Geometría Riemanniana y Espacios Simétricos
Práctico 1 - Año 2009

(1) Sean ∇ una conexión afín en M, $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y α curva integral de X tal que $\alpha(t_0) = p$. Si Y es un campo vectorial definido en un entorno de p, entonces

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \to t_0} \frac{P_{t_0,t}^{-1}\left(Y_{\alpha(t)}\right) - Y_p}{t - t_0} \qquad \left(= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} P_{t_0,t}^{-1}\left(Y_{\alpha(t)}\right) \right).$$

(2) Demostrar que si X e Y son campos vectoriales invariantes a izquierda en un grupo de Lie G, entonces $[X, Y]$ es invariante a izquierda.

(3) Sean $V_1, \dots, V_n$ campos a lo largo de $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $\dim M = n$, tales que $\{V_1(t), \dots, V_n(t)\}$ son linealmente independientes para todo $t \in \mathbb{R}$. Demostrar que dado cualquier campo W a lo largo de γ, $W = \sum_{i=1}^n w_i V_i$ con $w_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones C^∞.

(4) Demostrar que si M es una variedad paracompacta entonces M posee una métrica riemanniana.

(5) Sea ∇ una conexión afín en una variedad riemanniana $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$. Demostrar que si

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

entonces ∇ es compatible con la métrica.

(6) Sea R el tensor de curvatura de una conexión afín ∇ en M. Demostrar que si $R(X, Y)Z$ satisface la identidad de Bianchi cuando $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$, entonces dicha identidad se verifica para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

(7) Sea S^n la esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica riemanniana inducida y $A : S^n \longrightarrow S^n$, $A(p) = -p$. Demostrar que A es una isometría. Usar este hecho para definir una métrica riemanniana en el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ tal que la proyección natural $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ es una isometría local.

(8) Métrica riemanniana producto. Dadas dos variedades riemannianas $(M_1, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_1)$, $(M_2, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_2)$, sean $\pi_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$, las proyecciones naturales. Se define $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ en el producto $M_1 \times M_2$ de la siguiente manera:

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_{1(p,q)}\, u, d\pi_{1(p,q)}\, v\rangle_{1\,p} + \langle d\pi_{2(p,q)}\, u, d\pi_{2(p,q)}\, v\rangle_{2\,q}$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$, $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$. Verificar que $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ define una métrica riemanniana en $M_1 \times M_2$. En particular, si consideramos S^1 con la métrica inducida de $\mathbb{R}^2$ podemos definir una métrica riemanniana en $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$. T^n equipado con esta métrica se denomina toro *plano.*

Por otro lado, sea $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$ definida por:

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definir una métrica riemanniana en T^n de modo que π sea una isometría local. Demostrar que con esta métrica T^n resulta isométrico al toro plano.

(9) Una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = y\,t + x$, $t, x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, se denomina función afín propia. El conjunto de dichas funciones forma un grupo de Lie G con respecto a la composición de funciones. La estructura de variedad diferenciable de G es la inducida de $\mathbb{R}^2$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Demostrar que

(a) La métrica invariante a izquierda en G que en $e = (0, 1)$ coincide con la métrica euclídea está dada por

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle_{(x,y)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{(x,y)} = \frac{1}{y^2}, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{(x,y)} = 0.$$

(b) Si $(x, y) = z = x+iy$ y definimos $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$, $ad-bc = 1$, entonces f es una isometría de G.

(10) Sea $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ una superficie en $\mathbb{R}^3$ con la métrica riemanniana inducida. Sean $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva C^∞ en M y V un campo a lo largo de γ tangente a M.

(a) Demostrar que V es paralelo si y sólo si $\dfrac{dV}{dt}$ es ortogonal a $T_{\gamma(t)}M \subset \mathbb{R}^3$, donde $\dfrac{dV}{dt}$ es la derivada usual de $V : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

(b) Si $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$, demostrar que si $\gamma(t)$ es un círculo máximo parametrizado por longitud de arco, entonces $\dot\gamma(t)$ es paralelo. Un argumento similar vale para $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

(11) En el espacio euclídeo, el transporte paralelo entre dos puntos no depende de la curva que los une. Demostrar con un ejemplo que este hecho puede no ser cierto para una variedad riemanniana arbitraria.

(12) Dada $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ riemanniana, sea W un entorno totalmente normal de p en M, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $q_1, q_2 \in W$ hay una única geodésica de longitud menor que ϵ uniendo q_1 con q_2 y $\mathrm{Exp}_q : B(0, \epsilon) \longrightarrow B_\epsilon(q)$ es un difeomorfismo. Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ una geodésica de longitud menor que ϵ tal que $\gamma(0), \gamma(1) \in W$. Demostrar que si $\alpha : [0, 1] \longrightarrow M$ es una curva C^∞ a trozos tal que

$$\alpha(0) = \gamma(0), \quad \alpha(1) = \gamma(1), \qquad \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_0^1 |\dot\alpha(t)|\, dt,$$

entonces $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\gamma)$.

(13) Sea $(M, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ riemanniana y ∇ la conexión de Levi-Civita. Demostrar que si (U, φ) es un sistema de coordenadas normales en p, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, obtenido a partir de una base ortonormal $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de T_pM, entonces

(a) $\partial_i|_p = X_i$, (b) $\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j\right)_p = 0$, para todo i, j.

(14) Si M y N son variedades riemannianas, $f : M \to N$ es una isometría y γ es una geodésica en M, entonces $f \circ \gamma$ es una geodésica en N.

(15) (a) Si M y N son variedades riemannianas, sean ∇ y $\tilde{\nabla}$ las respectivas conexiones de Levi-Civita. Demostrar que si $f : M \to N$ es una isometría, entonces $f : (M, \nabla) \to (N, \tilde{\nabla})$ es afín, es decir, $\tilde{\nabla}_{X^f}\left(Y^f\right) = (\nabla_X Y)^f$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) Sea ∇ la conexión de Levi-Civita en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea. Hallar las transformaciones afines de $(\mathbb{R}^n, \nabla)$.

(16) Dadas dos variedades riemannianas $(M_1, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_1)$, $(M_2, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_2)$, sean $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ la métrica en el producto $M_1 \times M_2$ definida en el ejercicio (8) y ∇ la conexión de Levi-Civita correspondiente a $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$.

(a) Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M_i)$ entonces $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M_i)$, $i = 1, 2$, y si $X \in \mathfrak{X}(M_i)$, $Y \in \mathfrak{X}(M_j)$ con $i \neq j$, entonces $\nabla_X Y = 0$.

(b) Si $X_i, Y_i \in \mathfrak{X}(M_i)$ y R es el tensor de curvatura de ∇, entonces

$$\langle R(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)(X_1 + X_2), Y_1 + Y_2 \rangle = \langle R(X_1, Y_1)X_1, Y_1 \rangle + \langle R(X_2, Y_2)X_2, Y_2 \rangle.$$

En particular, si $X \in \mathfrak{X}(M_1)$, $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$ entonces $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = 0$.

(17) Una variedad riemanniana M se dice homogénea si para todo $p, q \in M$ existe una isometría $f : M \to M$ tal que $f(p) = q$. Demostrar que si M es homogénea, entonces es geodésicamente completa.

(18) Si M es una variedad riemanniana, demostrar que existe un único campo vectorial G en TM cuyas curvas integrales son de la forma $\Gamma(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ donde γ es una geodésica en M. [1]

(19) Métrica riemanniana en TM. Sea M una variedad riemanniana.

(a) Si $(p, v) \in TM$, $V, W \in T_{(p,v)}TM$, sean $\alpha(t) = (p(t), v(t))$, $\beta(s) = (q(s), w(s))$ curvas en TM tales que $p(0) = q(0) = p$, $v(0) = w(0) = v$, $\dot{\alpha}(0) = V$, $\dot{\beta}(0) = W$. Definir

$$\langle V, W \rangle_{(p,v)} = \langle (d\pi)V, (d\pi)W \rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0) \right\rangle_p,$$

donde $d\pi$ es la diferencial de la proyección $\pi : TM \to M$. Demostrar que $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ está bien definido e induce una métrica riemanniana en TM.

(b) Si $W \in T_{(p,v)}TM$ es ortogonal a la fibra $\pi^{-1}(p) \approx T_pM$, se dice que W es *horizontal* y una curva $\beta(s) = (q(s), w(s))$ en TM se dice *horizontal* si $\dot{\beta}(s)$ es horizontal para todo s. Demostrar que $\beta(s)$ es horizontal si y sólo si $w(s)$ es paralelo a lo largo de $q(s)$ en M.

(c) Demostrar que el campo geodésico G (ejercicio (18)) es horizontal.

(d) Demostrar que las curvas integrales del campo geodésico son geodésicas en TM con la métrica del inciso (a).

(e) Si $V \in T_{(p,v)}TM$ es tangente a la fibra $\pi^{-1}(p) \approx T_pM$, se dice que V es *vertical.* Demostrar que

$$\langle W, W \rangle_{(p,v)} = \langle (d\pi)W, (d\pi)W \rangle_p, \quad \langle V, V \rangle_{(p,v)} = \langle V, V \rangle_p,$$

donde W es horizontal, V es vertical y se identifica $T_{(p,v)}\left(\pi^{-1}(p)\right)$ con T_pM.

[1] G se denomina *campo geodésico* en TM y el flujo de G en TM se denomina *flujo geodésico.*