Geometría Riemanniana y Espacios Simétricos
Práctico 2 - Año 2009

(1) Sea $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ con la métrica riemanniana definida en el ejercicio 9(a) del Práctico 1.

(a) Calcular los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita con respecto a las coordenadas (x, y).

(b) Determinar todas las geodésicas de H^2.

(2) Considerar $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica inducida.

(a) Demostrar que las isometrías de S^n son las restricciones a S^n de transformaciones lineales ortogonales de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Demostrar que los círculos máximos en S^n, parametrizados de manera conveniente, son geodésicas y, más aún, toda geodésica maximal en S^n es de esta forma.

(c) Dado $p \in S^n$, describir la aplicación exponencial $\mathrm{Exp}_p : T_pS^n \longrightarrow S^n$.

(3) Sea ∇ una conexión afín en M con tensor de curvatura R.

(a) Dados $u, v, w \in T_pM$ con u, v linealmente independientes y $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ un sistema de coordenadas cúbico en p centrado en 0 tal que $\partial_1|_p = u$, $\partial_2|_p = v$, sean

$$C_\epsilon = \{q \in U : 0 \leq x_1(q) \leq \epsilon,\ 0 \leq x_2(q) \leq \epsilon,\ x_i(q) = 0,\ i = 3, \ldots, n\},$$

γ_ϵ el borde de C_ϵ recorrido en sentido anti-horario (con punto inicial y final p) y $w_\epsilon = P_{\gamma_\epsilon}(w)$, donde $P_{\gamma_\epsilon} : T_pM \to T_pM$ denota la traslación paralela a lo largo de γ_ϵ. Demostrar que

$$R(u, v)w = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2}(w - w_\epsilon),$$

es decir, R mide cuánto depende el transporte paralelo de la curva a lo largo de la cual se realiza la traslación.

(b) Supongamos que M es conexa, ∇ es simétrica y se verifica la siguiente propiedad: dados $p, q \in M$ el transporte paralelo de p a q no depende de la curva que une p con q. Demostrar que M tiene curvatura cero, es decir, $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

(4) Dada M riemanniana y $X \in \mathfrak{X}(M)$, sean $p \in M$, $U \subset M$ un entorno de p y $\epsilon > 0$ tales que $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M$ es diferenciable, donde para cada $q \in U$ fijo, $t \mapsto \varphi(t, q)$ es la curva integral de X que en $t = 0$ pasa por q. Se dice que X es un campo de Killing si $\varphi(t_0, \cdot)$ es una isometría de U en M para todo $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Un campo vectorial V en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Diremos que el campo es lineal si la función V es lineal. Un campo vectorial lineal en $\mathbb{R}^n$, definido por una matriz A, es un campo de Killing si y sólo si A es antisimétrica.

(b) Sea X un campo de Killing en M, $p \in M$ y U entorno normal de p. Supongamos que p es el único punto de U tal que $X_p = 0$. Entonces, en U, X es tangente a las esferas geodésicas centradas en p.

(c) Sea N riemanniana, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f : M \to N$ una isometría. Sea $Y \in \mathfrak{X}(N)$ el campo f-relacionado con X. Entonces Y es un campo de Killing si y sólo si X es de Killing.

(d) X es de Killing si y sólo si $\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (ecuación de Killing).
Ayuda para $\Rightarrow$*:* Por continuidad, basta demostrar la ecuación para puntos $q \in U$ tales que $X_q \neq 0$. Considerar una subvariedad S de U normal a X_q que pase por q, $\dim S = \dim M - 1$. Sean $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ coordenadas en un entorno $V \subset S$ de q tales que $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ son coordenadas en $V \times (-\epsilon, \epsilon) \subset U$ y $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$. Si escribimos $X_i = \partial_i$, obtenemos:

$$\langle \nabla_{X_j} X, X_i\rangle + \langle \nabla_{X_i} X, X_j\rangle = X\langle X_i, X_j\rangle - \langle [X, X_i], X_j\rangle$$
$$-\langle [X, X_j], X_i = \frac{\partial}{\partial t}\langle X_i, X_j\rangle = 0,$$

donde la última igualdad vale pues X es de Killing.

(e) Si X es de Killing y $X_q \neq 0$ entonces existen coordenadas $(x_1, \ldots x_n)$ en un entorno de q tales que los coeficientes g_{ij} de la métrica en este sistema de coordenadas no dependen de x_n.

(5) Sea M riemanniana conexa y X un campo de Killing en M tal que $X_q = 0$ y $(\nabla_Y X)_q = 0$ para todo $Y_q \in T_q M$. Demostrar que $X \equiv 0$.

(6) Sea M riemanniana de dimensión n y $p \in M$. Demostrar que existe un entorno U de p en M y $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormales en cada punto de U, tales que en p, $(\nabla_{E_i} E_j)_p = 0$. Una base local de campos como $E_1, \ldots, E_n$ se denomina *marco geodésico* en p.

(7) Sea M riemanniana de dimensión n, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$. La *divergencia* de X es la función $\mathrm{div} X : M \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\mathrm{div} X(p) = \mathrm{traza}\Big(Y_p \longrightarrow (\nabla_Y X)_p\Big), \quad p \in M,$$

y el *gradiente* de f es el campo vectorial $\mathrm{grad} f$ definido por

$$\langle \mathrm{grad} f_p \,, v\rangle = (df)_p\, v, \quad p \in M,\ v \in T_p M.$$

(a) Si $E_1, \ldots, E_n$ es un marco geodésico en $p \in M$ (ver ejercicio anterior), demostrar que:

$$\mathrm{grad} f_p = \sum_{i=1}^{n} E_{ip}(f)\, E_{ip}\,, \quad \mathrm{div} X(p) = \sum_{i=1}^{n} E_{ip}(f_i),$$

donde $X = \sum_i f_i E_i$.

(b) Si $M = \mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $\partial_i = (0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0) = e_i$, demostrar que

$$\mathrm{grad} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, e_i\,, \qquad \mathrm{div} X = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,, \qquad \text{donde } X = \sum_i f_i E_i\,.$$

(8) Dada M riemanniana de dimensión n, definir un operador $\triangle : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ (el *Laplaciano*) de la siguiente forma:

$$\triangle f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} f\,, \quad f \in C^\infty(M).$$

(a) Si $E_1, \ldots, E_n$ es un marco geodésico en $p \in M$ (ver ejercicio (5)), demostrar que:

$$\triangle f(p) = \sum_{i=1}^{n} E_{ip}\left(E_i(f)\right).$$

Deducir que si $M = \mathbb{R}^n$, $\triangle$ coincide con el laplaciano usual, es decir,

$$\triangle f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

(b) Demostrar que

$$\triangle(fg) = f \triangle g + g \triangle f + 2\langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad}\, g\rangle.$$

(9) Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ una métrica bi-invariante en G y $X \in \mathfrak{g}$. Las curvas integrales de X determinan una aplicación $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\varphi(0) = e$, $\varphi'(t) = X_{\varphi(t)}$.

(a) Demostrar que $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y que $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$ ($\varphi : \mathbb{R} \to G$ se dice un *subgrupo monoparamétrico* de G).

(b) Demostrar que las geodésicas en G que pasan por e son los subgrupos monoparamétricos de G.

(c) Demostrar que $\nabla_X Y = \dfrac{1}{2}[X,Y]$ si X, Y son campos invariantes a izquierda en G. Deducir que $R(X,Y)Z = \dfrac{1}{4}[[X,Y],Z]$, X, Y, Z invariantes a izquierda.

(d) Demostrar que si X, Y son ortonormales e invariantes a izquierda y σ es el plano generado por X, Y, entonces la curvatura seccional $K(\sigma)$ está dada por

$$K(\sigma) = \frac{1}{4}|[X,Y]|^2.$$

Por lo tanto si la métrica es bi-invariante $K(\sigma) \geq 0$ y $K(\sigma) = 0$ si y sólo si σ está generado por campos que conmutan.

(10) Dada M riemanniana, definir un tensor R_0 en M de la siguiente forma:

$$\langle R_0(X,Y,W), Z\rangle = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle,$$

$X, Y, W, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Demostrar que M tiene curvatura seccional constante igual a K_0 si y sólo si $R = K_0 R_0$, donde R es el tensor de curvatura de M.

(11) Sea M riemanniana conexa de dimensión $n \geq 3$. Supongamos que para cada p en M, la curvatura seccional $K(\sigma)$ no depende del plano $\sigma \subset T_pM$. Demostrar que M tiene curvatura seccional constante.

(12) Variedades de Einstein. Dada M riemanniana de dimensión n con tensor de curvatura R, se define el tensor de Ricci como $Ric(X,Y) = \mathrm{traza}\,(Z \mapsto R(X,Z)Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. M se dice de *Einstein* si para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $Ric(X,Y) = \lambda\langle X,Y\rangle$, donde $\lambda : M \to \mathbb{R}$ es una función a valores reales. Demostrar:

(a) Si M es de Einstein, conexa y $n \geq 3$, entonces λ es constante en M.

(b) Si M es de Einstein, conexa y $n = 3$, entonces M tiene curvatura seccional constante.