CÁLCULO DE VARIACIONES Y EL TEOREMA DE BONNET

MARÍA LAURA BARBERIS †

Resumen. El objetivo de estas notas es presentar algunas nociones básicas que se utilizan en el estudio de superficies en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Aplicaremos el cálculo de variaciones, que es una herramienta muy útil en diversas áreas de la matemática y la física, para relacionar la geometría de una superficie con su topología. Demostraremos el teorema de Bonnet, que afirma que si S es una superficie completa con curvatura de Gauss acotada inferiormente por una constante positiva, entonces S es compacta.

1. Preliminares

El cálculo de variaciones es un método efectivo para encontrar soluciones a problemas de optimización en matemática, física y otras ciencias donde la matemática se aplica. El libro de J. Troutman [T] contiene una introducción a dicha teoría, cuyos orígenes se remontan a trabajos de Zenodoros (200-100 a.C.). Los problemas de cálculo de variaciones son de gran importancia en la actualidad, por ejemplo, diseñar la forma de un avión o un automóvil para que su resistencia al aire sea mínima, problemas de control, donde se trata de controlar un determinado sistema para obtener un rendimiento óptimo, problemas sobre la mejor estrategia en determinados juegos.

En estas notas aplicamos el cálculo de variaciones para demostrar un teorema clásico de geometría diferencial, el teorema de Bonnet (1851).

Comenzaremos dando varias definiciones que serán necesarias en lo sucesivo. Daremos un panorama general de la geometría diferencial de superficies y para esto enunciaremos algunos de los resultados más relevantes, omitiendo sus demostraciones. El lector interesado puede consultar los detalles en el libro de Do Carmo [DC].

1.1. **Curvas parametrizadas, curvas regulares y longitud de arco.** Una *curva parametrizada diferenciable* es una función diferenciable $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$, donde no excluímos el caso $a = -\infty$ o $b = \infty$. Para cada $t \in (a,b)$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y la diferenciabilidad de α equivale a la diferenciabilidad de $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$. El vector velocidad $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ se denomina *vector tangente* a α en t. La imagen de α, $\alpha(a,b) \subset \mathbb{R}^3$, se denomina *trayectoria* de α. No debemos confundir la curva con su trayectoria; la curva es una función mientras que su trayectoria es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

†FaMAF-CIEM, Univ. Nac. de Córdoba, Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba
Correo electrónico: barberis@mate.uncor.edu
Curso para estudiantes, Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, octubre de 2004.

Ejemplo 1. La función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\alpha(t) = (t, t^{2/3}, 0)$$

no es una curva parametrizada diferenciable. Por otro lado, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta(t) = (t^3, t^2, 0)$$

es una curva parametrizada diferenciable que describe la misma trayectoria que α, es decir, $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R})$. Observar que $\beta'(0) = (0, 0, 0)$.

Ejemplo 2. Considerar las siguientes curvas parametrizadas diferenciables:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \\ \beta(t) &= (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t), 0) \end{aligned}$$

para $t \in (-\epsilon, 2\pi + \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Ambas curvas describen la misma trayectoria, la circunferencia de radio 1 en el plano xy. Observar que $\beta'(t) = 2\alpha'(t)$.

Dada una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$, para cada $t \in (a, b)$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$, la recta $T_{\alpha(t)}$ que pasa por $\alpha(t)$ con dirección $\alpha'(t)$ se denomina *recta tangente* a α en t. Diremos que α es *regular* cuando $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Dados t, $t_0 \in (a, b)$, la *longitud de arco* de una curva regular α medida desde t_0 se define por:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\hat{t})|\, d\hat{t}, \tag{1}$$

donde

$$|\alpha'(\hat{t})| = \sqrt{(x'(\hat{t}))^2 + (y'(\hat{t}))^2 + (z'(\hat{t}))^2}$$

es la longitud del vector velocidad $\alpha'(\hat{t})$. Como α es regular, $s(t)$ es diferenciable y $s'(t) = |\alpha'(t)|$.

Puede ocurrir que el parámetro t sea la longitud de arco medida desde algún punto t_0 en (a, b), es decir, $s(t) = t - t_0$. En este caso, $1 = s'(t) = |\alpha'(t)|$, o sea que el vector velocidad tiene longitud constante igual a 1. Recíprocamente, si $|\alpha'(t)| = 1$ para todo t, entonces

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} d\hat{t} = t - t_0,$$

es decir, t es la longitud de arco medida desde algún punto.

Si α es regular, se dice que está *parametrizada por longitud de arco* si $|\alpha'(t)| = 1$ para todo t. Toda curva regular α puede ser reparametrizada por longitud de arco. En efecto, si $s(t)$ es como en (1), como $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ entonces $s(t)$ tiene una función inversa $t(s)$ para $s \in s(a, b) = (c, d)$. La curva

$$\beta : (c, d) \to \mathbb{R}^3, \qquad \beta(s) = \alpha(t(s)),$$

satisface

$$|\beta'(s)| = |\alpha'(t(s)) \cdot t'(s)| = \left|\alpha'(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t(s))}\right| = |\alpha'(t(s))| \cdot \frac{1}{|\alpha'(t(s))|} = 1,$$

por lo tanto β está parametrizada por longitud de arco. Además, β es una reparametrización de α, es decir, $\beta(c,d) = \alpha(a,b)$.

1.2. **Superficies regulares, funciones diferenciables entre superficies y plano tangente.** Se dice que un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie regular* si para cada $p \in S$ existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un abierto $V \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a p y una aplicación $\varphi : U \to V \cap S$ tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) φ es infinitamente diferenciable, es decir, si $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$, entonces $x(u,v)$, $y(u,v)$ y $z(u,v)$ tienen derivadas parciales continuas de todo orden en U.

(2) φ es un homeomorfismo, es decir, existe $\varphi^{-1} : V \cap S \to U$ y es continua. Esto significa que φ^{-1} es la restricción a $V \cap S$ de una función continua $f : W \to U$, donde W es un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $V \cap S$.

(3) **Condición de regularidad:** Para cada q en U, la diferencial de φ, $\mathrm{d}\varphi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, es inyectiva.

El par (U, φ) se denomina *sistema de coordenadas* locales en p.

Ejemplo 3. El cilindro circular recto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$$

es una superficie regular. Sea

$$\varphi(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v),$$

con $(u,v) \in U_1 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Entonces (U_1, φ) satisface las condiciones (1), (2) y (3). Lo mismo ocurre con (U_2, φ), donde $U_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Como ambos sistemas de coordenadas cubren C, C es una superficie regular.

Ejemplo 4. La esfera de radio 1

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular. Sea $\varphi_1 : U \to S^2$

$$\varphi_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}),$$

donde $(u,v) \in U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2 + v^2 < 1\}$. φ_1 tiene derivadas parciales continuas de todo orden en U y verifica las condidiones (2) y (3) de la definición de superficie regular. De manera análoga, definimos φ_2

$$\varphi_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}), \qquad (u,v) \in U,$$

que satisface las misnas condiciones que φ_1. Observar que $\varphi_1(U) \cup \varphi_2(U)$ es la esfera sin el ecuador. Para cubrir la esfera con sistemas de coordenadas definimos

$$\begin{aligned} \varphi_3(u,v) &= (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v), \\ \varphi_4(u,v) &= (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v), \\ \varphi_5(u,v) &= (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \\ \varphi_6(u,v) &= (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \end{aligned}$$

que junto con φ_1 y φ_2 cubren completamente S^2, por lo tanto S^2 es una superficie regular. De manera análoga se puede demostrar que el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es una superficie regular.

Ejemplo 5. El hiperboloide de dos hojas

$$z^2 = 1 + x^2 + y^2$$

es una superficie regular no conexa, pues dos puntos en dos hojas distintas ($z > 0,\ z < 0$) no pueden ser conectados por una curva continua contenida en la superficie. Los sistemas de coordenadas

$$\begin{aligned} \varphi_1(u,v) &= (u, v, \sqrt{1+x^2+y^2}), \\ \varphi_2(u,v) &= (u, v, -\sqrt{1+x^2+y^2}), \end{aligned}$$

$(u,v) \in \mathbb{R}^2$, cubren la superficie.

Ejemplo 6. El cono definido por

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

no es una superficie regular. Esto es consecuencia del hecho de que $(0,0,0)$ no posee ningún sistema de coordenadas que satisfaga las tres condiciones de la definición. Si al cono le extraemos el punto $(0,0,0)$, el conjunto resultante es una superficie regular.

Ejemplo 7. Sea T un toro, es decir, T es la superficie obtenida rotando una circunferencia de radio r con centro $(0,a,0)$ en el plano yz ($a > r$) alrededor del eje z. Definimos

$$\varphi(u,v) = ((r\cos u + a)\cos v, (r\cos u + a)\operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u)$$

donde $(u,v) \in U_1 = \{(u,v)\ :\ 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < 2\pi\}$. φ satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la definición de superficie regular. Observar que $\varphi(U_1)$ es el toro sin los círculos

$$(x,y,0), \quad x^2+y^2 = (r+a)^2, \qquad (x,0,z), \quad (x-a)^2 + z^2 = r^2.$$

Para cubrir T con sistemas de coordenadas considerar

$$\begin{aligned} U_2 &= \{(u,v)\ :\ -\pi < u < \pi,\ 0 < v < 2\pi\}, \\ U_3 &= \{(u,v)\ :\ 0 < u < 2\pi,\ -\pi < v < \pi\}. \end{aligned}$$

Entonces (U_i, φ) cumple las condiciones (1), (2) y (3) para $i = 1, 2, 3$ y estos tres sistemas de coordenadas cubren T, por lo tanto T es una superficie regular.

Una función $f : S \to \mathbb{R}$, S superficie regular, se dice *diferenciable* si para todo $p \in S$ existe un sistema de coordenadas (U, φ) en p tal que $f \circ \varphi$ es diferenciable en U. Una función continua $f : \mathbb{R} \to S$ se dice *diferenciable* si para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ existen un sistema de coordenadas (U, φ) en $f(t_0)$ y $\delta > 0$ tales que $f(t_0-\delta, t_0+\delta) \subset U$ y $\varphi^{-1} \circ f$ es diferenciable en $(t_0-\delta, t_0+\delta)$. Dadas dos superficies regulares S_1 y S_2, una función continua $f : S_1 \to S_2$ se dice *diferenciable* si para cada p en S_1 existen sistemas de coordenadas (U_1, φ_1) en p y (U_2, φ_2) en $f(p)$ tales que

$$f(\varphi_1(U_1)) \subset \varphi_2(U_2) \quad \text{ y } \quad \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2 \quad \text{es diferenciable.}$$

Ejemplo 8. Dados un vector unitario $v \in \mathbb{R}^3$ y una superficie S, sea $h : S \to \mathbb{R}$ la función altura definida por $h(p) = \langle p, v \rangle$, $p \in S$, donde $\langle \ , \ \rangle$ denota el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$. La función h es diferenciable. $h(p)$ es la altura de p con respecto a un plano normal a v en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Ejemplo 9. Dadas dos superficies S_1 y S_2, supongamos que $S_1 \subset V$ donde V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y $f : V \to \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable tal que $f(S_1) \subset S_2$. Entonces $f|_{S_1} : S_1 \to S_2$ es diferenciable. Algunos casos particulares son los siguientes

(1) Sea $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotación en el ángulo θ alrededor del eje z. Si S es una superficie invariante por R_θ, es decir, $R_\theta(p) \in S$ para todo $p \in S$, entonces $R_\theta : S \to S$ es diferenciable.

(2) Dados a, b, c reales no nulos, sea $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$, que es claramente diferenciable de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Como $f(S^2)$ es el elipsoide

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

entonces $f|_{S^2}$ es diferenciable de la esfera S^2 en el elipsoide.

El *plano tangente* a S en p es el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$T_pS = \{\, \alpha'(0) \ : \ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S \text{ curva diferenciable tal que } \alpha(0) = p \,\}. \tag{2}$$

Se puede verificar que si (U, φ) es un sistema de coordenadas en p y $q = \varphi^{-1}(p)$, entonces $T_pS = \mathrm{d}\varphi_q(\mathbb{R}^2)$ (ejercicio). Por lo tanto, $\{\mathrm{d}\varphi_q(1, 0),\ \mathrm{d}\varphi_q(0, 1)\}$ es una base de T_pS. Observar que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi_q(1, 0) &= (x_u(q), y_u(q), z_u(q)), \\ \mathrm{d}\varphi_q(0, 1) &= (x_v(q), y_v(q), z_v(q)). \end{aligned}$$

Notación: $\mathrm{d}\varphi_q(1, 0) = \varphi_{u(q)}$, $\quad \mathrm{d}\varphi_q(0, 1) = \varphi_{v(q)}$.

Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares y $f : S_1 \to S_2$ una función diferenciable. Dados $p \in S_1$ y $w \in T_pS_1$ sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. La curva $\beta = f \circ \alpha$ es una curva diferenciable en S_2 tal que $\beta(0) = f(p)$, por lo tanto $\beta'(0) \in T_{f(p)}S_2$. La aplicación $T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ que manda $w \mapsto \beta'(0)$ no depende de la curva α y es lineal (ejercicio). Dicha transformación lineal se denomina *diferencial* de f en p y se denota $\mathrm{d}f_p$.

Ejemplo 10. Sea $h(p)$ la función altura definida en el Ejemplo 8. Para calcular $\mathrm{d}h_p\, w,\ w \in T_pS$, sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p,\ \alpha'(0) = w$. Como $h(\alpha(t)) = \langle \alpha(t), v\rangle$ obtenemos

$$\mathrm{d}h_p\, w = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(\alpha(t)) = \langle \alpha'(0), v\rangle = \langle w, v\rangle.$$

Ejemplo 11. Sean S^2 la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$ y $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotación en el ángulo θ alrededor del eje z. Entonces $R_\theta|_{S^2}$ es diferenciable de S^2 en S^2. Calculemos $(\mathrm{d}R_\theta)_p\, w$ para $p \in S^2,\ w \in T_pS^2$. Dada una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S^2$ tal que $\alpha(0) = p,\ \alpha'(0) = w$, como R_θ es lineal

$$(\mathrm{d}R_\theta)_p\, w = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_\theta(\alpha(t)) = R_\theta(\alpha'(0)) = R_\theta(w).$$

Observar que R_θ deja fijo el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y que $(\mathrm{d}R_\theta)_N : T_NS^2 \to T_NS^2$ es la rotación en el ángulo θ en el plano T_NS^2.

Regla de la cadena: Si $S_1,\ S_2$ y S_3 son superficies regulares y $f : S_1 \to S_2$, $g : S_2 \to S_3$ son funciones diferenciables, entonces

$$\mathrm{d}(g \circ f)_p = \mathrm{d}g_{f(p)} \circ \mathrm{d}f_p$$

(ejercicio).

Como consecuencia del teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^2$, se obtiene un resultado análogo para superficies regulares.

Proposición 1.1. *Si S_1 y S_2 son superficies regulares y $f : S_1 \to S_2$ es una función diferenciable tal que df_p es un isomorfismo para cierto $p \in S_1$, entonces existen V_1, V_2 abiertos de $\mathbb{R}^3$ tales que $p \in V_1$, $f(V_1 \cap S_1) = V_2 \cap S_2$ y $f : V_1 \cap S_1 \to V_2 \cap S_2$ tiene inversa diferenciable.*

1.3. **Orientabilidad y curvatura de Gauss.** Dado un sistema de coordenadas (U, φ) en una superficie regular S, para cada p en $\varphi(U)$ definimos un *vector normal unitario* como sigue:

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(\varphi^{-1}(p)) \tag{3}$$

donde $w_1 \wedge w_2$ denota el producto vectorial de $w_1,\ w_2 \in \mathbb{R}^3$. Recordar que $\wedge$ no es asociativo y satisface

$$(w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 = \langle w_1, w_3\rangle\, w_2 - \langle w_2, w_3\rangle\, w_1, \tag{4}$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto interno canónico en $\mathbb{R}^3$. Por definición, $N(p)$ es perpendicular a T_pS para todo $p \in \varphi(U)$. Notar que N puede no estar definido en toda la superficie

S. Si derivamos los vectores φ_u, φ_v, N y los expresamos como combinación lineal de $\{\varphi_u,\ \varphi_v,\ N\}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1 N,\\
\varphi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + L_2 N,\\
\varphi_{vu} &= \Gamma^1_{21}\varphi_u + \Gamma^2_{21}\varphi_v + \bar{L}_2 N,\\
\varphi_{vv} &= \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + L_3 N,\\
N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v,\\
N_v &= a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v,
\end{aligned} \tag{5}$$

para ciertas funciones, $\Gamma^k_{ij}, a_{ij},\ L_i, \bar{L}_2$ definidas en U. Observar que $\Gamma^k_{12} = \Gamma^k_{21},\ k = 1, 2$, dado que $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$. Las funciones Γ^k_{ij} se denominan *símbolos de Christoffel* de S con respecto a φ.

Un *campo normal unitario* en S es una función diferenciable $N : S \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(p)$ es perpendicular a T_pS para todo $p \in S$ y $|N(p)| = 1$. Se dice que S es *orientable* si admite un campo normal unitario y la elección de un tal campo N se denomina *orientación* de S. Un sistema de coordenadas (U, φ) se dice *compatible* con N si $N(p)$ está dado por (3).

Si S es una superficie regular orientable con una orientación N, observar que

$$N : S \to S^2,$$

donde S^2 es la esfera en $\mathbb{R}^3$. Esta aplicación se denomina *aplicación de Gauss* y su diferencial

$$\mathrm{d}N_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2$$

se puede ver como una transformación lineal de $T_pS \to T_pS$, dado que $T_{N(p)}S^2$ es paralelo a T_pS. Se puede demostrar que el operador $\mathrm{d}N_p$ es autoadjunto. La *curvatura de Gauss* de S en p es

$$K(p) = \det(\mathrm{d}N_p). \tag{6}$$

Si (U, φ) es un sistema de coordenadas compatible con N, damos a continuación dos ecuaciones que relacionan los símbolos de Christoffel de S con respecto a φ con la curvatura de Gauss:

$$\begin{aligned}
&(\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} = -|\varphi_u|^2 K,\\
&(\Gamma^1_{12})_u - (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = \langle\varphi_u, \varphi_v\rangle K.
\end{aligned} \tag{7}$$

La primera de estas ecuaciones, denominada fórmula de Gauss, es considerada una de las más importantes en geometría diferencial.

Ejemplo 12. La cinta de Möbius M es una superficie regular no orientable. Se obtiene tomando una hoja rectangular y pegando el par de lados de menor longitud en sentido contrario. Si bien es fácil ver intuitivamente que no existe un campo normal unitario continuo en M, es posible dar una demostración analítica de este hecho.

Ejemplo 13. Dado el plano P definido por $ax+by+cz+d=0$, el vector normal unitario $N=(a,b,c)/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ es constante, por lo tanto $\mathrm{d}N\equiv 0$, en particular, $K\equiv 0$.

Ejemplo 14. Sea $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ una curva en S^2, entonces

$$2xx'+2yy'+2zz'=0,$$

es decir, (x,y,z) es normal a la esfera. Por lo tanto, $N=(x,y,z)$ define un campo normal unitario en S^2. Resulta $\mathrm{d}N_p\,v=v$ para todo $p\in S^2,\ v\in T_pS^2$, en particular, $K\equiv 1$.

Ejemplo 15. Si C es el cilindro

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=1,\ z\in\mathbb{R}\}$$

$N(x,y,z)=(x,y,0)$ es un campo normal unitario en C. Se puede verificar que para $v\in T_pC$ paralelo al eje z $\mathrm{d}N_p\,v=0$ mientras que si $w\in T_pC$ es paralelo al plano xy, $\mathrm{d}N_p\,w=1$. Por lo tanto, $K\equiv 0$.

Ejemplo 16. Considerar el paraboloide hiperbólico

$$H=\{(x,y,y^2-x^2)\ :\ x,\ y\in\mathbb{R}\}$$

y sea

$$N(x,y,y^2-x^2)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{4}}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{4}}},\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{4}}}\right).$$

Entonces N es un campo normal unitario en H y si $p=(0,0,0)$, se puede calcular

$$\mathrm{d}N_p(1,0,0)=(2,0,0),\qquad \mathrm{d}N_p(0,1,0)=(0,-2,0),$$

es decir, $K(p)=-4$.

1.4. **Campos a lo largo de curvas, derivada covariante, transporte paralelo y geodésicas.** Un *campo vectorial* w en una superficie regular S es una correspondencia que le asigna a cada $p\in S$ un vector $w(p)\in T_pS$. El campo w se dice *diferenciable* en p si existe un sistema de coordenadas (U,φ) en p tal que las componentes de $w\circ\varphi$ con respecto a $\varphi_u,\ \varphi_v$ son diferenciables en $q=\varphi^{-1}(p)$, es decir, escribiendo

$$w(\varphi(u,v))=a(u,v)\varphi_{u(u,v)}+b(u,v)\varphi_{v(u,v)},\qquad (u,v)\in U,$$

las funciones a y b son diferenciables en q.

Dados un campo vectorial diferenciable w en S y un vector tangente $y\in T_pS$, sea $\alpha:(-\epsilon,\epsilon)\to S$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0)=p,\ \alpha'(0)=y$. Considerar la restricción $w(t)$ del campo w a la curva α. Definimos la *derivada covariante* de w en p en la dirección de y, que denotaremos $(\mathrm{D}w/\mathrm{d}t)(0)$, como el siguiente vector tangente:

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{d}t}(0)=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0)\right)_T,\tag{8}$$

donde z_T denota la proyección ortogonal de z sobre T_pS.

Si $\alpha : (a,b) \to S$ es una curva diferenciable en S, un *campo w a lo largo de α* es una correspondencia que a cada t en (a,b) le asigna un vector $w(t) \in T_{\alpha(t)}S$. Un tal campo w se dice *diferenciable* en t_0 si existe un sistema de coordenadas (U,φ) en $\alpha(t_0)$ tal que si

$$w(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v,$$

entonces a y b son diferenciables en t_0, donde φ_u y φ_u están evaluados en $\varphi^{-1}(\alpha(t))$. De manera análoga a (8) definimos $(\mathrm{D}w/\mathrm{d}t)(t)$ como sigue:

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t)\right)_T,$$

donde $z(t)_T$ denota la proyección ortogonal de $z(t)$ sobre $T_{\alpha(t)}S$. El campo w a lo largo de α se dice *paralelo* si $\mathrm{D}w/\mathrm{d}t = 0$. Si v y w son dos campos paralelos a lo largo de α, entonces $\langle v(t), w(t)\rangle$ es constante (ejercicio). En particular, $|v(t)|$ y $|w(t)|$ son constantes y el ángulo entre $v(t)$ y $w(t)$ es constante a lo largo de α.

La siguiente proposición es consecuencia del teorema de existencia y unicidad de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales dada una condición inicial.

Proposición 1.2. *Dados una curva parametrizada $\alpha : (a,b) \to S$ y $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, existe un único campo $w(t)$ paralelo a lo largo de α tal que $w(t_0) = w_0$.*

Usando la proposición anterior, es posible definir el *transporte paralelo* de un vector a lo largo de una curva $\alpha : (a,b) \to S$. Si $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, sea $w(t)$ el único campo paralelo a lo largo de α tal que $w(t_0) = w_0$. Entonces $w(t_1) \in T_{\alpha(t_1)}S$ es el trasladado paralelo de w_0 a lo largo de α en t_1. El transporte paralelo no depende de la parametrización de $\alpha(a,b)$. Observar que el transporte paralelo $P_\alpha : T_pS \to T_qS$, $p = \alpha(t_0)$, $q = \alpha(t_1)$, es lineal y preserva el producto interno.

Se dice que una curva parametrizada no constante $\gamma : (a,b) \to S$ es una *geodésica* si $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ, es decir,

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'}{\mathrm{d}t}(t) = 0, \qquad \text{para todo } t \in (a,b).$$

Observar que $|\gamma'(t)|$ es constante, por lo tanto $\gamma''(t)$ es normal a la superficie para todo $t \in (a,b)$. Esta condición permite identificar geométricamente algunas geodésicas.

Ejemplo 17. Los círculos máximos en la esfera S^2 son geodésicas (éstas son todas las geodésicas en S^2).

Ejemplo 18. Si C es el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 1$, los círculos

$$\{(x,y,z_0) \,:\, z_0 \text{ fijo }, x^2 + y^2 = 1\}$$

y las rectas

$$\{(x_0,y_0,z) \,:\, (x_0,y_0) \text{ fijo }, x_0^2 + y_0^2 = 1,\ z \in \mathbb{R}\}$$

son geodésicas en C. Se puede demostrar que las geodésicas de C son de la forma

$$(\cos(as), \operatorname{sen}(as), bs), \qquad a^2 + b^2 = 1.$$

Proposición 1.3. *Dados $p \in S$ y $w \in T_pS$, $w \neq 0$, existen $\epsilon > 0$ y una única geodésica*

$$\gamma_w : (-\epsilon, \epsilon) \to S \qquad \text{tal que} \quad \gamma_w(0) = p, \quad \gamma_w'(0) = w.$$

1.5. **Aplicación exponencial y coordenadas normales.** Dado $v \neq 0$ en T_pS, sean $\epsilon > 0$ y $\gamma_v : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ como en la Proposición 1.3. Entonces, para cada $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, la geodésica $\gamma_{\lambda v}$ está definida en $(-\epsilon/\lambda, \epsilon/\lambda)$ y se verifica

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t), \qquad t \in (-\frac{\epsilon}{\lambda}, \frac{\epsilon}{\lambda}).$$

Si $v \in T_pS$, $v \neq 0$, y $\epsilon > 1$, es decir, 1 pertenece al dominio de γ_v, definimos la *aplicación exponencial* como sigue:

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1), \qquad \exp_p(0) = p. \tag{9}$$

En la siguiente proposición, $B_\epsilon = \{v \in T_pS \ : \ |v|_p < \epsilon\}$.

Proposición 1.4. *Dado $p \in S$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p$ está definida y es diferenciable en B_ϵ.*

Proposición 1.5. *Dado $p \in S$ existe un entorno abierto U de 0 en T_pS tal que $\exp_p : U \to \exp_p(U) \subset S$ es un difeomorfismo.*

La proposición anterior es consecuencia de la Proposición 1.1, pues $\mathrm{d}(\exp_p)_0$ es un isomorfismo. En efecto,

$$\mathrm{d}(\exp_p)_0\, v = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma_v(t) = v,$$

es decir,

$$\mathrm{d}(\exp_p)_0\, v = v.$$

Si p y U son como en la proposición anterior, $W = \exp_p(U)$ se denomina entorno normal de p y decimos que $(U, \exp_p)$ es un *sistema de coordenadas normales* en p.

El siguiente teorema es una consecuencia del teorema de existencia de soluciones de una ecuación diferencial en $\mathbb{R}^2$ que afirma que la solución depende diferenciablemente de la condición inicial.

Teorema 1.1. *Dado $p \in S$ existe un entorno W de p y ϵ_1, ϵ_2 positivos tales que la aplicación*

$$\gamma : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \times \mathcal{U} \to S$$

es diferenciable, donde

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \ : \ q \in W, v \in B_{\epsilon_1} \subset T_qS\},$$

$\gamma(t, q, 0) = q$ y para $v \neq 0$

$$t \mapsto \gamma(t, q, v), \qquad t \in (-\epsilon_2, \epsilon_2)$$

es la geodésica que pasa por q con velocidad v.

Proposición 1.6. *Dado $p \in S$ existen un entorno W de p y $\delta > 0$ tales que para cada $q \in W$, $\exp_q : B_\delta \to \exp_q(B_\delta)$ es un difeomorfismo y $W \subset \exp_q(B_\delta)$, es decir, W es un entorno normal de cada uno de sus puntos.*

1.6. **Completitud y el teorema de Hopf-Rinow.** Una superficie regular S se dice *completa* cuando las geodésicas en S están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, en la Proposición 1.3 siempre es posible tomar $\epsilon = \infty$. Observar que si S es completa $\exp_p$ está definida en v para todo $v \in T_pS$. Se puede demostrar que toda superficie cerrada es completa; en particular, toda superficie compacta es completa.

Ejemplo 19. El cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) \neq (0, 0),$$

es una superficie regular no completa ya que las rectas $z = \sqrt{x^2 + y_0^2},\ x > 0$ con $y_0 \neq 0$ fijo son geodésicas que no pueden ser extendidas para $x = 0$.

Una curva continua $\alpha : [a, b] \to S$ se dice diferenciable a trozos si existe una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$, tal que α es diferenciable en $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k$. La longitud $l(\alpha)$ de α se define por:

$$l(\alpha) = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\alpha'(t)|\, dt. \tag{10}$$

Si $\alpha(a) = p,\ \alpha(b) = q$, diremos que α conecta p con q.

Si S es conexa, es decir, dados $p,\ q \in S$ existe una curva diferenciable a trozos $\alpha_{p,q}$ en S que conecta p con q, hay una noción de distancia en S definida como sigue

$$d(p, q) = \inf\{l(\alpha_{p,q})\} \tag{11}$$

donde el ínfimo se calcula variando las curvas diferenciables a trozos que conectan p con q. Se puede demostrar que d satisface todas las propiedades de una función distancia.

Teorema 1.2 (Hopf-Rinow)**.** *Si S es una superficie regular, conexa y completa, entonces dados $p,\ q \in S$ existe una geodésica $\gamma_{p,q}$ en S tal que $d(p, q) = l(\gamma_{p,q})$.*

Ejemplo 20. El teorema anterior deja de ser cierto si no se cumple la hipótesis de completitud. En efecto, sea $S = S^2 - p$ la superficie obtenida quitándole un punto p a la esfera S^2. Dados dos puntos $p_1,\ p_2$ en el círculo máximo que pasa por p, simétricos respecto de p y en el semicírculo abierto que contiene a p, entonces no hay una geodésica de longitud mínima en S uniendo p_1 con p_2.

Una superficie conexa, regular S se dice *acotada* si existe $r > 0$ tal que $d(p, q) \leq r$ para todo par de puntos $p,\ q \in S$. El *diámetro* δ de una superficie acotada S es, por definición

$$\delta = \sup_{p,\, q \in S} d(p, q).$$

Por ejemplo, el diámetro de una esfera de radio r en $\mathbb{R}^3$ es $\delta = \pi r$.

Corolario 1.1. *Si S es completa y acotada, entonces es compacta.*

Demostración. Como S es completa, para cada $p \in S$ $\exp_p : T_pS \to S$ es suryectiva. En efecto, si $q \in S$ y $l = d(p,q)$, entonces por el Teorema 1.2 existe una geodésica γ que une p con q tal que $l(\gamma) = l$ (podemos suponer que γ está parametrizada por longitud de arco). Si $v = \gamma'(0)$, entonces $q = \exp_p lv$, es decir, $q \in \mathrm{Im}\,(\exp_p)$. Como S es acotada, existe un entorno $\overline{B_r}$ de 0 en T_pS, $\overline{B_r} = \{w \in T_pS \ : \ |w|_p \leq r\}$, tal que $\exp_p(\overline{B_r}) = \exp_p(T_pS) = S$. Como $\exp_p$ es continua y $\overline{B_r}$ es compacto, entonces S es compacta.

□

2. El Teorema de Bonnet

2.1. **Fórmulas de la primera y la segunda variación.** Una *variación* de una curva regular $\alpha : [0,l] \to S$ parametrizada por longitud de arco es una aplicación diferenciable $h : [0,l] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $h(s,0) = \alpha(s)$ para $s \in [0,l]$. La variación h se dice *propia* si $h(0,t) = \alpha(0)$, $h(l,t) = \alpha(l)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ fijo,

$$h_t : [0,l] \to S, \qquad h_t(s) = h(s,t),$$

se denomina *curva de la variación h.*

Notación: $\dfrac{\partial h}{\partial s}(p) = \mathrm{d}h_p(1,0), \quad \dfrac{\partial h}{\partial t}(p) = \mathrm{d}h_p(0,1).$

Observar que, para cada t_0 fijo, $\partial h/\partial s\,(s,t_0)$ y $\partial h/\partial t\,(s,t_0)$ son campos diferenciables a lo largo de h_{t_0}. En particular, el campo $V(s) = \partial h/\partial t\,(s,0)$ es un campo diferenciable a lo largo de $h_0 = \alpha$, denominado *campo variacional* de h. Notar que cuando h es propia, $V(0) = V(l) = 0$.

Proposición 2.1. *Si $V(s)$ es un campo diferenciable a lo largo de la curva regular $\alpha : [0,l] \to S$, entonces existe una variación $h : [0,l] \times (-\epsilon,\epsilon) \to S$ de α cuyo campo variacional es $V(s)$. Además, si $V(0) = V(l) = 0$ es posible elegir h propia.*

Proof. Mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que si $|v| < \delta$, $v \in T_{\alpha(s)}S$, entonces $\exp_{\alpha(s)} v$ está definida para todo $s \in [0,l]$. Para cada $p \in \alpha([0,l]) \subset S$ sean W_p y $\delta_p > 0$ como en la Proposición 1.6, es decir, W_p es entorno normal de q para todo $q \in W_p$. Entonces $\alpha([0,l]) \subset \cup_p W_p$ y como $\alpha([0,l])$ es compacto, existen $W_{p_1}, \ldots, W_{p_n}$ tales que $\alpha([0,l]) \subset \cup_i W_{p_i}$. Sea $\delta = \min(\delta_{p_1}, \ldots, \delta_{p_n})$. Este δ satisface la condición deseada.

Sean ahora $M = \max\{|V(s)| \ : \ s \in [0,l]\}$, $\epsilon < \delta/M$ y definamos h como sigue:

$$h(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tV(s)), \qquad s \in [0,l], \quad t \in (-\epsilon,\epsilon).$$

h está bien definida y si γ es la función del Teorema 1.1,

$$\exp_{\alpha(s)}(tV(s)) = \gamma(1, \alpha(s), tV(s)),$$

por lo tanto h es diferenciable. Es claro que $h(s,0) = \alpha(s)$. Por último, calculemos el campo variacional de h:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}(s,0) &= \mathrm{d}h_{(s,0)}(0,1) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_{\alpha(s)}(tV(s)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(1,\alpha(s),tV(s)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t,\alpha(s),V(s)) = V(s).\end{aligned}$$

Finalmente, observar que si $V(0) = V(l) = 0$ entonces h es propia.

$\square$

El objetivo es comparar la longitud de arco de $\alpha = h_0$ con la longitud de arco de h_t. Para esto, definimos una función $L : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ por:

$$L(t) = \int_0^l \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s,t) \right| ds, \qquad t \in (-\epsilon, \epsilon). \tag{12}$$

El estudio de L en un entorno de $t = 0$ nos dará información acerca del comportamiento de la longitud de arco de las curvas próximas a α.

Comenzaremos demostrando los siguientes lemas.

Lema 2.1 (Regla de Leibniz)**.** *La función L definida en* (12) *es diferenciable en un entorno de $t = 0$. En dicho entorno la derivada de L se obtiene derivando bajo el signo de la integral.*

Demostración. Como $\alpha : [0,l] \to S$ está parametrizada por longitud de arco

$$\left| \frac{\partial h}{\partial s}(s,0) \right| = 1.$$

Como $[0,l]$ es compacto, existe $0 < \delta \leq \epsilon$ tal que

$$\left| \frac{\partial h}{\partial s}(s,t) \right| \neq 0, \qquad s \in [0,l], \quad |t| < \delta.$$

El valor absoluto de una función diferenciable nunca nula es diferenciable, entonces el integrando en la ecuación (12) es diferenciable para $|t| < \delta$. Calculemos $L'(t)$:

$$L'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{\Delta t}.$$

Definimos $g(s,t) = |\partial h/\partial s\,(s,t)|$, que como ya dijimos es diferenciable para $|t| < \delta$ y, tomando δ más pequeño si fuera necesario, también tenemos que $\partial g/\partial t\,(s,t)$ es continua en $[0,l] \times [-\delta,\delta]$, por lo tanto $\partial g/\partial t$ es uniformemente continua en dicho rectángulo.

Queremos ver que dado $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{\Delta t} - \int_0^l \frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\, ds \right| < \epsilon_1 \qquad \text{para todo} \quad |\Delta t| < \delta_1.$$

Aplicando el teorema del valor medio a g obtenemos

$$g(s,t+\Delta t)-g(s,t)=\mathrm{d}g_{(s,\,t+c_s\Delta t)}(0,\Delta t)=\Delta t\,\frac{\delta g}{\delta t}(s,t+c_s\Delta t), \tag{13}$$

para algún $0\leq c_s\leq 1$. Por otro lado, la continuidad uniforme de $\partial g/\partial t$ en $[0,l]\times[-\delta,\delta]$ implica que existe $\delta_1>0$ tal que

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(s_1,t_1)-\frac{\partial g}{\partial t}(s_2,t_2)\right|<\frac{\epsilon_1}{l}\qquad\text{para todo}\qquad |(s_1,t_1)-(s_2,t_2)|<\delta_1,$$

donde $(s_i,t_i)\in[0,l]\times[-\delta,\delta]$. Ahora calculamos, para $|\Delta t|<\delta_1$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{L(t+\Delta t)-L(t)}{\Delta t}-\int_0^l\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\,ds\right| &= \left|\int_0^l\left(\frac{g(s,t+\Delta t)-g(s,t)}{\Delta t}-\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right)ds\right|\\ &\leq \int_0^l\left|\frac{g(s,t+\Delta t)-g(s,t)}{\Delta t}-\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right|ds\\ &= \int_0^l\left|\frac{\delta g}{\delta t}(s,t+c_s\Delta t)-\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right|ds<\int_0^l\frac{\epsilon_1}{l}\,ds=\epsilon_1,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se cumple porque $|(s,t+c_s\Delta t)-(s,t)|=|(0,c_s\Delta t)|\leq|\Delta t|<\delta_1$. Esto completa la prueba de que

$$L'(t)=\int_0^l\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\,ds=\int_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right|ds.$$

□

El siguiente lema es consecuencia de la definición de derivada covariante y dejamos su demostración como ejercicio.

Lema 2.2. *Si $v(t)$ y $w(t)$ son campos diferenciables a lo largo de una curva $\alpha:[a,b]\to S$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es diferenciable, entonces*

$$\frac{D}{dt}(f(t)w(t)) = f(t)\,\frac{Dw}{dt}+f'(t)w(t), \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),w(t)\rangle = \left\langle\frac{Dv}{dt},w(t)\right\rangle+\left\langle v(t),\frac{Dw}{dt}\right\rangle. \tag{15}$$

Antes de enunciar el siguiente lema definimos el concepto de campo diferenciable a lo largo de una variación. Sea $h:[0,l]\times(-\epsilon,\epsilon)\to S$ una aplicación diferenciable. Un *campo diferenciable a lo largo de h* es una correspondencia que le asigna a cada $(s,t)\in[0,l]\times(-\epsilon,\epsilon)$ un vector $V(s,t)\in T_{h(s,t)}S$, de modo que para cada $(s_0,t_0)\in[0,l]\times(-\epsilon,\epsilon)$ existe (U,φ) sistema de coordenadas en $h(s_0,t_0)$ tal que si

$$V(s,t)=a(s,t)\,\varphi_u+b(s,t)\,\varphi_v,$$

$(s,t)\in V$ con $h(V)\subset U$, entonces $a(s,t)$ y $b(s,t)$ son diferenciables en (s_0,t_0), donde φ_u y φ_v se evalúan en $\varphi^{-1}(h(s,t))$. Por ejemplo, $\partial h/\partial s$ y $\partial h/\partial t$ son campos a lo largo de h.

Restringiendo un campo $V(s,t)$ a lo largo de h a las curvas $s =$constante o $t =$constante obtenemos campos a lo largo de curvas. En este caso, $(DV/\partial t)(s,t)$ debe interpretarse como la derivada covariante del campo $V(s,t)$ restringido a la curva $h(s,t)$ con s fijo y variando t.

Lema 2.3. *Sea $h : [0,l] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una aplicación diferenciable. Entonces*
$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(s,t) = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}(s,t).$$

Demostración. Dado $(s_0,t_0) \in [0,l] \times (-\epsilon,\epsilon)$, sean (U,φ) un sistema de coordenadas en $h(s_0,t_0)$ y $W = h^{-1}(\varphi(U))$. Si $(s,t) \in W$ tenemos
$$h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$$
con h_1 y h_2 diferenciables en W. Dado $(s_1,t_1) \in W$, para calcular $(\partial h/\partial s)(s_1,t_1)$, como $h(s,t_1) = (h_1(s,t_1), h_2(s,t_1))$, sabemos que
$$\frac{\partial h}{\partial s}(s_1,t_1) = \frac{\partial h_1}{\partial s}(s_1,t_1)\,\varphi_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}(s_1,t_1)\,\varphi_v,$$
donde $\varphi_u,\ \varphi_v$ se calculan en $\varphi^{-1}(h(s_1,t_1))$. Como esto vale para todo $(s_1,t_1) \in W$ tenemos entonces
$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}\,\varphi_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\,\varphi_v,$$
donde ambos miembros se evalúan en $(s,t) \in W$. De manera análoga obtenemos
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t}\,\varphi_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\,\varphi_v.$$
Calculando las derivadas covariantes $(D/\partial s)(\partial h/\partial t)$ y $(D/\partial t)(\partial h/\partial s)$ en términos de los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k y usando las ecuaciones (5) vemos que el coeficiente de φ_u en ambas es
$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial s\,\partial t} + \Gamma_{11}^1\,\frac{\partial h_1}{\partial t}\,\frac{\partial h_1}{\partial s} + \Gamma_{12}^1\frac{\partial h_1}{\partial t}\,\frac{\partial h_2}{\partial s} + \Gamma_{12}^1\,\frac{\partial h_2}{\partial t}\,\frac{\partial h_1}{\partial s} + \Gamma_{22}^1\,\frac{\partial h_2}{\partial t}\,\frac{\partial h_2}{\partial s}.$$
Como el coeficiente de φ_v en ambas derivadas covariantes también coincide, concluimos que $(D/\partial s)(\partial h/\partial t) = (D/\partial t)(\partial h/\partial s)$.

□

Observación 1. El lema anterior podría haberse demostrado usando la inclusión de S en $\mathbb{R}^3$ (ejercicio). Dado que el objetivo del curso es introducir las herramientas de la geometría diferencial, elegimos dar la demostración que se basa en la geometría intrínseca de S.

Proposición 2.2 (Fórmula de la primera variación)**.** *Sean $h : [0,l] \times (-\epsilon,\epsilon) \to S$ una variación propia de una curva $\alpha : [0,l] \to S$ y $V(s) = (\partial h/\partial t)(s,0)$ el campo variacional de h. Entonces*
$$L'(0) = -\int_0^l \langle A(s), V(s)\rangle\, ds,$$

donde $A(s) = \dfrac{D\alpha'}{ds}(s)$.

Demostración. Si δ está dado por el Lema 2.1, entonces para $t \in (-\delta, \delta)$ tenemos

$$L'(t) = \int_0^l \left\{ \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle^{1/2} \right\} ds.$$

Aplicando el Lema 2.2 obtenemos

$$L'(t) = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|} ds = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|} ds.$$

Como $|\partial h/\partial s(s,0)| = 1$, entonces

$$L'(0) = \int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle ds,$$

donde el integrando debe ser evaluado en $(s, 0)$. Ahora aplicamos la ecuación (15)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
L'(0) &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds - \int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds \\
&= \langle \alpha'(l), V(l) \rangle - \langle \alpha'(0), V(0) \rangle - \int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds \\
&= -\int_0^l \langle A(s), V(s) \rangle \, ds
\end{aligned}$$

pues $V(0) = V(l) = 0$ dado que la variación es propia.

□

Observación 2. Notar que $L'(0)$ sólo depende del campo variacional $V(s)$.

2.1.1. *Caracterización de las geodésicas como las soluciones de un problema variacional.*

Proposición 2.3. *Una curva regular $\alpha : [0, l] \to S$ parametrizada por longitud de arco es una geodésica si y sólo si para toda variación $h : [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ de α, $L'(0) = 0$.*

Demostración. Por la fórmula de la primera variación, es claro que si α es una geodésica entonces $L'(0) = 0$, ya que $A(s) = (D\alpha'/ds)(s) = 0$ para todo s.

Recíprocamente, supongamos que $L'(0) = 0$ para toda variación propia de α y considerar el campo $V(s) = f(s)A(s)$ a lo largo de γ, donde $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que satisface: $f(s) > 0$ para $s \in (0, l)$, $f(0) = f(l) = 0$ y $A(s) = (D\alpha'/ds)(s)$.

Por la Proposición 2.1 existe una variación propia cuyo campo variacional es $V(s)$ y la fórmula de la primera variación implica

$$L'(0) = -\int_0^l \langle A(s), V(s)\rangle \, ds = -\int_0^l f(s)\,|A(s)|^2 ds = 0,$$

por lo tanto $f(s)\,|A(s)| \equiv 0$. Esto implica que $|A(s)| = 0$ para todo $s \in (0, l)$ y por continuidad $|A(0)| = |A(l)| = 0$. Esto dice que $D\alpha'/ds \equiv 0$, o equivalentemente, α es una geodésica.

□

De ahora en más consideraremos variaciones propias de geodésicas $\gamma : [0, l] \to S$ parametrizadas por longitud de arco, es decir, supondremos que $L'(0) = 0$. Para simplificar los cálculos, consideraremos variaciones ortogonales, o sea supondremos que el campo variacional $V(s)$ es ortogonal a $\gamma'(s)$ para todo s. Para estudiar el comportamiento de L en un entorno de 0 calcularemos $L''(0)$.

Comenzaremos demostrando dos lemas que relacionan la curvatura de Gauss con la derivada covariante.

Lema 2.4. *Sean (U, φ) un sistema de coordenadas en un punto p de una superficie regular S y K la curvatura de Gauss de S. Entonces*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{D\varphi_u}{\partial u} - \frac{D}{\partial u}\frac{D\varphi_u}{\partial v} = K\,(\varphi_u \wedge \varphi_v) \wedge \varphi_u.$$

Demostración. La derivada covariante es, por definición, la proyección ortogonal de la derivada usual sobre el plano tangente, entonces tenemos

$$\frac{D\varphi_u}{\partial u} = \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v.$$

Ahora calculamos la derivada covariante de este campo usando (5)

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial v}\frac{D\varphi_u}{\partial u} &= \{(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2\}\varphi_u \\ &\quad + \{(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2\}\varphi_v.\end{aligned}$$

De manera análoga calculamos

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial u}\frac{D\varphi_u}{\partial v} &= \{(\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2\}\varphi_u \\ &\quad + \{(\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\}\varphi_v.\end{aligned}$$

Restando la segunda ecuación a la primera obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial v}\frac{D\varphi_u}{\partial u} &- \frac{D}{\partial u}\frac{D\varphi_u}{\partial v} = \{(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2\}\varphi_u \\ &+ \{(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\}\varphi_v.\end{aligned}$$

Finalmente, usamos las ecuaciones (7), que relacionan la curvatura de Gauss con los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial v}\frac{D\varphi_u}{\partial u}-\frac{D}{\partial u}\frac{D\varphi_u}{\partial v} &= -\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle K\varphi_u+|\varphi_u|^2K\varphi_v\\ &= K\{\langle\varphi_u,\varphi_u\rangle\varphi_v-\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle\varphi_u\}\\ &= K\,(\varphi_u\wedge\varphi_v)\wedge\varphi_u,\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de (4).

□

Lema 2.5. *Sea $h:[0,l]\times(-\epsilon,\epsilon)\to S$ una aplicación diferenciable y $V(s,t)$ un campo diferenciable a lo largo de h. Entonces*

$$\frac{D}{\partial t}\frac{DV}{\partial s}-\frac{D}{\partial s}\frac{DV}{\partial t}=K\left(\frac{\partial h}{\partial s}\wedge\frac{\partial h}{\partial t}\right)\wedge V,$$

donde $K(s,t)$ es la curvatura de Gauss de S en $h(s,t)$.

Demostración. Dado un sistema de coordenadas (U,φ) en $h(s_0,t_0)$ podemos expresar $V(s,t)$ en términos de $\{\varphi_u,\,\varphi_v\}$ para (s,t) en un entorno de (s_0,t_0)

$$V(s,t)=a(s,t)\varphi_u+b(s,t)\varphi_v.$$

Por el Lema 2.2, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{DV}{\partial s} &= \frac{D}{\partial s}(a\varphi_u+b\varphi_v)\\ &= a\,\frac{D\varphi_u}{\partial s}+b\,\frac{D\varphi_v}{\partial s}+\frac{\partial a}{\partial s}\,\varphi_u+\frac{\partial b}{\partial s}\,\varphi_v.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{DV}{\partial s} &= a\,\frac{D}{\partial t}\frac{D\varphi_u}{\partial s}+b\,\frac{D}{\partial t}\frac{D\varphi_v}{\partial s}+\frac{\partial a}{\partial s}\,\frac{D\varphi_u}{\partial t}\\ &\quad+\frac{\partial b}{\partial s}\,\frac{D\varphi_v}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial t}\,\frac{D\varphi_u}{\partial s}+\frac{\partial b}{\partial t}\,\frac{D\varphi_v}{\partial s}+\frac{\partial^2 a}{\partial t\partial s}\,\varphi_u+\frac{\partial^2 b}{\partial t\partial s}\,\varphi_v.\end{aligned}$$

De manera similar obtenemos una fórmula para $(D/\partial s)(DV/\partial t)$, que es igual a la anterior intercambiando s con t. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{DV}{\partial s}-\frac{D}{\partial s}\frac{DV}{\partial t} &= a\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D\varphi_u}{\partial s}-\frac{D}{\partial s}\frac{D\varphi_u}{\partial t}\right)\\ &\quad+b\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D\varphi_v}{\partial s}-\frac{D}{\partial s}\frac{D\varphi_v}{\partial t}\right).\end{aligned}\tag{16}$$

La derivada covariante $D\varphi_u/\partial s$ es la proyección ortogonal de $\partial\varphi_u/\partial s$ sobre $T_{h(s,t)}S$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{D\varphi_u}{\partial s} &= \left(\frac{\partial\varphi_u}{\partial s}\right)_T = \left(\varphi_{uu}\,\frac{\partial h_1}{\partial s} + \varphi_{uv}\,\frac{\partial h_2}{\partial s}\right)_T\\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s}\,(\varphi_{uu})_T + \frac{\partial h_2}{\partial s}\,(\varphi_{uv})_T\\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s}\,\frac{D\varphi_u}{\partial u} + \frac{\partial h_2}{\partial s}\,\frac{D\varphi_u}{\partial v},\end{aligned}$$

donde el subíndice T denota la proyección ortogonal sobre $T_{h(s,t)}S$ y $(h_1(s,t), h_2(s,t)) = \varphi^{-1}\circ h(s,t)$. Ahora calculamos la derivada covariante de este campo con respecto a t:

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D\varphi_u}{\partial s} &= \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\,\frac{D\varphi_u}{\partial u} + \frac{\partial h_2}{\partial s}\,\frac{D\varphi_u}{\partial v}\right)\right\}_T = \frac{\partial^2 h_1}{\partial t\,\partial s}\,\frac{D\varphi_u}{\partial u}\\ &\quad + \frac{\partial^2 h_2}{\partial t\,\partial s}\,\frac{D\varphi_u}{\partial v} + \frac{\partial h_1}{\partial s}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}\,\frac{D}{\partial u}\,\frac{D\varphi_u}{\partial u} + \frac{\partial h_2}{\partial t}\,\frac{D}{\partial v}\,\frac{D\varphi_u}{\partial u}\right)\\ &\quad + \frac{\partial h_2}{\partial s}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}\,\frac{D}{\partial u}\,\frac{D\varphi_u}{\partial v} + \frac{\partial h_2}{\partial t}\,\frac{D}{\partial v}\,\frac{D\varphi_u}{\partial u}\right).\end{aligned}$$

De la misma forma se calcula $(D/\partial s)/(D\varphi_u/\partial t)$ y se obtiene una expresión análoga, intercambiando s con t.

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D\varphi_u}{\partial s} - \frac{D}{\partial s}\frac{D\varphi_u}{\partial t} &= \frac{\partial h_2}{\partial s}\,\frac{\partial h_1}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial u}\frac{D\varphi_u}{\partial v} - \frac{D}{\partial v}\frac{D\varphi_u}{\partial u}\right)\\ &\quad + \frac{\partial h_1}{\partial s}\,\frac{\partial h_2}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D\varphi_u}{\partial u} - \frac{D}{\partial u}\frac{D\varphi_u}{\partial v}\right)\\ &= \Delta\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D\varphi_u}{\partial u} - \frac{D}{\partial u}\frac{D\varphi_u}{\partial v}\right),\end{aligned}$$

donde

$$\Delta = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\,\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_2}{\partial s}\,\frac{\partial h_1}{\partial t}\right).$$

Todo lo anterior vale también para φ_v, es decir,

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D\varphi_v}{\partial s} - \frac{D}{\partial s}\frac{D\varphi_v}{\partial t} = \Delta\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D\varphi_u}{\partial v} - \frac{D}{\partial u}\frac{D\varphi_v}{\partial v}\right).$$

Usando la ecuación anterior en (16) y aplicando el Lema 2.4, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{DV}{\partial s} - \frac{D}{\partial s}\frac{DV}{\partial t} &= a\,\Delta\,K\,(\varphi_u\wedge\varphi_v)\wedge\varphi_u + b\,\Delta\,K\,(\varphi_u\wedge\varphi_v)\wedge\varphi_v\\ &= K\,(\Delta\varphi_u\wedge\varphi_v)\wedge(a\varphi_u + b\varphi_v).\end{aligned}$$

Por otro lado, según el Lema 2.3

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}\,\varphi_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\,\varphi_v, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t}\,\varphi_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\,\varphi_v,$$

entonces

$$\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} = \Delta\, \varphi_u \wedge \varphi_v.$$

Por lo tanto

$$\frac{D}{\partial t}\frac{DV}{\partial s} - \frac{D}{\partial s}\frac{DV}{\partial t} = K\left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t}\right) \wedge V.$$

□

A continuación obtenemos una fórmula para $L''(0)$.

Proposición 2.4 (Fórmula de la segunda variación)**.** *Sean $h : [0,l] \times (-\epsilon,\epsilon) \to S$ una variación ortogonal propia de una geodésica $\gamma : [0,l] \to S$ parametrizada por longitud de arco y $V(s)$ el campo variacional de h. Entonces*

$$L''(0) = \int_0^l \left(\left|\frac{DV}{ds}(s)\right|^2 - K(s)\,|V(s)|^2\right) ds,$$

donde $K(s)$ es la curvatura de Gauss de S en $\gamma(s) = h(s,0)$.

Demostración. Vimos al demostrar la Proposición 2.2 que

$$L'(t) = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|}\, ds$$

para $t \in (-\delta,\delta)$ donde δ es como en el Lema 2.1. Derivando esta expresión obtenemos

$$L''(t) = \int_0^l \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle\right)\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|}\, ds - \int_0^l \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle^2}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|^{3/2}}\, ds.$$

Observar que si $t = 0$ entonces $|(\partial h/\partial s)(s,0)| = 1$. Además

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle.$$

Como γ es una geodésica, $(D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s,0) = 0$ y la variación es ortogonal, entonces

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}(s,0), \frac{\partial h}{\partial t}(s,0)\right\rangle = 0.$$

Tenemos

$$L''(0) = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle ds, \tag{17}$$

donde el integrando es evaluado en $(s,0)$.

El próximo paso es transformar la ecuación anterior de manera conveniente. Observar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle + \left| \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}\right|^2 .
\end{aligned}$$

Por otro lado, en $t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle,$$

pues $(D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s, 0) = 0$ dado que γ es una geodésica. Más aún, usando el Lema 2.5 y que la variación es ortogonal, en $t = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle &= K\left\langle \left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t}\right) \wedge \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle \\
&= -K\left\langle |V(s)|^2\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle \\
&= -K\,|V(s)|^2.
\end{aligned}$$

Reemplazando lo obtenido en la ecuación (17) resulta

$$\begin{aligned}
L''(0) &= \int_0^l \left(-K\,|V(s)|^2 + \left|\frac{DV}{ds}\right|^2\right) ds \\
&\quad + \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle (l, 0) - \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle (0, 0).
\end{aligned}$$

Finalmente, como la variación es propia, $(\partial h/\partial t)(0, t) = (\partial h/\partial t)(l, t) = 0,\ t \in (-\delta, \delta)$. Por lo tanto

$$L''(0) = \int_0^l \left(\left|\frac{DV}{ds}\right|^2 - K\,|V(s)|^2\right) ds.$$

□

Teorema 2.1 (Bonnet)**.** *Sea S una superficie completa, regular, cuya curvatura de Gauss K satisface*

$$K \geq r^2, \qquad r > 0.$$

Entonces S es compacta y su diámetro δ satisface

$$\delta \leq \frac{\pi}{r}.$$

Demostración. Como S es completa, por el Teorema 1.2 dados p, q en S existe una geodésica γ en S tal que $d(p,q) = l(\gamma)$. Sea $l = l(\gamma)$, demostraremos que

$$l \leq \frac{\pi}{r}.$$

Como γ es una geodésica de longitud mínima uniendo p con q, tenemos

$$L'(0) = 0, \qquad L''(0) \geq 0, \qquad \text{para cualquier variación de } \gamma. \tag{18}$$

Suponiendo que $l > \pi/r$, lo cual implica $K \geq r > \pi^2/l^2$, construiremos una variación de $\gamma : [0,l] \to S$ tal que $L''(0) < 0$. Dado w_0 en $T_{\gamma(0)}S$ ortogonal a $\gamma'(0)$, $|w_0| = 1$, sea $w(s)$ el único campo paralelo a lo largo de γ tal que $w(0) = w_0$ (Proposición 1.2). Observar que $|w(s)| = 1$ y que $w(s)$ es ortogonal a $\gamma'(s)$ para todo $s \in [0,l]$. Considerar el siguiente campo a lo largo de γ:

$$V(s) = w(s)\,\sin\!\left(\frac{\pi}{l}\,s\right), \qquad s \in [0,l].$$

Como $V(0) = V(l) = 0$ y $V(s)$ es ortogonal a $\gamma'(s)$, $V(s)$ da origen a una variación propia de γ que resulta ortogonal. Por la Proposición 2.4

$$L''(0) = \int_0^l \left(\left| \frac{DV}{ds}(s) \right|^2 - K(s)\,|V(s)|^2 \right) ds.$$

Como $w(s)$ es paralelo,

$$\frac{DV}{ds}(s) = w(s)\,\frac{\pi}{l}\,\cos\left(\frac{\pi}{l}\,s\right).$$

Entonces, como $K > \pi^2/l^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2}\cos^2\!\left(\frac{\pi}{l}\,s\right) - K\,\mathrm{sen}^2\!\left(\frac{\pi}{l}\,s\right)\right) ds \\ &< \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2}\left(\cos^2\!\left(\frac{\pi}{l}\,s\right) - \mathrm{sen}^2\!\left(\frac{\pi}{l}\,s\right)\right) ds \\ &= \frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos\!\left(\frac{2\pi}{l}\,s\right) ds = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación de γ correspondiente a $V(s)$ satisface $L''(0) < 0$, en contradicción con (18). Esto provino de suponer $l > \pi/r$, por lo tanto debe ser $l \leq \pi/r$.

Como $d(p,q) \leq \pi/r$ para todo par de puntos p, $q \in S$, entonces S es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$ y el diámetro δ de S satisface $\delta \leq \pi/r$. S resulta entonces compacta por ser completa y acotada (ver Corolario 1.1).

$\square$

Bibliografía

[DC] Do Carmo, Manfredo P., *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[T] Troutman, John L., *Variational calculus with elementary convexity*, Springer-Verlag, New York, 1983.