Geometría Riemanniana y Espacios Simétricos
Práctico 3 - Año 2009

(1) Se dice que una variedad riemanniana M es un espacio *localmente simétrico* si $\nabla R \equiv 0$, donde R es el tensor de curvatura de M.
  (a) Demostrar que M es localmente simétrico si y sólo si para toda curva γ en M $R(U,V)W$ es paralelo a lo largo de γ si U, V, W son campos paralelos a lo largo de γ.
  (b) Demostrar que si M es localmente simétrico, conexo y $\dim M = 2$ entonces M tiene curvatura seccional constante.
  (c) Demostrar que si M tiene curvatura seccional constante entonces M es localmente simétrico.

(2) Sea M riemanniana de curvatura seccional constante igual a K_0 y $\gamma : [0,l] \to M$ una geodésica parametrizada por longitud de arco.
  (a) Si J es un campo de Jacobi a lo largo de γ, perpendicular a γ', demostrar que $R(\gamma', J)\gamma' = K_0 J$.
  (b) Si $w(t)$ es un campo paralelo a lo largo de γ, perpendicular a γ' y $|w(t)| = 1$, entonces
$$J(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(t\sqrt{K_0})}{\sqrt{K_0}}\, w(t), & \text{si } K_0 > 0, \\ t\, w(t), & \text{si } K_0 = 0, \\ \frac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-K_0})}{\sqrt{-K_0}}\, w(t), & \text{si } K_0 < 0, \end{cases}$$
  es solución de la ecuación de Jacobi con condiciones iniciales $J(0) = 0,\ J'(0) = w(0)$.

(3) Sea M riemanniana con curvatura seccional $K \equiv 0$. Demostrar que para cada $p \in M$, $\mathrm{Exp}_p : B(0,\epsilon) \to B_\epsilon(p)$ es una isometría, donde $B_\epsilon(p)$ es un entorno normal de p.

(4) Sea M riemanniana con curvatura seccional $K \leq 0$. Demostrar que para todo $p \in M$, el conjunto $\mathcal{C}(p)$ de puntos conjugados a p es vacío.

(5) Sea M riemanniana con curvatura seccional constante $b < 0$. Sea $\gamma : [0,l] \to M$ una geodésica parametrizada por longitud de arco y $v \in T_{\gamma(l)}M$ ortogonal a $\gamma'(l)$, $|v| = 1$. Como $K < 0$, según el ejercicio anterior, $\gamma(l)$ no es conjugado a $\gamma(0)$. Demostrar que el campo de Jacobi J a lo largo de γ determinado por las condiciones $J(0) = 0,\ J(l) = v$ está dado por:
$$J(t) = \frac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-b})}{\operatorname{senh}(l\sqrt{-b})}\, w(t),$$
donde $w(t)$ es el campo paralelo a lo largo de γ tal que
$$w(0) = \frac{u_0}{|u_0|}, \quad u_0 = \left(d\mathrm{Exp}_p\right)^{-1}_{l\gamma'(0)}(v),$$

considerando $u_0 \in T_{\gamma(0)}M$ via la identificación $T_{\gamma(0)}M \approx T_{l\gamma'(0)}\big(T_{\gamma(0)}M\big)$.

(6) Sea M un espacio localmente simétrico y $\gamma : [0,\infty) \to M$ una geodésica. Si $v = \gamma'(0)$ y $p = \gamma(0)$, definir una transformación lineal $K_v : T_pM \to T_pM$ de la siguiente forma:

$$K_v(x) = R(v,x)v, \quad x \in T_pM.$$

(a) Demostrar que K_v es autoadjunto.

(b) Fijar una base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de T_pM que diagonalice K_v, es decir, $K_v(e_i) = \lambda_i e_i$ y extender e_i mediante transporte paralelo. Demostrar que para todo t

$$K_v(e_i(t)) = \lambda_i e_i(t),$$

donde λ_i es independiente de t.

(c) Sea $J(t) = \sum_i x_i(t)e_i(t)$ un campo de Jacobi a lo largo de γ. Demostrar que la ecuación de Jacobi es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \lambda_i x_i = 0, \quad i = 1,\ldots,n.$$

(d) Demostrar que los puntos conjugados a p a lo largo de γ están dados por $\gamma(\pi k/\sqrt{\lambda_i})$, donde k es un entero positivo y λ_i es un autovalor positivo de K_v.

(7) Sea M una variedad riemanniana.

(a) Supongamos que existe $p \in M$ y una isometría $\sigma : M \to M$ tal que $\sigma(p) = p$ y $d\sigma_p(v) = -v$ para todo $v \in T_pM$. Sea $V(t)$ un campo paralelo a lo largo de una geodésica γ tal que $\gamma(0) = p$. Demostrar que $d\sigma_{\gamma(t)}V(t) = -V(-t)$.

(b) Una *simetría local* en $pinM$ es una aplicación $\sigma : B_\epsilon(p) \to B_\epsilon(p)$ tal que $\sigma(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ para toda geodésica radial $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = p$), donde $B_\epsilon(p)$ es un entorno normal de p. Probar que M es localmente simétrico si y sólo si toda simetría local es una isometría.

(8) Sea $\pi : M \to N$ una submersión riemanniana.

(a) Dado $X \in \mathfrak{X}(N)$, demostrar que existe un único campo $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\bar{X}$ es horizontal y $\bar{X}$ está π-relacionado con X.

(b) Dada $\gamma : (a,b) \to N$, $\gamma(0) = p$ y $q \in \pi^{-1}(p)$, demostrar que existe un único levantamiento horizontal $\bar{\gamma} : (a,b) \to M$ de γ tal que $\bar{\gamma}(0) = q$.

(c) Dada $\gamma : (a,b) \to N$, demostrar que

$$\overline{\frac{D\dot{\gamma}}{dt}}(t) = \frac{D\dot{\bar{\gamma}}}{dt}(t).$$