PRÁCTICO 1

1. Sean $v = (-2, 1, -1)$ y $w = (0, 1, 3)$.
   a) En un punto arbitrario p, expresar el vector tangente $3v_p - 2w_p$ como combinación lineal de $U_1(p)$, $U_2(p)$, y $U_3(p)$.
   b) Si $p = (1, 1, 0)$, hacer un dibujo preciso en el que se vean los cuatro vectores tangentes v_p, w_p, $-2v_p$ y $v_p + w_p$.
2. Si $V = y^2U_1 - x^2U_3$, y $W = x^2U_1 - zU_2$, encontrar funciones f y g tales que el campo vectorial $fV + gW$ se pueda expresar en términos de U_2 y U_3 solamente.
3. Sea v_p el vector tangente a $\mathbb{R}^3$ con $v = (2, -1, 3)$ y $p = (2, 0, -1)$. Trabajar directamente a partir de la definición para calcular la derivada direccional $v_p[f]$, donde
   (a) $f = y^2z$; (b) $f = x^7$; (c) $f = e^x \cos y$.
4. Calcular ahora las derivadas del ejercicio anterior usando el Lema (3.2 en el libro).
5. Sea $V = y^2U_1 - xU_3$ y sean $f = xy$, $g = z^3$. Calcular las funciones
   (a) $V[f]$; (c) $V[fg]$; (e) $V[f^2g^2]$;
   (b) $V[g]$; (d) $fV[g] - gV[f]$; (f) $V[V[f]]$.
6. Demostrar la identidad $V = \sum V[x_i]U_i$, donde x_1, x_2, x_3 son las funciones coordenadas naturales.
7. Demostrar que si $V[f] = W[f]$ para toda función f, entonces $V \equiv W$.
8. a) ¿Qué se puede decir de una curva α tal que $\alpha''(t) = 0$ para todo t?
   b) Hallar una curva α cuya imagen sea una recta pero que $\alpha''(t) \neq 0$ para todo t.
9. Sea $\beta_a : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la curva definida por
$$\beta_a(t) = (\cos(at), \operatorname{sen}(at)).$$
   a) Dibujar, en gráficos distintos, las curvas β_1 y β_2.
   b) Dibujar, sobre las curvas, los campos de velocidades β_1' y β_2'.
   c) Dibujar, sobre los mismos gráficos, los campos de aceleraciones β_1'' y β_2''.
   d) Calcular la longitud de arco en cada caso y evaluar la longitud de algunos segmentos de arco.
10. Sea $\gamma_a : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la curva con punto inicial $(a, 0)$, $a > 0$, parametrizada por longitud de arco, cuya imagen es la circunferencia de radio a centrada en el origen .
    a) Dibujar en un mismo gráfico las curvas $\gamma_{1/2}$, γ_1 y γ_4.
    b) Dibujar los campos de velocidades.
    c) Calcular $||\gamma''||$ para cada una de las curvas del punto anterior.
11. Sea I un intervalo real. Estudiar las siguientes *cicloides* con dominio I.
    a) $\alpha(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$.

b) $\beta(t) = (t - 3\operatorname{sen}(t), 1 - 3\cos(t))$.

c) $\gamma(t) = (2t - \operatorname{sen}(t), 2 - \cos(t))$.

12. Considerar la espiral $\alpha(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t))$ con $t \geq 0$.

    a) ¿Cuánto miden 4 vueltas de espiral? ¿Y todo el espiral?

    b) Reparametrizar α por longitud de arco.

13. Parametrizar de dos maneras distintas el segmento de recta que une dos puntos dados del plano.

14. Decir si la curva $\alpha(t) = (\operatorname{sen}(3t)\cos(t), \operatorname{sen}(3t)\operatorname{sen}(t))$ es regular y dibujar su trayectoria.

15. Mostrar que la curva $\beta(t) = (t^2, t^3)$ es de clase C^1 pero no es regular y mostrar que su imagen tiene una *esquina*. ¿Cómo se detecta una esquina?

16. *La Tractriz.* Sea $\alpha : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t) + \log(\operatorname{tg}(t/2)))$.

    a) Dibujarla.

    b) Probar que α es una curva diferenciable, y regular excepto en $t = \pi/2$.

    c) Mostrar que la longitud del segmento de recta tangente entre el punto de tangencia y el eje y es constante igual a 1.

17. *La Catenaria.* Sea $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$.

    a) Dibujarla.

    b) Mostrar que la curvatura de α es $\kappa(t) = 1/\cosh^2(t)$.

    c) ¿En qué punto es la curvatura máxima?

18. *La Folia de Descartes.* Sea $a > 0$ y $\alpha : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right).$$

    a) Probar que en $t = 0$ α es tangente al eje x.

    b) Probar que cuando $t \to \infty$, $\alpha(t) \to (0,0)$ y $\alpha'(t) \to (0,0)$.

    c) Probar que cuando $t \to -1$, la curva y las rectas tangentes a ella se acercan a la recta $x + y + a = 0$.

    d) Si se completa el gráfico de α reflejando respecto a la recta $y = x$ se obtiene una curva llamada *Folia de Descartes*. Dibujarla.

19. *Figura Ocho.* Sea $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t)\cos(t))$.

    a) Dibujar α e identificar varios puntos.

    b) Hacer un buen gráfico cualitativo de la función curvatura.

20. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, probar que el vector posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal al vector $\alpha'(t_0)$ (t_0 en el interior del intervalo).

21. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t. Probar que $\|\alpha(t)\|$ es constante (es decir que el gráfico $\alpha(t)$ está contenido en una esfera centrada en el origen) si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo t.

22. Encontrar la (única) curva tal que $\alpha(0) = (1, 0, -5)$ y $\alpha'(t) = (t^2, t, e^t)$.

23. Encontrar una recta que pase por los puntos $(1, -3, -1)$ y $(6, 2, 1)$. ¿Se corta esta recta con la que pasa por los puntos $(-1, 1, 0)$ y $(-5, -1, -1)$?

24. Trazar las siguientes curvas en $\mathbb{R}^2$ y hallar parametrizaciones de cada una de ellas.

    a) $4x^2 + y^2 = 1$;
    b) $3x + 4y = 1$;
    c) $y = e^x$;
    d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \ \ x, y > 0$.

25. Si F es el mapeo $F = (u^2 - v^2, 2uv)$, hallar todos los puntos $\boldsymbol{p}$ tales que

    (i) $F(\boldsymbol{p}) = (0, 0)$, (ii) $F(\boldsymbol{p}) = (8, -6)$; (iii) $F(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$.

26. El mapeo F del ejercicio anterior transforma la recta horizontal $v = 1$ en la parábola $u \to F(u, 1) = (u^2 - 1, 2u)$. Trazar las rectas $u = 1$ y $v = 1$ y sus imágenes por F.

27. Sea el mapeo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$.

    a) Verificar que el mapeo de derivadas de F se determina por

    $$F_*(v_p) = (v_1 - v_2, v_1 + v_2, 2v_3)_{F(p)}.$$

    b) En general, si $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, demostrar que

    $$F_*(v_p) = F(v)_{F(p)}.$$

28. Demostrar que un mapeo $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ preserva las derivadas direccionales en el siguiente sentido: si v_p es un vector tangente a $\mathbb{R}^n$ y g es una función diferenciable en $\mathbb{R}^m$, entonces $F_*(v_p)[g] = v_p[g(F)]$.

29. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en la recta real $\mathbb{R}$, demostrar que $f'(v_p)$ es el vector tangente $f'(p)v$ en el punto $f(p)$.