaterniones $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, con regla de multiplicación $i \cdot j = k = -j \cdot i$ es soluble.

Ejercicio 5. Mostrar explícitamente que las siguientes extensiones son resolubles por radicales:

1. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, i + \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$
2. $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $f = (X^4 - 2)(X^2 - 5)$

Ejercicio 6. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado primo $\geqslant 5$. Suponer que f tiene exactamente dos raices no reales. Probar que f no es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 7. Probar que ninguno de los siguientes polinomios es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$.

1. $X^5 - 14X + 7$
2. $X^5 - 7X^2 + 7$

3. $X^7 - 10X^5 + 15X + 5$

Ejercicio 8. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ irreducible de grado primo $p \geqslant 5$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ las raices de f y sea $N = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_p]$ el cuerpo de descomposición de f sobre K. Probar que f es resoluble por radicales sobre K si y solo si $N = K[\alpha_i, \alpha_j]$ para todos $1 \leqslant i < j \leqslant p$.

Ejercicio 9. Sea $f = X^5 - bX - a$ un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Sea α una raíz de f y sea $E = \mathbb{Q}(\alpha)$. Si se sabe que $N_{E/\mathbb{Q}}(\alpha + 1) = -77$ y $N_{E/\mathbb{Q}}(\alpha - 1) = 81$, decidir si f es resoluble por radicales.

Ejercicio 10. (*) Calcular el grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{3}+3)}\right]$.