Geometría Riemanniana y Espacios Simétricos
Práctico 4 - Año 2009

(1) (a) Demostrar que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ son grupos de Lie con la multiplicación de números complejos.
(b) Demostrar que si G_1 y G_2 son grupos de Lie entonces $G_1 \times G_2$ es grupo de Lie con la estructura algebraica y diferenciable producto.
(c) Deducir de (a) y (b) que $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ es un grupo de Lie.

(2) Demostrar que los siguientes grupos son grupos de Lie y calcular las álgebras de Lie en cada caso.
(a) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$.
(b) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$.
(c) $\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I,\ \det A = 1\}$. Observar que como la esfera S^3 es difeomorfa a $\mathrm{SU}(2)$, obtenemos una estructura de grupo de Lie en S^3.
(d) $\mathrm{SO}(p, q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t I_{p,q} A = I_{p,q},\ \det A = 1\}$, donde $n = p + q$, $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ con I_s la matriz identidad $s \times s$.
(e) $\mathrm{SU}(p, q) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \bar{A}^t I_{p,q} A = I_{p,q},\ \det A = 1\}$, donde $n = p + q$ e $I_{p,q}$ es la matriz del inciso anterior.

(3) (a) Demostrar que si S es un subgrupo de $\mathbb{R}$ con la suma, entonces S es denso o discreto. Además, si S es discreto, entonces es cíclico.
(b) Dado un irracional a fijo, sea $\phi : \mathbb{R} \to T^2$, $\phi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i a t})$. Demostrar que $(\mathbb{R}, \phi)$ es subgrupo de Lie de T^2, pero no es subgrupo de Lie topológico ($\mathbb{R}$ con la suma).

(4) Demostrar que si G es un grupo de Lie conmutativo conexo, de dimensión n, entonces G es isomorfo a $T^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ (*Ayuda:* demostrar que exp: $\mathfrak{g} \to G$ es un homomorfismo, $\mathfrak{g}$ con la suma, y que Nu(exp) es discreto. Recordar que si D es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$, entonces D es libre, es decir, existen $v_1, \ldots, v_s$ $\mathbb{R}$-linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ tales que $D = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus v_s$).

(5) Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
(a) Si H es un subgrupo de Lie de G con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una forma bilineal simétrica en G tal que $\mathrm{Ad}(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es ortogonal para todo $h \in H$, demostrar que ad_X es antisimétrica para todo $X \in \mathfrak{h}$.
(b) Demostrar que si B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathrm{Ad}(g)$ es ortogonal respecto de B.
(c) Deducir de (a) y (b) que ad_X es antisimétrica respecto de B para todo $X \in \mathfrak{g}$.
(d) Demostrar que si $\mathfrak{l}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ entonces el ortogonal $\mathfrak{l}^\perp$ respecto de B es ideal, y si $B_\mathfrak{l}$ denota la forma de Killing de $\mathfrak{l}$, entonces $B_\mathfrak{l} = B|_{\mathfrak{l} \times \mathfrak{l}}$.

(6) Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ una métrica invariante a izquierda en G, ∇ la conexión de Levi-Civita y X, Y, Z campos invariantes a izquierda. Demostrar:

$$\text{(a)}\qquad \langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{ad}_X Y - \mathrm{ad}_X^* Y - \mathrm{ad}_Y^* X, Z\right\rangle .$$

$$\text{(b)}\qquad \langle R(X,Y)X, Y\rangle = \frac{1}{4}\left|\mathrm{ad}_X^* Y + \mathrm{ad}_Y^* X\right|^2 - \frac{3}{4}\left|[X,Y]\right|^2$$
$$-\langle \mathrm{ad}_X^* X, \mathrm{ad}_Y^* Y\rangle - \frac{1}{2}\left\langle [[Y,X],X], Y\right\rangle - \frac{1}{2}\langle [[X,Y],Y], X\rangle.$$

(7) (a) Demostrar que una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie conexo G es bi-invariante si y sólo si $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es antisimétrica para todo $X \in \mathfrak{g}$.
(b) Demostrar que $\mathbb{R}^n \times K$, donde K es un grupo de Lie compacto conexo, admite métrica bi-invariante.

(8) Demostrar las siguientes afirmaciones:
(a) Si $\mathfrak{r}$ es un ideal soluble en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ es soluble, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.
(b) Si $\mathfrak{r}_1$ y $\mathfrak{r}_2$ son ideales solubles de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$ es un ideal soluble.
(c) Si $\mathfrak{l}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ que contiene al radical, entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ es semisimple.

(9) Demostrar las siguientes afirmaciones:
(a) Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_s$ con $\mathfrak{u}_i$ ideal simple para todo i. La descomposición es única salvo reordenamiento.
(b) Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces $\mathfrak{z} = \{0\}$ y $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, donde $\mathfrak{z} = \{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}$.
(c) Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, para cada derivación D de $\mathfrak{g}$ existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $D = \mathrm{ad}_Y$ (D es una derivación si satisface $D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$).
(d) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, el grupo $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ de automorfismos de $\mathfrak{g}$ es cerrado en $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ y por lo tanto es subgrupo de Lie topológico con álgebra de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \{\text{derivaciones de } \mathfrak{g}\}$. Sea $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ el único subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ con álgebra de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{ad}_X : X \in \mathfrak{g}\}$. Notar que si $\mathfrak{g}$ es semisimple, (b) implica que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})_0$, la componente conexa de la identidad. Si G es un grupo de Lie real conexo semisimple con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ y es cerrado en $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.