3-variedades hiperbólicas aritméticas: 2
Grupos Kleineanos Aritméticos

Benjamin Linowitz

Oberlin College

Espacio hiperbólico tridimensional

Definimos el espacio hiperbólico de dimensión 3 usando el modelo del semiespacio superior:

$$\mathbf{H}^3 = \{(z, t) : z \in \mathbb{C}, t > 0\}$$

con la métrica

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt}{t^2}.$$

$\mathbf{H}^3$ es la única variedad Riemanniana conexa, simplemente conexa de dimensión 3 con curvatura seccional constante -1.

El grupo $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$ de isometrías del espacio hiperbólico de dimensión 3 es isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Los elementos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ inducen funciones biholomorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ (la esfera de Riemann) dadas por transformaciones de Moebius:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right).$$

Estas transformaciones fraccionarias lineales de $\hat{\mathbb{C}}$ se extienden a $\mathbf{H}^3$ vía la extensión de Poincaré.

(La extensión está dada por una fórmula muy complicada.)

Definición

Un **grupo Kleineano** es un subgrupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico $\mathbf{H}^3$ que preservan orientación (i.e., de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$).

Si bien hay varias razones excelentes para estudiar grupos Kleineanos, nuestro interés en ellos se debe principalmente a lo siguiente:

Teorema

Si M es una 3-variedad hiperbólica orientable entonces M es isométrica a $\mathbf{H}^3/\Gamma$ donde Γ es un grupo Kleineano libre de torsión.

Conmensurabilidad

Definición

Sean Γ_1, Γ_2 subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

- Decimos que Γ_1 y Γ_2 son **directamente conmensurables** si $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ tiene índice finito en Γ_1 y Γ_2. Decimos que Γ_1 y Γ_2 son **conmensurables en un sentido amplio** si Γ_1 y un conjugado de Γ_2 son directamente conmensurables.
- Sean M_1, M_2 3-variedades hiperbólicas. Decimos que M_1 y M_2 son **conmensurables** si tienen un cubrimiento finito hiperbólico en común.

Notar que en la definición de conmensurabilidad, el cubrimiento común será considerado único salvo isometrías. En este caso, las dos variedades serán conmensurables si y sólo si sus grupos fundamentales son conmensurables en el sentido amplio.

Grupos aritméticos Kleineanos

Sea k un cuerpo de números con anillo de enteros $\mathcal{O}_k$ y con un único lugar complejo ν.

Sea A un álgebra de cuaterniones sobre k que es ramificado en todos los lugares reales de k.

Un orden $\mathcal{O}$ de A significará siempre que $\mathcal{O}$ es un $\mathcal{O}_k$-orden de A.

Denotaremos por $\mathcal{O}^1$ el subgrupo multiplicativo de $\mathcal{O}^*$ generado por elementos que tienen norma reducida igual a 1.

Finalmente, recordamos que $\mathrm{Ram}(A)$ (respectivamente $\mathrm{Ram}_f(A)$) denota al conjunto de todos los lugares de k (respectivamente finitos) que ramifican en A.

En este caso tenemos un isomorfismo

$$A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H}^{[k:\mathbb{Q}]-2} \times \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

Sea $\psi : A \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ la composición del embedding natural $A \hookrightarrow A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ con la proyección de $\mathbb{H}^{[k:\mathbb{Q}]-2} \times \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

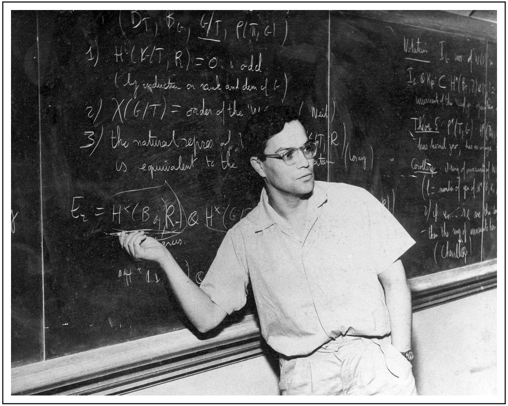
Teorema (Borel)

Sea $\mathcal{O}$ un orden maximal de A y $\Gamma_{\mathcal{O}} = P\psi(\mathcal{O}^1) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

1. *$\Gamma_{\mathcal{O}}$ es un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.*
2. *El volumen de $\mathbf{H}^3/\Gamma_{\mathcal{O}}$ está dado por*

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^3/\Gamma_{\mathcal{O}}) = \frac{d_k^{3/2}\zeta_k(2)}{(4\pi^2)^{[k:\mathbb{Q}]-1}} \cdot \left(\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ram}_f(A)} (N(\mathfrak{p}) - 1) \right),$$

donde d_k es el valor absoluto del discriminante de k y $\zeta_k(2)$ es la función zeta de Dedekind de k evaluada en $s = 2$.



Armand Borel

Ahora podemos dar la definición de un grupo Kleineano aritmético.

Definición

Sea k un cuerpo de números con un único lugar complejo, sea A un álgebra de cuaterniones sobre k que ramifica en todos los lugares reales de k y sea $\mathcal{O}$ un orden maximal de A. Un subgrupo de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es un **grupo Kleineano aritmético** si es conmensurable con $\Gamma_{\mathcal{O}}$ para alguna tripla $(k, A, \mathcal{O})$.

De ahora en adelante, nos referiremos a los grupos de la forma $\Gamma_{\mathcal{O}}$ como **grupos Kleineanos aritméticos del tipo más simple**.

Recordar que el Teorema de Wedderburn nos decía que si un álgebra de cuaterniones sobre k no es isomorfo a $\mathrm{M}_2(k)$ entonces es un álgebra de división.

Entonces si A es ramificada en todos los lugares reales de k, debe ser que A no es un álgebra de división si y sólo si k no tiene lugares reales.

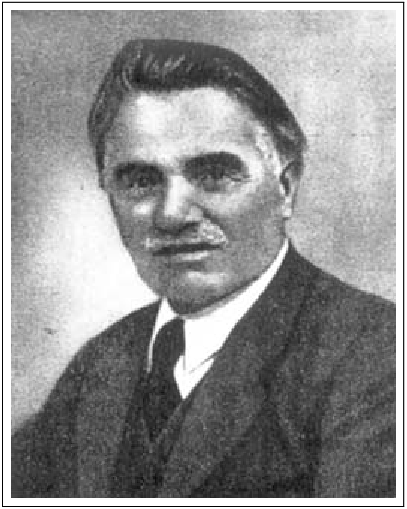
Esto significa que $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ para algún entero positivo d libre de cuadrados y que $A \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$.

Ejemplo

Considerar un cuerpo cuadrático imaginario $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ con anillo de enteros $\mathcal{O}_d$. Hemos visto que $\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_d)$ es un orden maximal en el álgebra de cuaterniones $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$. El grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_d)$ es llamado un **grupo de Bianchi**. Todo grupo de Bianchi contiene la isometría $z \mapsto z + 1$ de $\hat{\mathbb{C}}$ y por lo tanto es no compacto. De acuerdo al Teorema de Borel, $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_3)$ es el grupo de Bianchi de covolumen más chico. Usando MAGMA es fácil calcular los covolúmenes de los grupos de Bianchi.

Cuadro: Volúmenes de pequeñas orbifolds de Bianchi

d	$\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^3/\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_d))$
1	0.30532186472574...
2	1.00384100334120...
3	0.16915693440160...
5	4.20396925947605...
6	5.18217289781959...
7	0.88891492781635...
10	9.81811844389802...
11	1.38260830790264...
13	13.9979614019778...
14	20.3513407500735...



Luigi Bianchi

Hemos visto que un grupo Kleineano aritmético del tipo más simple es no cocompacto si y solo si es un grupo de Bianchi.

De hecho, es un resultado conocido que el número de cúspides del grupo de Bianchi asociado a $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ es igual al número de clases de ideales de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

Por eso se sigue del teorema de Stark-Heegner que hay exactamente 9 grupos de Bianchi con solo una cúspide.

Teorema

Sea $M = \mathbf{H}^3/\Gamma$ *una 3-variedad hiperbólica aritmética y supongamos que* Γ *es conmensurable con* $\Gamma_{\mathcal{O}}$*, donde* $\mathcal{O}$ *es un orden maximal en un álgebra de cuaterniones* A *sobre un cuerpo de números* k*. Son equivalentes:*

1. M *es no compacta.*
2. k *es un cuerpo cuadrático imaginario y* $A \cong \mathrm{M}_2(k)$*.*
3. Γ *es conmensurable en el sentido amplio con un grupo de Bianchi.*

Demostración.

Si Γ no es cocompacto entonces tampoco es $\Gamma_{\mathcal{O}}$. Luego $\Gamma_{\mathcal{O}}$ contiene un elemento parabólico γ.

Como el elemento $\gamma - \mathrm{Id}$ no es inversible podríamos concluir que A no es un álgebra de división.

Por el Teorema de Wedderburn, $A \cong M_2(k)$.

Ya vimos que un orden maximal de $\mathrm{M}_2(k)$ será un grupo Kleineano aritmético sólo si k es cuadrático imaginario.

Luego (1) implica (2).

Que (2) implica (3) sigue de la definición de un grupo de Bianchi y el hecho que los órdenes maximales en la misma álgebra de cuaterniones siempre nos darán grupos Kleineanos aritméticos que son conmensurables.

Para probar que (3) implica (1), notar que todos los grupos de Bianchi contienen elementos parabólicos, por lo tanto Γ también lo hará si es conmensurable en un sentido amplio a un grupo de Bianchi. $\square$

Como consecuencia del Teorema obtenemos lo siguiente.

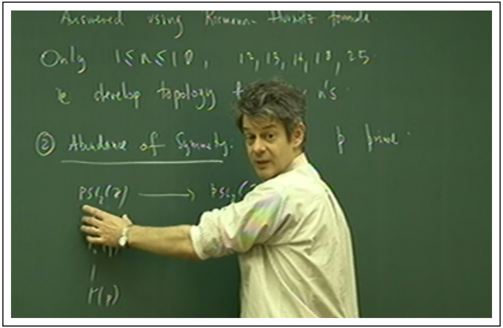
Corolario

Sea $M = \mathbf{H}^3/\Gamma$ una 3-variedad hiperbólica aritmética y supongamos que Γ es conmensurable con $\Gamma_{\mathcal{O}}$, donde $\mathcal{O}$ es un orden maximal en un álgebra de cuaterniones A sobre un cuerpo de números k. La variedad M es compacta si y sólo si A es un álgebra de división.

En particular, M es no compacta si y sólo si su grupo fundamental es conmensurable con un grupo de Bianchi.

Teorema (Reid)

Sea k (resp. k') un cuerpo de números con un único lugar complejo, sea A (resp. A') un álgebra de cuaterniones sobre k (resp. k') que ramifica en todos los lugares reales de k (resp. k') y sea $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}'$) un orden maximal de A (resp. A'). El grupo $\Gamma_{\mathcal{O}}$ es conmensurable con $\Gamma_{\mathcal{O}'}$ si y sólo si $k \cong k'$ y $A \cong A'$.



Alan Reid

Hemos visto que hay infinitas clases de isomorfismos de álgebras de cuaterniones de división sobre todo cuerpo de números.

Corolario

Hay un número infinito de clases de conmensurabilidad de 3-variedades hiperbólicas aritméticas compactas.

Teorema

Sea Γ *un grupo Kleineano aritmético del tipo más simple que es tambien cocompacto. Entonces el covolumen de* Γ *es mayor que* $0{,}888\ldots$. *Este covolumen se logra por el grupo* $\Gamma_{\mathcal{O}}$ *donde* $\mathcal{O}$ *es un orden maximal en el álgebra de cuaterniones sobre* $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ *ramificada en los dos ideales primos de norma* 2.

Demostración.

Se sigue del teorema de Borel que $\Gamma_{\mathcal{O}}$ tiene covolumen $0{,}888\ldots$.

Por eso es suficiente mostrar que si un grupo $\Gamma_{\mathcal{O}}$ está asociado con un álgebra de cuaterniones A sobre un cuerpo de números k distinto que $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ entonces $\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^3/\Gamma_{\mathcal{O}}) > 0{,}889$.

Es suficiente porque sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, el álgebra de cuaterniones que minimiza el covolumen de $\Gamma_{\mathcal{O}}$ es claramente lo que es ramificada en sólo los dos ideales primos de norma 2.

Primero mostraremos que si $\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^3/\Gamma_{\mathcal{O}}) \leq 0{,}889$ entonces $[k : \mathbb{Q}] = 2$.

Como

$$\zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}},$$

nos vemos que $\zeta_k(2) \geq 1$.

También, todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$ satisface $N(\mathfrak{p}) \geq 2$. Se sigue que

$$\left(\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ram}_f(A)} (N(\mathfrak{p}) - 1) \right) \geq 1.$$

De acuerdo al Teorema de Borel, tenemos $\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^3/\Gamma_{\mathcal{O}}) \geq \frac{d_k^{3/2}}{4\pi^2}$.

Estamos asumiendo que $0{,}889 \geq \mathrm{Vol}(\mathbf{H}^3/\Gamma_{\mathcal{O}})$, entonces $0{,}889 \geq \frac{d_k^{3/2}}{4\pi^2}$ y

$$d_k \leq 10{,}720.$$

Solamente hay cuatro cuerpos de números teniendo un único lugar complejo y valor absoluto del discriminante menor que 11:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \mathbb{Q}(\sqrt{-7}).$$

Sobre cada uno de estos cuerpos debemos determinar los dos ideales de la norma más pequeña y calcular el volumen del $\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^3/\Gamma_{\mathcal{O}})$ donde $\mathcal{O}$ es un orden maximal en el álgebra de cuaterniones ramificada en esos dos ideales.

Ahora el teorema se sigue del próximo cuadro:

k	$N(\mathfrak{p}_1), N(\mathfrak{p}_3)$	$\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^3/\Gamma_{\mathcal{O}})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	2,5	1,221287458902 . . .
$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	2,3	2,007682006682 . . .
$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	3,4	1,014941606409 . . .
$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	2,2	0,888914927816 . . .

$\square$

Ejercicio

En "*The smallest arithmetic hyperbolic three-orbifold*", Chinburg y Friedman (1986) dieron la fórmula para el covolumen de un grupo Kleineano aritmético maximal. (Por definición, todo grupo Kleineano aritmético es contenido en un grupo Kleineano aritmético maximal.)

Usar esta fórmula para determinar la 3-variedad hiperbólica aritmética con volumen mínimo y que también se define sobre un cuerpo cuadrático imaginario.

Ted Chinburg (UPenn)

Eduardo Friedman (U. de Chile)

Notar que hemos considerado únicamente 3-variedades hiperbólicas, podemos construir 2-variedades hiperbólicas (i.e., superficies hiperbólicas) de casi la misma manera.

Recordar que el plano hiperbólico está dado por

$$\mathbf{H}^2 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$$

con la métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

$\mathbf{H}^2$ es la única variedad Riemanniana conexa, simplemente conexa de dimensión 2 con curvatura seccional constante -1.

El grupo $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$ de isometrías de $\mathbf{H}^2$ es isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Los elementos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ inducen isometrías dadas por transformaciones de Moebius, como en el caso de $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$.

Definición

Un **grupo Fuchsiano** es un subgrupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico $\mathbf{H}^2$ que preserva orientación (i.e., de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$).

Teorema

Si M es una superficie hiperbólica orientable entonces M es isométrica a $\mathbf{H}^2/\Gamma$ donde Γ es un grupo Fuchsiano libre de torsión.

Sea k un cuerpo de números totalmente real.

Sea A un álgebra de cuaterniones sobre k que se parte en precisamente un lugar real de k.

Teorema (Shimizu)

Sea $\mathcal{O}$ un orden maximal de A y $\Gamma_{\mathcal{O}} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

1. *$\Gamma_{\mathcal{O}}$ es un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.*
2. *El volumen de $\mathbf{H}^2/\Gamma_{\mathcal{O}}$ está dado por*

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^2/\Gamma_{\mathcal{O}}) = \frac{8\pi d_k^{3/2}\zeta_k(2)}{(4\pi^2)^{[k:\mathbb{Q}]}} \cdot \left(\prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ram}_f(A)} (N(\mathfrak{p})-1) \right).$$

Teorema

Sea $M = \mathbf{H}^2/\Gamma$ una superficie hiperbólica aritmética y supongamos que Γ es conmensurable con $\Gamma_{\mathcal{O}}$, donde $\mathcal{O}$ es un orden maximal en un álgebra de cuaterniones A sobre un cuerpo de números k. Son equivalentes:

1. *M es no compacta.*
2. *$k = \mathbb{Q}$ y $A \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$.*
3. *Γ es conmensurable con $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.*

Corolario

Si $\mathcal{O}$ es un orden maximal en un álgebra de cuaterniones de división entonces la superficie $M = \mathbf{H}^2/\Gamma_{\mathcal{O}}$ es compacta. En particular, hay un número infinito de clases de conmensurabilidad de superficies hyperbólicas aritméticas compactas.