PRÁCTICO 4

Superficies en $\mathbb{R}^3$. Ejemplos, cartas y parametrizaciones.

1. Graficar la superficie $M : z = ax^2 + by^2$ en cada uno de los siguientes casos:

$$(i)\ a > b > 0, \qquad (ii)\ a > 0 > b, \qquad (iii)\ a > b = 0, \qquad (iv)\ a = b = 0.$$

2. Decir en cada caso en qué región el mapa $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una carta.
   a) $\boldsymbol{x}(u, v) = (u, uv, v)$.
   b) $\boldsymbol{x}(u, v) = (u^2, u^3, v)$.
   c) $\boldsymbol{x}(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$.
   d) $\boldsymbol{x}(u, v) = (\cos(2\pi u), \operatorname{sen}(2\pi u), v)$.

3. Mostrar que el conjunto $S = \{(x, y, z) : z = x^2 - y^2\}$ es una superficie y que los dos mapas que siguen son parametrizaciones de S.
   a) $\boldsymbol{x}(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
   b) $\boldsymbol{x}(u, v) = (u \cosh(v), u \operatorname{senh}(v), u^2)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y $u \neq 0$.

4. ¿Para qué valores de c es $M : z(z - 2) + xy = c$ una superficie?

5. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$ y $g(x, y, z) = xyz^2$. Decir para qué valores de c son los conjuntos $f = 0$ y $g = 0$ superficies.

6. Decir por qué ninguno de los siguientes conjuntos es una superficie:
   a) El cono $z^2 = x^2 + y^2$, con $z \geq 0$.
   b) El disco cerrado $x^2 + y^2 \leq 1$.
   c) El conjunto $xy = 0$ con $x, y \geq 0$.

7. Sea $f(x, y, z) = z^2$. Probar que 0 no es un valor regular de f, sin embargo $f^{-1}(0)$ es una superficie regular.

8. Mostrar que las coordenadas esféricas constituyen un sistema coordenado de la esfera unitaria S^2 y encontrar sistemas coordenados similares para cubrirla. Entender cómo se escriben en coordenadas los paralelos, los meridianos y los círculos máximos.

9. Una manera de definir un sistema de coordenadas en la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ es mediante la proyección estereográfica, que mapea el punto $(x, y, z) \neq (0, 0, 2)$ de la esfera en el punto de intersección del plano x-y con la recta que pasa por (x, y, z) y $(0, 0, 2)$. Llamamos π a esta proyección.
   a) Mostrar que $\boldsymbol{x} = \pi^{-1}$ está dado por la fórmula
   $$\boldsymbol{x}(u, v) = \frac{2}{u^2 + v^2 + 4}(2u, 2v, u^2 + v^2).$$
   b) Mostrar que con esta carta y otra similar es posible cubrir la esfera con dos cartas.

c) Entender cómo se escriben en coordenadas los paralelos, los meridianos y los círculos máximos.

d) Desarrollar todo lo anterior de manera análoga para la esfera unitaria centrada en el origen.

10. Sea $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, una curva regular inyectiva, con inversa continua y tal que $\gamma_1(t) > 0$ para todo t. Probar que el conjunto

$$\{(\gamma_1(t)\cos(\theta), \gamma_1(t)\operatorname{sen}(\theta), \gamma_2(t)) : t \in (a,b),\ \theta \in \mathbb{R}\},$$

es una superficie regular.

11. *Superficies de revolución.* Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular e inyectiva tal que su imagen no corta a una recta R dada. Identificando $\mathbb{R}^2$ con el plano $z = 0$ en $\mathbb{R}^3$ y haciendo rotar α alrededor de R se obtiene un conjunto S llamado *superficie de revolución generada por* α.

    a) Graficar varios ejemplos.

    b) Probar que S es en efecto una superficie regular hallando cartas.

    c) Definir meridianos y paralelos y calcular sus longitudes.

    d) Extender la definición de superficie de revolución para incluir a la esfera y al toro.

12. Hallar una parametrización de la superficie que se obtiene con la revolución de:

    a) $C : y = \cosh x$ alrededor del eje x (*catenoide*).

    b) $C : (z-2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y (*toro*).

    c) $C : z = x^2$ alrededor del eje z (*paraboloide de revolución*).

13. *Superficies regladas.* Una superficie se dice *reglada* si es generada por una familia de rectas o segmentos de recta que se mueven diferenciablemente a lo largo de una curva. Estas superficies admiten una parametrización como sigue. Dadas $\beta,\ \delta : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curvas regulares, la imagen de $\boldsymbol{x}(u,v) = \beta(u) + v\delta(u)$ (o $\boldsymbol{x}(u,v) = \beta(v) + u\delta(v)$) es una *superficie reglada*, con β su curva base y δ su directriz.

    a) Mostrar que la silla de montar $M : z = xy$, está doblemente reglada, es decir hay dos parametrizaciones regladas distintas con distintos rayos.

    b) Un *cono* es una superficie reglada con una parametrización de la forma

    $$\boldsymbol{x}(u,v) = p + v\delta(u).$$

    Mostrar que la regularidad de $\boldsymbol{x}$ es equivalente a que v y $\delta \times \delta'$ no sean nunca nulos.

    c) Un *cilindro* es una superficie reglada con una parametrización de la forma

    $$\boldsymbol{x}(u,v) = \beta(u) + vq.$$

    Mostrar que la regularidad de $\boldsymbol{x}$ es equivalente a que $\beta' \times q$ sea nunca nulo.

    d) Graficar varios ejemplos de cilindros y de conos.

14. Si F es una isometría de $\mathbb{R}^3$ y $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie, probar que $F(M)$ es una superficie.

Superficies en $\mathbb{R}^3$. Funciones diferenciables, espacios tangentes.

15. Sea S una superficie definida por el gráfico de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Mostrar que el plano tangente en el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ está dado por:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

16. Mostrar que los planos tangentes a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en los puntos $(x, y, 0)$ son todos paralelos al eje z.

17. Sea S una superficie definida implícitamente por $f(x, y, z) = 0$ (0 valor regular de f). Mostrar que el plano tangente en (x_0, y_0, z_0) está dado por:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

18. Mostrar que la definición de función diferenciable en una superficie S, es equivalente a la siguiente: $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in S$ si f es la restricción a S de una función diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a p.

19. Consideremos la esfera S^2 y el elipsoide E:

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}, \qquad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

   a) Mostrar que la aplicación antipodal A de S^2, $A : x \mapsto -x$, es un difeomorfismo.
   b) Probar que S^2 y E son difeomorfas.

20. *a*) Sea S una superficie. Probar que las siguientes dos funciones en S son diferenciables:
      (i) La función *altura respecto a* v. Si v es un vector unitario de $\mathbb{R}^3$ definimos $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(p) = p \cdot v$. ¿Por qué se llama función altura?
      (ii) La función $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como el cuadrado de la distancia a un punto fijo $p_0 \in S$. Para cada $p \in S$, $f(p) = \|p - p_0\|^2$.
   b) Calcular las diferenciales de las funciones h y f y determinar sus puntos críticos.

21. Probar que si $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es lineal y S es una superficie invariante por L, entonces la restricción de L a S es diferenciable y $L_*(w) = L(w)$, para todo $p \in S$ y $w \in T_pS$.

22. Mostrar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo a un plano.

23. Sea S una superficie regular y sea $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección que mapea cada punto $(x, y, z) \in S$ en el punto (x, y). ¿Es la función π diferenciable?

24. Consideremos la esfera S^2 y el hiperboloide de revolución $H = \{(x, y, z) : x^2+y^2-z^2 = 1\}$. Si N y S son los polos norte y sur de S^2 respectivamente, definimos la función $f : S^2-\{N, S\} \longrightarrow H$ como sigue: para cada p sea l la recta que pasa por p, es perpendicular al eje z y corta al eje z en q; consideremos la semirecta l' de l que empieza en q y pasa por p. Entonces $f(p) = l' \cap H$. Probar que f es diferenciable. ¿Es f un difeomorfismo llegando a algún subconjunto de H?

25. Sea S la superficie parametrizada por $\boldsymbol{x}(u, v) = (v\cos(u), v\,\mathrm{sen}(u), au)$, con $a \neq 0$. S se llama helicoide.

   a) Dibujar S y sus curvas paramétricas.

b) Calcular los planos tangentes y las normales a S.

c) Mostrar que S es reglada.

d) Presentar al helicoide en forma implícita: $S = f^{-1}(c)$.

26. Probar que todas las normales a la superficie de revolución parametrizada por

$$\boldsymbol{x}(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\,\mathrm{sen}(v), g(u)),$$

con $f(u) \neq 0$ y $g'(u) \neq 0$, intersecan al eje z.

27. Sean M y N superficies en $\mathbb{R}^3$ y sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un mapeo tal que $F(M) \subset N$. Demostrar que la restricción de F a M, $F_{|M} : M \longrightarrow N$, es un mapeo de superficies.

28. Sea M una *superficie simple*, es decir, M es la imagen de una sola carta propia $\bar{x} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Si $\bar{y} : D \longrightarrow N$ es cualquier mapeo en una superficie N, demostrar que la función $F : M \longrightarrow N$ dada por

$$F(\bar{x}(u,v)) = \bar{y}(u,v) \qquad \forall (u,v) \in D$$

es un mapeo de superficies.

29. Si $\bar{x} : D \longrightarrow M$ es una parametrización, demostrar que la restricción de $\bar{x}$ a una vecindad suficientemente pequeña de (u_0, v_0) en D es una carta de M.

30. Si $G : P \longrightarrow M$ es una mapeo regular suryectivo y $H : P \longrightarrow N$ es una mapeo arbitrario, entonces la fórmula $F(G(p)) = H(p)$ es *consistente* si se cumple que "$G(p) = G(q)$ implica $H(p) = H(q)$, $p, q \in P$". Demostrar que en este caso $F : M \longrightarrow N$ es un mapeo bien definido.

31. Sea F un mapeo suryectivo de una superficie M en una superficie N. Demostrar que:

    a) Si M es conexa entonces N es conexa.

    b) Si M es compacta entonces N es compacta.

32. Sea $F : M \longrightarrow N$ un mapeo regular. Demostrar que si N es orientable entonces M es orientable.

33. Dada una superficie conexa M, sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demostrar que:

    a) Si $f_* = 0$ entonces f es constante.

    b) Si f es nunca nula, entonces o bien $f > 0$, o bien $f < 0$.

34. Una *cinta de Möbius* M se puede construir como superficie reglada:

$$\bar{x}(u,v) = \beta(u) + v\delta(u), \qquad -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$$

donde $\beta(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ y $\delta(u) = \left(\cos \frac{u}{2}\right)\beta(u) + \left(\sin \frac{u}{2}\right) U_3$.

   (i) Calcular $E = \frac{v^2}{4} + [1 + v\cos\frac{u}{2}]^2$, $F = 0$, $G = 1$, y deducir que $\bar{x}$ es regular.

   (ii) Mostrar en un gráfico de M la curva u-paramétrica $v = \frac{1}{4}$. Demostrar que las curvas u-paramétricas son cerradas, y que (a excepción de β) tienen período 4π.

35. Sea M^* la superficie que se obtiene al quitar la circunferencia central β de la cinta de Möbius del problema anterior. ¿Es M^* conexa? ¿Es orientable?