PRÁCTICO 3

En los siguientes ejercicios, A, B y C denotan transformaciones ortogonales (o sus matrices) y $T_{\boldsymbol{a}}$ es una traslación en $\boldsymbol{a}$.

1. *a*) Demostrar que $CT_{\boldsymbol{a}} = T_{C(\boldsymbol{a})}C$.
   b) Dadas las isometrías $F = T_{\boldsymbol{a}}A$ y $G = T_{\boldsymbol{b}}B$, hallar las partes de traslación y ortogonal de FG y de GF.
   c) Demostrar que una isometría $F = T_{\boldsymbol{a}}C$ tiene un mapeo inverso F^{-1} que también es isometría. Hallar las partes de traslación y ortogonal de F^{-1}.

2. Dados
$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{p} = (3,1,-6) \\ \boldsymbol{q} = (1,0,3) \end{cases}$$
   demostrar que C es ortogonal. Luego calcular $C(\boldsymbol{p})$, $C(\boldsymbol{q})$, y verificar que $C(\boldsymbol{p})\cdot C(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$.

3. Dados $F = T_{\boldsymbol{a}}C$, donde $\boldsymbol{a} = (1,3,-1)$,
$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   y $\boldsymbol{p} = (2,-2,8)$, calcular las coordenadas del punto $\boldsymbol{q}$ en los siguientes casos:

   a) $\boldsymbol{q} = F(\boldsymbol{p})$, b) $\boldsymbol{q} = F^{-1}(\boldsymbol{p})$, c) $\boldsymbol{q} = CT_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{p})$.

4. En cada uno de los siguientes casos decidir si F es una isometría de $\mathbb{R}^3$. De ser así, hallar sus partes de traslación y ortogonal.

   a) $F(\boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{p}$, *b*) $F(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}$, con $||\boldsymbol{a}|| = 1$,
   c) $F(\boldsymbol{p}) = (p_3 - 1, p_2 - 2, p_1 - 3)$, *d*) $F(\boldsymbol{p}) = (p_1, p_2, 1)$.

5. *a*) Demostrar que el conjunto $\mathcal{E}$ de todas las isometrías de $\mathbb{R}^3$ es un grupo si consideramos la composición de funciones como operación.
   b) Demostrar que el conjunto $\mathcal{T}$ de todas las traslaciones de $\mathbb{R}^3$ y el conjunto $O(3)$ de todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ son subgrupos de $\mathcal{E}$. Determinar $\mathcal{T}\cap O(3)$.

6. Demostrar que si T es una traslación, para cada vector tangente $\boldsymbol{v}$, $T_*(\boldsymbol{v})$ es paralelo a $\boldsymbol{v}$.

7. Demostrar las fórmulas $(GF)_* = G_*F_*$ y $(F^{-1})_* = (F_*)^{-1}$ en el caso especial en que F y G son isometrías de $\mathbb{R}^3$.

8. *a*) Demostrar que una isometría $F = TC$ transforma el plano que pasa por $\boldsymbol{p}$ y es ortogonal a $\boldsymbol{q}$ en en el plano que pasa por $F(\boldsymbol{p})$ y es ortogonal a $C(\boldsymbol{q})$.
   b) Si P es el plano ortogonal a $(0,1,0)$ que pasa por $(\frac{1}{2},-1,0)$, hallar una isometría $F = TC$ tal que $F(P)$ sea el plano ortogonal a $(1,0,-1)$ que pasa por $(1,-2,1)$.

9. Dados los sistemas de referencia $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{f}$:

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1), & \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{3}(-2,1,2), & \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2), & \text{en } \boldsymbol{p} = (0,1,0), \\ \boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), & \boldsymbol{f}_2 = (0,1,0), & \boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), & \text{en } \boldsymbol{q} = (3,-1,1), \end{array}$$

hallar la isometría $F = TC$ que transforma $\boldsymbol{e}$ en $\boldsymbol{f}$.

10. Demostrar que $\operatorname{sgn}(FG) = (\operatorname{sgn} F)(\operatorname{sgn} G) = \operatorname{sgn}(GF)$ y deducir que $\operatorname{sgn}(F^{-1}) = \operatorname{sgn} F$.

11. Si H_0 es una isometría de $\mathbb{R}^3$ que invierte la orientación, demostrar que *toda* isometría que invierte la orientación se expresa en forma *única* como $H_0 F$, donde F preserva la orientación.

12. Una *rotación* es una transformación ortogonal C tal que $\det C = 1$. Demostrar que C es efectivamente una rotación en torno a una recta que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$, es decir, hallar $\theta \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ de modo que C está dada por:

$$C(\boldsymbol{e}_1) = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{e}_2, \qquad C(\boldsymbol{e}_2) = -\operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_2, \qquad C(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3.$$

13. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) El conjunto $O^+(3)$ de todas las rotaciones de $\mathbb{R}^3$ es subgrupo de $O(3)$.

   b) El conjunto $\mathcal{E}^+$ de todas las isometrías que preservan la orientación en $\mathbb{R}^3$ es subgrupo de $\mathcal{E}$.

14. Hallar una sola fórmula que describa *todas* las isometrías de $\mathbb{R}$. Hacer lo mismo con $\mathbb{R}^2$, usando $\epsilon = \pm 1$. ¿Cuáles son las isometrías que preservan la orientación?

15. Sea $F = TC$ una isometría de $\mathbb{R}^3$ y β una curva parametrizada por longitud de arco. Demostrar:

   a) Si β es una hélice cilíndrica, entonces $F(\beta)$ es una hélice cilíndrica.

   b) Si $\tilde{\beta}$ es la imagen esférica de β, entonces $C(\tilde{\beta})$ es la imagen esférica de $F(\beta)$.

16. Demostrar que si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un mapeo tal que F_* preserva el producto interno, entonces F es una isometría.

17. Dada la curva $\beta(t) = (t + \sqrt{3}\operatorname{sen} t, 2\cos t, \sqrt{3}\, t - \operatorname{sen} t)$, demostrar, calculando la curvatura y la torsión, que β es una hélice. Hallar una hélice α de la forma $(a\cos t, a\operatorname{sen} t, b\,t)$ y una isometría F tales que $F(\alpha) = \beta$.

18. *a*) Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curvas congruentes con $\kappa > 0$. Demostrar que hay una *única* isometría F tal que $F(\alpha) = \beta$, excepto cuando $\tau = 0$, en cuyo caso hay *exactamente dos*.

   b) Hallar las dos isometrías que llevan la parábola $\alpha(t) = (\sqrt{2}\, t, t^2, 0)$ en la parábola $\beta(t) = (-t, t, t^2)$.

19. Se dice que dos curvas $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ tienen *trayectorias congruentes* si existe una isometría F tal que $F(\alpha)$ es una reparametrización de β.

   a) Demostrar que dos curvas α y β parametrizadas por longitud de arco tienen trayectorias congruentes si y sólo si existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que:
   $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(\epsilon s + s_0)$ y $\tau_\alpha(s) = \pm\tau_\beta(\epsilon s + s_0)$, donde $\epsilon = 1$ or -1.

   b) Dadas $\alpha(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$ y $\beta(t) = (e^t, \frac{e^{-t}}{2}, t)$, demostrar que α y β tienen trayectorias congruentes. Exhibir la isometría $F = TC$ y la reparametrización necesaria para verificar la definición.