PRÁCTICO 2

1. Hallar el parámetro de longitud de arco para la curva $\alpha(t) = \left(t, t^2, 0\right)$ (dejar la integral indicada).

2. Sea α una curva regular con $\|\alpha'\| = a = \text{cte}$. Mostrar que si s es la longitud de arco medida desde algún punto, entonces $s(t) = ta + b$ para alguna constante b.

3. Sean α y β dos curvas en el espacio tales que $\alpha'(t)$ y $\beta'(t)$ son paralelos para todo t. Probar que entonces α y β son *paralelas*, es decir existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(t) = \alpha(t) + v$ para todo t.

4. Graficar la curva $\alpha(t) = \frac{e^t}{\sqrt{3}}(\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$. Hallar la reparametrización por longitud de arco $\beta(s)$ con $\beta(0) = \alpha(0)$. Calcular el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de β.

5. Sean β_1 y β_2 reparametrizaciones por longitud de arco de una misma curva α. Demostrar que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_2(s) = \beta_1(s + s_0)$ para todo s. ¿Qué significado geométrico tiene s_0?

6. Sea α una curva regular. Probar que α es una reparametrización de una recta $t \to \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}$ si y sólo si α'' es siempre tangente a α (es decir, α'' y α' son colineales).

7. ¿Cambian la curvatura y la torsión de una curva parametrizada por longitud de arco en el espacio si se la recorre en sentido opuesto? Para la curvatura, comparar con el caso de curvas planas.

8. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regular. Supongamos que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $\|\alpha(t)\|$ alcanza el máximo en t_0. Probar que $\kappa(t_0) \geq 1/\|\alpha(t_0)\|$.

9. Si A es el campo vectorial $\tau T + \kappa B$ en una curva β parametrizada por longitud de arco, demostrar que las fórmulas de Frenet se convierten en
$$\begin{aligned} T' &= A \times T \\ N' &= A \times N \\ B' &= A \times B \end{aligned}.$$

10. Sean β y $\bar{\beta}$ curvas parametrizadas por longitud de arco de curvatura y torsión nunca nulas. Demostrar las siguientes afirmaciones:

    a) Si $T = \bar{T}$ entonces β y $\bar{\beta}$ son paralelas (ver ejercicio 3).

    b) Si $B = \bar{B}$ entonces $\bar{\beta}$ es paralela a β o bien a la curva $s \to -\beta(s)$.

11. Considerar la *hélice* circular $\alpha(t) = (a\cos(t), a\operatorname{sen}(t), t)$.

    a) Calcular la longitud de arco.

    b) ¿Se puede reparametrizar por longitud de arco?

    c) Calcular el triedro de Frenet y las funciones curvatura y torsión.

    d) ¿Cómo cambian la curvatura y la torsión con a?

    e) ¿Cómo se puede modificar la curva α para que tenga menor/mayor torsión?

12. Una curva α se llama *hélice* si las rectas tangentes a α forman un ángulo constante con una dirección fija. Asumiendo $\tau(t) \neq 0$ para todo t probar:

a) α es una hélice sii $\kappa/\tau = \text{constante}$.

b) α es una hélice sii las rectas que contienen a $N(t)$ y pasan por $\alpha(t)$ son paralelas a un plano fijo.

c) α es una hélice sii las rectas que contienen a $B(t)$ y pasan por $\alpha(t)$ forman un ángulo constante con una dirección fija.

13. Mostrar que la curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ es una hélice.

14. Probar que una curva regular α está contenida en una recta si y sólo si existe un punto $\boldsymbol{p}$ tal que cada recta tangente a α pasa por $\boldsymbol{p}$.

15. Sea $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), 0)$ una curva regular (contenida en el plano $z = 0$) y sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal inyectiva.

    a) Mostrar que la curva $\gamma = T \circ \beta$ es regular.

    b) ¿Cómo son las torsiones de β y γ?

16. Probar que la curva de menor longitud que une dos puntos de $\mathbb{R}^3$ es el segmento de recta que los une. Para ello considerar $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, $\boldsymbol{p} = \alpha(a)$, $\boldsymbol{q} = \alpha(b)$ y probar que:

    a) Dado $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$, se tiene: $(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v\, dt \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$.

    b) $\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$.

17. Calcular el triedro de Frenet de la curva $\beta(t) = \left(\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \operatorname{sen}(t), -\frac{3}{5}\cos(t)\right)$ y mostrar que es una circunferencia. ¿Cuáles son su centro y su radio?

18. Sea $\alpha : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida por $\alpha(t) = \left(\frac{(1+t)^{3/2}}{3}, \frac{(1-t)^{3/2}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$. Probar que α está parametrizada por longitud de arco y calcular su triedro de Frenet.

19. Considerar la siguiente parametrización por longitud de arco de una circunferencia: $\gamma(t) = \boldsymbol{c} + r\cos(t/r)\,\boldsymbol{e}_1 + r\operatorname{sen}(t/r)\,\boldsymbol{e}_2$, donde $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$. Si β es una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa(0) > 0$, demostrar que hay una y sólo una circunferencia γ que aproxima a β en las inmediaciones de $\beta(0)$ en el siguiente sentido:

$$\gamma(0) = \beta(0), \qquad \gamma'(0) = \beta('0), \qquad \gamma''(0) = \beta''(0).$$

    Demostrar que γ yace en el plano osculante de β en $\beta(0)$, hallar el centro $\boldsymbol{c}$ y el radio r de γ. Esta circunferencia se denomina *circunferencia osculatriz* de β en 0 y $\boldsymbol{c}$ es el *centro de curvatura* de β en $\beta(0)$.

20. Dado el vector tangente $v = (1, -1, 2)$ en el punto $\boldsymbol{p} = (1, 3, -1)$, calcular, a partir de la definición, $\nabla_v W$ en los siguientes casos:

$$(a)\; W = x^2 U_1 + y U_2 \qquad\qquad (b)\; W = x U_1 + x^2 U_2 - z^2 U_3.$$

21. Dados $V = -yU_1 + xU_3$, $W = \cos(x)U_1 + \operatorname{sen}(x)U_2$, expresar las siguientes derivadas covariantes en términos de U_1, U_2 y U_3:

$$(a)\; \nabla_V W \qquad (b)\; \nabla_V(z^2 W) \qquad (c)\; \nabla_V(\nabla_V(zW)) \qquad (d)\; \nabla_V(xV - zW).$$

22. Si W es un campo vectorial de longitud constante, $\|W\| = c$, demostrar que para todo campo vectorial V la derivada covariante $\nabla_V W$ es ortogonal a W.