APRENDIENDO MATEMÁTICA

Ingreso a la Universidad

M. S. IRIONDO   P. G. BERCOFF

ED. INSTITUTO UNIVERSITARIO AERONÁUTICO.

© instituto universitario aeronáutico
isbn 987-9383-14-1
Córdoba, MMI

Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes la reproduccón parcial o total de esta obra por cualquier medio o procesamiento.

Impreso en el Instituto Universitario Aeronáutico
Avenida Fuerza Aérea Km 6 1/2, Córdoba, Argentina.

Prefacio

Este texto contiene una revisión de los tópicos más importantes que, a nuestro parecer, el alumno debe conocer antes de comenzar un curso de cálculo. Los temas que se incluyen son: el sistema de los números reales, potencias, raíces, ecuaciones, geometría plana, coordenadas cartesianas en el plano, ecuaciones de la recta y la circunferencia, valor absoluto, logaritmo, funciones y sus gráficas (en especial la recta y la parábola) y funciones trigonométricas. Consideramos que este material puede ser cubierto en 60 horas cátedra.

En cada Capítulo se han combinado ejercicios de neto carácter algebraico con ejercicios de aplicación y se ha especificado claramente en qué momento el alumno puede hacer uso de una calculadora.

Al final de los Capítulos 3, 6 y 8 hay ejercicios sumplementarios que sirven de repaso, y para que el docente evalúe hasta qué punto el alumno afianzó y sabe usar los conocimientos adquiridos en los Capítulos anteriores; también hemos incluido al final del texto todas las respuestas a los ejercicios.

Queremos recalcar que este material es repaso de los conocimentos que los alumnos han adquirido en la escuela media, por lo tanto el texto entre los ejemplos y ejercicios es bastante breve. Nuestra intención no es la de introducir nuevos conocimientos sino la de repasar los adquiridos ante la iniciación de los estudios universitarios.

A los estudiantes

Comenzar estudios universitarios, donde la matemática es una parte básica de la formación, requiere que ustedes tengan conocimientos sólidos en manipulación algebraica, geometría y trigonometría para sobre ellos construir el conocimiento futuro.

Por este motivo es fundamental consolidar los conocimientos adquiridos en la escuela media y está en el trabajo y esfuerzo de ustedes el lograrlo. En este sentido no hay ni profesores ni libro que puedan obviarles esta tarea.

Les recomendamos especialmente leer cada capítulo minuciosamente, discutir todas sus dudas y hacer todos lo ejercicios indicados, usando la calculadora **solamente** en aquellos que específicamente esté permitido.

Agradecimientos

Queremos agradecer por la revisión de este material a:

Dra. Alicia Dickenstein, FCEyN, Universidad Nacional de Buenos Aires.

Dra. Esther Galina, FaMAF, Universidad Nacional de Códoba.

También agradecemos a los docentes del Instituto Universitario Aeronáutico, por los aportes hechos en estos años en la corrección de este material, especialmente al Dr. Arámburu, con quien M. Iriondo inició hace cuatro años la confección de este libro.

Finalmente, agradecemos al Lic. Manuel Tiglio quien colaboró con el tipeado de de la primera versión en LaTeX y a Natalia Kunzmann en la confección de las gráficas y correcciones de tipeo.

Apreciamos recibir correcciones y sugerencias a nuestras direcciones electrónicas:

`miriondo@iua.edu.ar` o `bercoff@famaf.unc.edu.ar`.

Córdoba, Diciembre de 2000.

M. S. Iriondo P. G. Bercoff

Contenidos

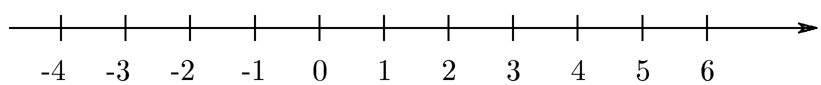
Capítulo 1

Números reales

1.1 Introducción

Cualquier cálculo que deseemos hacer depende de las propiedades del sistema de los números reales.

Los números reales pueden ser representados geométricamente como puntos sobre una recta. Se acostumbra a comenzar eligiendo dos: un punto que corresponda al 0 y otro que corresponda al número 1.



Usaremos el símbolo $I\!\!R$ para denotar indistintamente el sistema de los números reales o la recta real.

Las propiedades de los números reales pueden dividirse en: las propiedades **algebraicas**, la de **ordenamiento** y la de **completitud**.

Las propiedades algebraicas son aquellas con las que estamos más familiarizados. Estas propiedades nos aseguran que los números reales puedan sumarse, multiplicarse y dividirse, y de esa manera producir nuevos números reales.

La propiedad de ordenamiento se refiere al orden en que aparecen los números reales en la recta real. Si x aparece a la izquierda de y decimos que x es menor que $y, (x < y)$ o que y es mayor que x $(y > x)$.

La propiedad de completitud es más difícil de entender pero nos dice que no puede haber "agujeros" en la recta real, o sea que a cada punto le corresponde un número real.

Distinguiremos los siguientes subconjuntos de números reales :

- El conjunto de los números naturales, que es el conjunto formado por los números: $1, 2, 3, \ldots$ Lo denotaremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- El conjunto de los números racionales, que es el conjunto formado por todos los cocientes de números enteros con denominador no nulo. En símbolos:
  $$\mathbb{Q} = \{p/q, \text{ tal que } p \text{ y } q \text{ pertenecen a } \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$$
- El conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$) que es el conjunto de todos los números reales que no son racionales, como por ejemplo: $\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}, \ldots$

Decimos entonces, que 1 pertenece a $\mathbb{N}$ o, en forma abreviada, $1 \in \mathbb{N}$. Observe que $\mathbb{N}$ esta incluido en $\mathbb{Z}$, o sea que todo elemento que pertenece a $\mathbb{N}$ también pertenece a $\mathbb{Z}$. La inclusión la denotaremos $\subset$ y diremos que $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$ o, en forma abreviada $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Los conjuntos de los números arriba mencionados satisfacen que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}.$$

EJERCICIOS

1. Ubique los siguientes números sobre la recta real.

   (a) -1.5 (c) 2.1 (e) $-2/5$

   (b) 3 (d) $\sqrt{2}$ (f) π

2. ¿Cuál de los dos números es mayor?

   (a) e ó 3 (b) $\sqrt{15}$ ó 4 (c) 6.2 ó $\sqrt{41}$

1.2 Números enteros: operaciones elementales

En muchas situaciones prácticas nos hemos visto en la necesidad de introducir números negativos, por ejemplo:

- La temperatura es de 10°C bajo cero o la temperatura es de −10°C.
- La cantidad de población disminuyó en 150 personas, o el cambio en la población fue de −150 personas.

Asociamos los números negativos con el concepto de **disminución**. Entonces, a un número natural a le asociamos un número negativo, su opuesto, $-a$ definido de manera que

$$a + (-a) = 0.$$

Esta definición de opuesto se extiende a $\mathbb{Z}$, es decir que esta definición es válida para los números a tanto positivos como negativos y el cero.

EJEMPLOS

1. El opuesto de 2 es -2.
2. El opuesto de -5 es 5, o sea $-(-5) = 5$.
3. El opuesto de 0 es 0, o sea $-0 = 0$.

Al hacer esto podemos redefinir la resta de dos números naturales como la suma de dos enteros.

EJEMPLOS
Calcule

1. $23 + (-12)$
2. $-35 + (-12)$

Solución: Sumar -12 es lo mismo que restar su opuesto, o sea 12.

1. $23 + (-12) = 23 - 12 = 11$
2. $-35 + (-12) = -35 - 12 = -47.$

Podemos definir en general la resta de dos números enteros como una suma.

EJEMPLOS
Calcule

1. $9 - (-15)$
2. $-35 - (-15)$
3. $-1256 - (-47)$

Solución:

1. Restar -15 es lo mismo que sumar su opuesto, o sea 15. Resulta entonces
$$9 - (-15) = 9 + 15 = 24.$$
2. $-35 - (-15) = -35 + 15 = -20.$
3. Observe en el ejercicio 2 que $-20 = -(35 - 15)$ por lo tanto $-35 + 15 = -(35 - 15)$. Teniendo esto en cuenta, podemos resolver el ejercicio 3
$$-1256 - (-47) = -1256 + 47 = -(1256 - 47) = -1209.$$

Extenderemos el concepto de multiplicación de números naturales a la multiplicación de números enteros.

Sabemos qué significa 2×3:
$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 3 + 3 = 3 \times 2.$$
Por lo tanto
$$(-2) \times 3 = -2 - 2 - 2 = -6 = -(2 \times 3).$$

Ahora, si al trabajar con enteros queremos conservar la propiedad conmutativa de la multiplicación de los números naturales, debe cumplirse que:
$$2 \times (-3) = (-3) \times 2 = -3 - 3 = -6.$$

Resumiendo, $(-2) \times 3 = 2 \times (-3) = -(2 \times 3) = -6$, o equivalentemente

$$-2 \times 3 = -3 \times 2 = -6.$$

Nos queda solamente definir la multiplicación por el número cero y la multiplicación de dos números negativos.

Para conservar la propiedad distributiva de los números naturales tendremos que definir $2 \times 0 = 0$ y $(-3) \times (-2) = 6$, ya que

$$2 \times 0 = 2 \times (3 + (-3)) = 2 \times 3 - 2 \times 3 = 0$$

y

$$-6 = -3 \times 2 = -3 \times (4 - 2) = -3 \times (4 + (-2)) = -12 + (-3) \times (-2),$$

o sea que, para que el primer miembro de esta expresión sea igual al último, debe cumplirse que:

$$(-3) \times (-2) = 6.$$

EJEMPLOS

1. En las siguientes expresiones, efectúe las operaciones indicadas.

   (a) $(-3) \times 6$ (b) $3 \times (-6)$ (c) $(-3) \times (-6)$

   Solución:

   (a) $(-3) \times 6 = -(3 \times 6) = -18$

   (b) $3 \times (-6) = -(3 \times 6) = -18$

   (c) $(-3) \times (-6) = 3 \times 6 = 18$.

2. Calcule el valor de la siguiente expresión cuando $x = -4$ e $y = 5$:

   $$3(y + 2) - 3x + 4y$$

   Solución: Cuando $x = -4$ e $y = 5$, tenemos que:

   $3(y + 2) - 3x + 4y =$

   $3 \times (5 + 2) - 3 \times (-4) + 4 \times 5 = 3 \times 7 - (-12) + 20 = 21 + 12 + 20 = 53.$

3. Calcule las siguientes potencias:

   (a) $(-2)^3$ (b) $-(-2)^3$ (c) -2^4

Solución:

(a) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

(b) $-(-2)^3 = -(-8) = 8$.

(c) $-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$

4. Calcule: $\big\{5 - 3\,\big[2 - (b-1)\,\big]\big\}\big[3 - 2\;(2-5)\,\big]$, donde b es un número cualquiera.

Solución:

$= \big[5 - 3\,(2 - b + 1)\big]\big[3 - 2\,(-3)\big] = \big[5 - 3\,(3 - b)\big](3 + 6) =$

$= 9\,(5 - 9 + 3\,b) = 9\,(-4 + 3\,b) = -36 + 27\,b.$

Resumimos en el siguiente cuadro las propiedades algebraicas de los números enteros (estas propiedades también son válidas para los números reales).

Propiedades de la suma y el producto

- Propiedad conmutativa:

$$a + b = b + a$$

$$a\,b = b\,a$$

- Propiedad asociativa:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$$

- Propiedad distributiva:

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$$

- Regla de los signos:

$$(-a)\,b = a\,(-b) = -(a\,b)$$

$$(-a)\,(-b) = a\,b$$

Nota: En el cuadro anterior a y b denotan dos números arbitrarios, para indicar su multiplicación se emplea indistintamente la notación "$a\,b$", "$a \cdot b$" o "$a \times b$". En general se usa la primera forma cuando se trabaja con letras y la tercera cuando se usan números; la segunda expresión debe evitarse al trabajar con números, cuando el símbolo "$\cdot$" pueda confundirse con el punto decimal.

EJERCICIOS

1. Determine

   (a) $(-3) \times (-7)$
   (b) $-3 - (-7)$
   (c) $3 \times (-7)$
   (d) $3 - (3 - 4)$
   (e) $(-2)^3 - (-2)^4 - (-1)^2$
   (f) $-(-3)^3 - 4^2$

2. Calcule el valor de la siguiente expresión cuando $x = 2$, $y = -3$ y $z = -4$.

   (a) $6(y + x) - 2x + 3z$ (b) $2x - 3y - 5(z - y)$ (c) $3xy + 5xz - 9yz$

3. Si a y c son números arbitrarios, calcule

   (a) $3\,(5 - 9) + 11$
   (b) $2\left[-5\,(4 - 1) + 3\right]$
   (c) $3\left\{4 - 2\left[3 - 4\,(-2 + a)\right]\right\}$
   (d) $\left\{5 - 3\left[2 - (a - 1)\right]\right\}\left\{3 - \left[2 - a\,(2 - 1)\right]\right\}$
   (e) $6\left(5 - 4\left\{3 - 5\left[2 + 3(1 + a)\right]\right\}\right)$
   (f) $b - \left[-c\,(2 - 1) - 1\right]$

4. La *variación de la temperatura* (ΔT) se define como la diferencia entre la temperatura final alcanzada (T_f) menos la temperatura inicial a que se hace referencia (T_i), es decir: $\Delta\mathrm{T} = \mathrm{T}_f - \mathrm{T}_i$. Calcule la variación de la temperatura si:

   (a) La temperatura inicial es 21°C y la temperatura final 32°C.
   (b) La temperatura inicial es 21°C y la temperatura final 13°C.
   (c) La temperatura inicial es −3°C y la temperatura final −29°C.
   (d) La temperatura inicial es −15°C y la temperatura final 9°C.
   (e) La temperatura inicial es 10°C y la temperatura final −20°C.

5. Calcule:
   (a) La temperatura inicial si la variación de la temperatura es $-30°$C y la temperatura final $-20°$C.
   (b) La temperatura final si la temperatura inicial es $-10°$C y la variación es $30°$C.
   (c) La temperatura inicial si la temperatura final es $-30°$C y la variación es $-29°$C.
   (d) La temperatura final si la variación es $9°$C y la temperatura inicial es $-9°$C.

1.3 Factores primos

Sabemos que no siempre es posible dividir un número natural a por otro b, distinto de 1 y de a, de manera que el resto de la división nos dé cero. Esto ocurre solamente cuando el dividendo a es un múltiplo del divisor b. En otras palabras:

Definición: Un número natural b es divisible por otro número natural a si existe otro número natural m tal que

$$b = m\,a.$$

Decimos entonces que m y a son factores de b, o que m y a dividen a b.

Recordemos ahora los criterios de divisibilidad más usados:

Criterios de divisibilidad

- Un número natural es divisible por 2 si su última cifra lo es.
- Un número natural es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
- Un número natural es divisible por 5 si su última cifra es 5 ó 0.

EJEMPLO
Sean los números 33 y 21. Ambos son divisibles por 3 ya que la suma de sus cifras es 6 y 3 respectivamente. Se puede escribir:

$$33 = 3 \times 11 \qquad \text{y} \qquad 21 = 3 \times 7.$$

Vemos que 3 y 11 son factores de 33, y que 3 y 7 son factores de 21.

Los factores obtenidos en el ejemplo anterior no pueden ser, a su vez, expresados como productos de números naturales más chicos. Decimos entonces que son **factores primos**. La palabra "primo" quiere decir primero, más simple, básico.

Definición: Un número primo es un número natural que solamente puede ser dividido por la unidad y por sí mismo.

Tomemos por ejemplo los primeros diez dígitos: 1, 2 y 3 son primos. 4 no es primo, porque es divisible por 2 además de ser divisible por 1 y sí mismo. Los números 5, y 7 también son primos. No lo son el 6 (divisible por 2 y por 3), el 8 (divisible por 2 y 4), el 9 (divisible 3) ni el 10 (divisible por 2 y por 5).

A veces es necesario descomponer un número en sus factores primos. A continuación ejemplificaremos la forma en que esto se hace:

Sea el número 4620. Como su úlima cifra es par, es divisible por 2:

$$4620 = 2 \times 2310.$$

Nuevamente como su última cifra es par, el número 2310 es divisible por 2, es decir $2310 = 2 \times 1155$. Ahora bien, 1155 es divisible por 3, o sea $1155 = 3 \times 385$. Por lo tanto,

$$4620 = 2^2 \times 3 \times 385.$$

El número 385 no es divisible por 3, pero sí por 5, o sea $385 = 5 \times 77$. Resulta entonces,

$$4620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 77.$$

Finalmente, $77 = 7 \times 11$ y

$$4620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

Hemos logrado escribir a 4620 como producto de números primos. Se dice entonces que se ha **descompuesto** 4620 en sus **factores primos**.

EJERCICIOS

Descomponga los siguientes números en sus factores primos:

1. 84
2. 16
3. 57
4. 1150
5. 256
6. 243

1.4 Múltiplo común

Considere los números 7 y 21. Podemos construir infinidad de múltiplos comunes a ambos números, por ejemplo:

$$147 = 7 \times 21, \quad 294 = 2 \times 7 \times 21, \quad 42 = 2 \times 21 = 6 \times 7, \quad 21 = 1 \times 21 = 3 \times 7.$$

Todos estos números son **múltiplos comunes** de 21 y de 7, pero hay uno solo que es el menor de todos ellos, en este caso el 21. El menor de todos los múltiplos de dos o más números se lo llama **mínimo común múltiplo** y se lo denota mcm.

EJEMPLOS

1. Considere los números 42 y 66. El múltiplo de ambos más fácil de encontrar es $42 \times 66 = 2772$. Sin embargo, existe un múltiplo común considerablemente menor. Descomponiendo los números dados en factores primos tenemos

   $$42 = 2 \times 3 \times 7, \qquad 66 = 2 \times 3 \times 11.$$

   Los números dados tienen factores comunes (2 y 3) y factores no comunes (7 en 42 y 11 en 66). Si se toman los factores comunes y no comunes obtenemos el número $2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$, el cual es múltiplo tanto de 42 como de 66:

   $$462 = 42 \times 11 = (2 \times 3 \times 7) \times 11 = (2 \times 3 \times 11) \times 7.$$

2. Sean los números 28 y 80. Descomponiéndolos en sus factores primos se obtiene

   $$28 = 4 \times 7 = 2^2 \times 7 \qquad \text{y} \qquad 80 = 16 \times 5 = 2^4 \times 5.$$

Para formar el mcm es necesario tomar a 2 con su mayor exponente (en caso contrario, el número resultante no sería múltiplo de 80) y los otros factores no comunes:

$$560 = 2^4 \times 5 \times 7 = (2^2 \times 7) \times 2^2 \times 5 = 7 \times (2^4 \times 5).$$

De haber multiplicado 28 por 80 hubiéramos obtenido 2240, que es múltiplo de ambos pero considerablemente mayor (cuatro veces) que 560.

Podemos enunciar ahora la siguiente regla:

> Para obtener el mcm de un conjunto de números se los descompone en sus factores primos y se multiplican todos los factores, comunes y no comunes, con su mayor exponente.

EJERCICIOS

1. Encuentre el mcm de los siguientes pares de números:

   (a) 819, 663
   (b) 3430, 150
   (c) 2057, 3179
   (d) 756, 2520
   (e) 525, 1260
   (f) 336, 1890.

2. Encuentre el mcm de los siguientes números:

   (a) 9, 8, 20
   (b) 25, 47, 40
   (c) 72, 60,16

1.5 Números racionales: operaciones elementales

En la sección 1.3 hablamos de la divisibilidad de los números naturales y escribimos

$$21 = 3 \times 7,$$

o equivalentemente

$$21 : 3 = 7 \qquad \text{ó} \qquad 21 : 7 = 3.$$

El símbolo ":" está asociado a la división "exacta" (sin resto) de dos números enteros, por ejemplo:

$$(-21) : 3 = -7 \qquad \text{ó} \qquad 21 : (-3) = -7,$$

ya que

$$-21 = 3 \times (-7) = -3 \times 7.$$

Cuando dos números naturales no son múltiplos uno del otro, como en el caso de 7 y 3, la operación $7 : 3$ no está definida en el sentido que la división de estos dos números enteros no es igual a otro número entero. Entonces, nos vemos obligados a introducir los **números fraccionarios**.

Decimos que:

- La quinta parte de 1 es $\frac{1}{5}$
- $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
- La quinta parte de $\frac{1}{7}$ es $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{35}$
- $\frac{2}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{2 \times 2}{5 \times 7} = \frac{4}{35}$
- $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$ Observe que 1 es el cociente de la división entera de 7 con 4 y que 3 es el resto.

Introducimos el **inverso** de un número entero $a \neq 0$ como el número fraccionario que multiplicado por a nos dé 1, o sea:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1. \tag{1.1}$$

Extendemos esta definición de inverso a $\mathbb{Q}$ diciendo que el inverso de un número racional es otro racional tal que la expresión (1.1) sea cierta.

De esta manera, redefinimos la división de dos enteros como la multiplicación de dos racionales. Además, podemos extender esta idea a la división de dos racionales, definiéndola como la multiplicación del primero por el inverso del segundo.

De aquí en más dejaremos de usar el símbolo "$a : b$" para indicar la división de dos números racionales y la cambiaremos por $\dfrac{a}{b}$.

EJEMPLOS

1. En las siguientes expresiones, efectúe las operaciones indicadas.

   (a) $\dfrac{-4}{2}$ (b) $\dfrac{4}{-2}$ (c) $\dfrac{-4}{-2}$

   Solución:

   (a) $\dfrac{-4}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$ (b) $\dfrac{4}{-2} = -\dfrac{4}{2} = -2$ (c) $\dfrac{-4}{-2} = \dfrac{4}{2} = 2.$

2. Indique el inverso de los siguientes números:

   (a) $\dfrac{2}{5}$ (b) $\dfrac{-7}{6}$

   Solución:

   (a) El inverso de $\dfrac{2}{5}$ es $\dfrac{5}{2}$ (b) El inverso de $\dfrac{-7}{6}$ es $\dfrac{6}{-7} = -\dfrac{6}{7}.$

3. Calcule

   (a) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$ (c) $\dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{7}$ (d) $\dfrac{2/3}{7/5}$

   Solución:

   (a) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{2} = \dfrac{1-6}{2} = \dfrac{-5}{2} = -\dfrac{5}{2}$

   (b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$

   (c) $\dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{15}{14}$

   (d) $\dfrac{2/3}{7/5} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{10}{21}$

Sabemos que
$$\frac{12}{21} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7},$$
en palabras, que estos números son equivalentes. Por otra parte 12 y 21 tienen a 3 como común divisor, 8 y 14 a 2; mientras que 4 y 7 son primos entre sí (ya que el único divisor común que poseen es 1). Decimos que la última fracción está **simplificada**.

Los criterios de divisibilidad descriptos en la sección anterior nos posibilitarán reconocer divisores comunes de dos o más números naturales, y de esta manera simplificar nuestros cálculos con los números racionales.

EJEMPLOS

1. Realice la siguiente división y déjela expresada como un número racional p/q, donde p y q sean primos entre sí.
$$\frac{-32/25}{4/5} \tag{1.2}$$
Solución:
$$\frac{-32/25}{4/5} = -\frac{32}{25} \times \frac{5}{4} = -\frac{32 \times 5}{25 \times 4} = -\frac{8 \times \cancel{4} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times 5 \times \cancel{4}} = -\frac{8}{5}.$$
Decimos entonces que hemos simplificado la expresión (1.2) lo máximo posible.

2. Factorice primero lo máximo posible y luego efectúe las operaciones que se indican en la siguiente expresión:
$$\frac{5\,(44-28)}{160}.$$
Deje expresado el resultado como un número racional p/q, donde p y q sean primos entre sí.

Solución:
$$\frac{5\,(44-28)}{160} = \frac{5\,(4 \times 11 - 4 \times 7)}{160} = \frac{5 \times 4\,(11-7)}{4 \times 4 \times 10} = \frac{5 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Cuando se suman o restan fracciones de distinto denominador es necesario expresarlas a todas usando un mismo denominador (**denominador común**), que es un múltiplo común de todos los denominadores.

Para evitar trabajar con números excesivamente grandes se usa el menor de todos los múltiplos comunes, o sea el mcm.

Usaremos ahora el mcm para sumar fracciones.

EJEMPLO

Resuelva la siguiente suma de fracciones sacando mcm y simplifique lo máximo posible:

$$\frac{1}{12}+\frac{3}{4}+\frac{2}{15}-\frac{1}{20}$$

Solución:

Primero descomponemos los denominadores en sus factores primos:

$$\frac{1}{12}+\frac{3}{4}+\frac{2}{15}-\frac{1}{20}=\frac{1}{2^2\times 3}+\frac{3}{2^2}+\frac{2}{3\times 5}-\frac{1}{2^2\times 5}.$$

Tomamos como común denominador al mcm:

$$=\frac{1\times 5+3\times 3\times 5+2\times 2^2-1\times 3}{2^2\times 3\times 5}.$$

Resolvemos el numerador:

$$=\frac{5+45+8-3}{2^2\times 3\times 5}=\frac{55}{2^2\times 3\times 5}.$$

Factorizamos el numerador para simplificar lo máximo posible:

$$=\frac{5\times 11}{2^2\times 3\times 5}=\frac{11}{2^2\times 3}=\frac{11}{12}.$$

Resumimos en el siguiente cuadro las propiedades de la suma y el producto de los números racionales:

Propiedades de la suma y el producto

- Suma (resta) de fracciones de igual denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

- Producto (cociente) de fracciones:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\ \frac{(a/b)}{c/d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \\ \text{si } c \neq 0, \text{ entonces } \frac{a}{b} &= \frac{ac}{bc} \end{aligned}$$

- Suma (resta) de fracciones de distinto denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+cb}{bd}$$

EJERCICIOS

1. Indique el inverso de los siguientes números

   (a) $\frac{-8}{3}$ (b) -9 (c) $\frac{1}{5}$

2. Calcule:

   (a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$

   (b) $-33 + 12 - 5\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$

   (c) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$

   (d) $\frac{3/4}{5/7}$

3. Realice las siguientes divisiones y déjelas expresadas como un número racional p/q donde p y q sean primos entre sí.

(a) $\dfrac{-8/3}{3/5}$

(b) $\dfrac{-2/3}{4/3}$

(c) $\dfrac{22/3}{11/27}$

(d) $\dfrac{2-(2/9)}{(8/9)}$

(e) $\dfrac{5(6/7)(7/8)}{(7/8)}$

(f) $\dfrac{(1/3)+(1/4)}{(1/3)-(1/4)}$

(g) $\dfrac{7(2/3)}{8}$

(h) $\dfrac{5+2\,(32-22)}{5\,(3+4)}$

(i) $\dfrac{3\,(49+14)}{21}$

(j) $\dfrac{4\,(35-14)}{9\,(35+49)}$

(k) $\dfrac{(36-24)\,(21+18)}{13\,(28+32)}$

4. Encuentre las siguientes sumas de fracciones sacando el mcm y exprese en la forma p/q, donde p y q sean primos entre sí.

(a) $\dfrac{7}{6}+\dfrac{7}{12}$

(b) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{18}$

(c) $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{5}{6}\right]$

(d) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}\right)$

(e) $-\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\right]$

(f) $\dfrac{3/4-1/6}{2/3+1/2}$

(g) $\dfrac{1}{57}+\dfrac{4}{33}$

(h) $\dfrac{3}{38}-\dfrac{1}{14}+\dfrac{5}{21}$

(i) $\dfrac{3}{22}-\dfrac{1}{57}$

(j) $\dfrac{9}{154}+\dfrac{5}{42}-\dfrac{1}{165}$

(k) $\dfrac{-13}{385}+\dfrac{1}{77}-\dfrac{2}{35}$

(l) $-\dfrac{5}{27}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{7}{8}$

(m) $-\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{25}+\dfrac{7}{30}$

(n) $-\dfrac{5}{24}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{7}{4}$

(o) $-\dfrac{5}{14}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{7}{18}$

(p) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{10}-\dfrac{7}{22}$

(q) $\dfrac{5}{27}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}$

(r) $\dfrac{7}{27}-\dfrac{5}{12}+\dfrac{3}{2}$

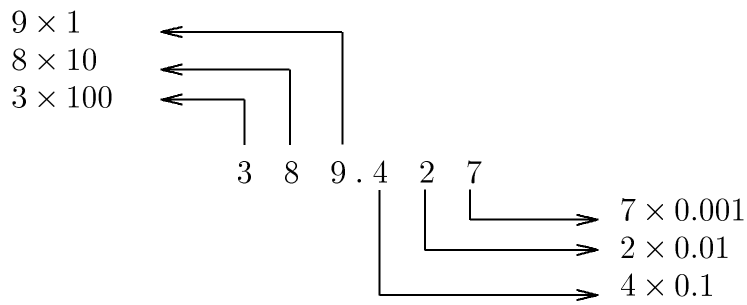
(s) $-\dfrac{5}{27}-\dfrac{7}{12}-\dfrac{3}{8}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{11}{15}-\dfrac{1}{14}$

1.6 Sistema decimal

Dado un número racional a/b, con a y $b \in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$), podemos efectuar la división y sabemos en que general no obtendremos otro número entero. El resultado será un número con decimales, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{243}{3} &= 81 \qquad \text{(ninguna cifra decimal distinta de cero)} \\ \frac{1}{4} &= 0.25 \qquad \text{(dos cifras decimales distintas de cero)} \end{aligned}$$

Como sabemos, nuestro sistema de números es un sistema que tiene como base potencias de 10.



O sea que

$$\begin{aligned} 389.427 &= 3 \times 100 + 8 \times 10 + 9 \times 1 + 4 \times 0.1 + 2 \times 0.01 + 4 \times 0.001 \\ &= 3 \times 100 + 8 \times 10 + 9 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

Existen algunos números racionales que se pueden expresar en el sistema decimal usando una cantidad infinita de cifras decimales distintas de cero:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0.3333333333333333333333333333333333333333333\ldots \\ \frac{1}{7} &= 0.142857142857142857142857142857142857142857\ldots \\ \frac{13}{17} &= 0.764705882352941764705882352941764705882352941\ldots \end{aligned}$$

Estos números se denominan **periódicos**: hay un grupo de cifras que se repite indefinidamente. En $1/3$, la cifra 3 se repite indefinidamente a partir del punto decimal. En $1/7$, el grupo que se repite es 142857 , y en $13/17$ el grupo es 764705882352941.

Observe que la calculadora nos muestra siempre los números en forma decimal, con una cantidad finita de cifras. Por lo tanto si el número es periódico, la calculadora nos dará una aproximación de ese ńumero con una determinada cantidad de cifras decimales.

Por ejemplo si calculamos con seis decimales $2/3$ y $1/3$, obtendremos $2/3 \approx 0.666667$ y $1/3 \approx 0.333333$. Decimos que la calculadora ha **redondeado** el resultado.

Puesto que

$$\frac{2}{3} = 0.666666\ldots \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{3} = 0.33333\ldots,$$

vemos que $0.666666 < 2/3 < 0.666667$ y $0.333333 < 1/3 < 0.333334$.

EJEMPLOS

1. Exprese los siguientes números fraccionarios en el sistema decimal. Indique si terminan o son periódicos. Si lo son, determine el período y además diga cuál es el resultado obtenido con la calculadora si pedimos ocho decimales.

   (a) $\frac{4}{10} = 0.4$ **.** Termina.
   El resultado obtenido con la calculadora es 0.4 **.**

   (b) $\frac{4}{100} = 0.04$ **.** Termina.
   El resultado obtenido con la calculadora es 0.04 **.**

   (c) $\frac{13}{30} = 0.4333\ldots$ El período es 3 **.**
   El resultado obtenido con la calculadora es 0.43333333 **.**

   (d) $\frac{2}{7} = 0.285714285714285714\ldots$ El período es 285714 **.**
   El resultado obtenido con la calculadora es 0.28571429 **.**

2. Pablo corre 400 m en 65 segundos. ¿Cuál es la velocidad media a la que corre?

   Solución:

   La velocidad media, v_m, es

   $$v_m = \frac{400}{65}\ \text{m/s} = \frac{80}{13}\ \text{m/s} \approx 6.1538461\ \text{m/s}$$

   (el último resultado fue calculado con una calculadora con ocho cifras). Si lo redondeamos a un decimal la respuesta será:

   La velocidad media es aproximadamente $v_m \approx 6.2$ m/s.

¿Cómo procedemos para redondear un número decimal? Esto quedará claro con los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

1. Redondee 3.86 a un decimal.

   Solución: 3.86 se encuentra entre 3.8 y 3.9 pero más próximo a 3.9. Por lo tanto
   $$3.86 \approx 3.9$$

2. Redondee 1.813 a dos decimales.

   Solución: 1.813 se encuentra entre 1.81 y 1.82, pero más próximo a 1.81. Por lo tanto
   $$1.813 \approx 1.81$$

3. Redondee 2.85 a un decimal.

   Solución: 2.85 se encuentra entre 2.8 y 2.9, a igual distancia. Se acostumbra elegir
   $$2.85 \approx 2.9$$

En los siguientes ejemplos indicamos las cifras **significativas** de algunos números:

EJEMPLOS

1. El número 2.456 tiene 4 cifras significativas.

2. El número 1001 tiene 4 cifras significativas.

3. El número 43.760 tiene 5 cifras significativas.

4. El número 0.00025 tiene 2 cifras significativas.

5. El número 34000 tiene 5 cifras significativas, mientras que 3.4×10^4 tiene 2 cifras significativas, 3.40×10^4 tiene 3 cifras significativas, etc.

A veces es útil conocer el número fraccionario que corresponde a un número decimal periódico.

EJEMPLOS

1. Escriba el número $0.151515\ldots$ de la forma a/b, con a y b primos entre sí.

   Solución:

   Llamemos a esa expresión fraccionaria desconocida x, o sea

   $$x = 0.151515\ldots \tag{1.3}$$

   Puesto que el período de este número es 15 (tiene dos cifras), lo vamos a multiplicar por 100, obteniendo entonces

   $$100x = 15.1515\ldots \tag{1.4}$$

   Ahora restamos (1.3) a (1.4) y de esta manera obtenemos:

   $$\begin{aligned} 100\,x - x &= 15.1515\ldots - 0.1515\ldots \\ 99\,x &= 15 \\ x &= \frac{15}{99} \qquad \text{(simplificamos)} \\ &= \frac{5}{33} \end{aligned}$$

2. Escriba el número $1.31818\ldots$ de la forma a/b donde a y b sean primos entre sí.

   Solución:

   Como en el ejemplo anterior llamaremos $x = 1.31818\ldots$. El período de este número es 18 y comienza en la segunda cifra decimal, entonces consideramos

   $$10\,x = 13.1818\ldots \tag{1.5}$$

   y

   $$1000\,x = 1318.1818\ldots \tag{1.6}$$

Restamos (1.5) a (1.6) y obtenemos:

$$\begin{aligned} 1000\,x - 10\,x &= 1318.1818\ldots - 13.1818\ldots \\ 990\,x &= 1305 \\ x &= \frac{1305}{990} \qquad \text{(simplificamos)} \\ &= \frac{29}{22} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Exprese los siguientes números fraccionarios en el sistema decimal. Indique si terminan o son periódicos (en ese caso, indique el período).

   (a) $\frac{4}{8}$ (c) $\frac{4}{9}$ (e) $\frac{4}{11}$ (g) $4\frac{1}{7}$

   (b) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{4}{10}$ (f) $5\frac{1}{4}$ (h) $\frac{74}{45}$

   Si el período del número es muy grande, puede ayudarse con la calculadora.

2. Redondee a dos decimales

   (a) 34.196 (b) 2.1459 (c) 104.425 (d) 10.002 (e) 1.954

3. Calcule el volumen de una caja que tiene dimensiones

   (a) 2.23 m× 4.21 m× 1.57 m

   (b) 4.231 m× 2.21m× 2.3 m

   Dé la respuesta con tres cifras significativas en m^3. En este ejercicio está permitido el uso de la calculadora.

4. Escriba los siguientes números periódicos de la forma a/b donde a y b sean primos entre sí:

(a) 3.28888...
(b) 14.216868...
(c) 0.023737...
(d) 0.148500148500...

1.7 Potencias y raíces

Si a es un número real y n es un número natural entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a. Por ejemplo:

$$a^6 = a\,a\,a\,a\,a\,a.$$

Decimos entonces que a^n es una potencia que tiene a como **base** y n como **exponente**. Ahora extendemos la definición a los números enteros definiendo:

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ para } n \in I\!N.$$

Reglas para las potencias

Sean $n, m \in I\!N$, entonces:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Estas reglas pueden fácilmente demostrarse a partir de la definición ya dada. Como ejercicio demuestre las reglas (1) y (5).

Observe que la definición de $a^0 = 1$ es consistente con que

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

.

EJEMPLOS

1. $(-2)^2 = ((-1) \times 2)^2 = (-1)^2 \times 2^2 = 4$
2. $(-2)^3 = (-1)^3 \times (2)^3 = -8$
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
4. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
5. $(2^3)^2 - 3^{2^2} = 2^{3\times 2} - 3^{2^2} = 2^6 - 3^4 = 64 - 81 = -17$
6. Simplifique $\frac{(6x^2)^3}{(4x^3)^2}$ usando las reglas de la potencias.

   Solución:

   $\frac{(6x^2)^3}{(4x^3)^2} = \frac{6^3(x^2)^3}{4^2(x^3)^2} = \frac{6^3x^6}{4^2x^6} = \frac{6^3}{4^2} = \frac{2^3 3^3}{2^4} = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}.$

Atención:

$$(a \pm b)^n \quad \textbf{no es igual a} \quad a^n \pm b^n.$$

para $a, b \in I\!R$ y $n \in I\!N$, arbitrarios. Por ejemplo:

$$(2+3)^3 = 5^3 = 125 \quad \textbf{no es igual a} \quad 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35.$$

EJERCICIOS

Calcule:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
2. $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

3. $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^2$

4. $\left(\frac{3/2}{5/3}\right)^2$

5. $\left(\frac{b/a}{c/a}\right)^2$

6. $\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{a}\right)^2$

7. $\frac{(5^4)^3}{5^9}$

8. $\frac{(3^2 2^3)^3}{6^6}$

9. $4^{-2}-(-3)^{-1}$

10. $(-2)^{-2}-5^{-2}$

11. $(-8)^{-1}-5(-2)^3$

12. $3(-8)^{-1}-5(-2)^3$

13. $\left(\frac{1}{2}\right)^5+2^{-4}-\frac{1}{2^3}$

14. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

15. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{-7}\right)^{-2}$

16. $\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}+\left(\frac{a}{b}\right)^2$

17. $(2^3)^2-2^{2^2}$

18. $3^{2^2}-(3^2)^2$

19. $2^{2^3}-(2^2)^3$

20. $2\times 3^2-(2\times 3)^2$

21. $(2^3)^2-2^{3^2}$

22. $\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^3$

23. $\left[\frac{(3/2)+1}{a-(2/3)}\right]^{-1}$

24. $\frac{[(2/3)+a]^{-2}}{[(1/a+2)]^{-3}}$

25. $\left[\frac{2(3b^{-2}d)(bd^3)}{12b^3d^{-1}}\right]^5$

26. $\frac{3(b^{-2}d^4)^2(2bd^2)^3}{(2b^2d^3)(b^{-1}d^2)^5}$

27. $\left[\frac{(ab^2)^{-1}}{(ba^2)^{-2}}\right]^{-1}$

28. $\left[\frac{(2xz^{-2})^3(x^{-2}z)}{2xz^2}\right]^4$

1.7.1 Raíces cuadradas

Supongamos que queremos saber cuál es el lado de un terreno cuadrado cuya área es 1200 m^2.

O sea que buscamos un número positivo x tal que $x^2 = 1200$. Comenzaremos probando

$$\left.\begin{array}{l} 30^3 = 900 \\ \\ 40^2 = 1600 \end{array}\right\} \quad x \text{ se encuentra entre 30 y 40}$$

$$\left.\begin{array}{l} 35^3 = 1225 \\ \\ 34^2 = 1156 \end{array}\right\} \quad x \text{ se encuentra entre 34 y 35}$$

$$34.5^2 = 1190.25$$

$$\left.\begin{array}{l} 34.6^3 = 1197.16 \\ \\ 34.7^2 = 1204.09 \end{array}\right\} \quad x \text{ se encuentra entre 34.6 y 34.7}$$

El valor más **próximo** que hemos encontrado con una cifra decimal es $x \approx 34.6$. Al valor **exacto** de x lo llamaremos raíz cuadrada y lo denotaremos $\sqrt{1200}$. Por lo tanto

$$x^2 = (\sqrt{1200})^2 = \sqrt{1200} \times \sqrt{1200} = 1200.$$

Decimos entonces que dado un número positivo a,

$$\boxed{\sqrt{a} = b \text{ si y solamente si } b \geq 0 \text{ y } b^2 = a}$$

- ¿Es la raíz cuadrada de 25 igual a 5? Sí, ya que $5 > 0$ y $5^2 = 25$.
- ¿Es la raíz cuadrada de 25 igual a -5? No, puesto que a pesar de que $(-5)^2 = 25$, -5 es negativo.

  Observe entonces que de acuerdo con la definición dada de raíz cuadrada, $\sqrt{25} = 5$, mientras que hay dos números que elevados al cuadrado nos dan 25, a saber ± 5.

  En otras palabras hay dos números que satisfacen $x^2 = 25$, $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.
- ¿Cuál es la raíz cuadrada de -9? No existe, ya que no hay ningún número positivo que, elevado al cuadrado, dé -9.

EJEMPLOS

1. (a) $-\sqrt{49} = -7$

   (b) $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{(-8) \times (-8)} = \sqrt{64} = 8$

(c) $\sqrt{7} = 2.6457\ldots$

El último número es irracional, por lo tanto para obtener una estimación del mismo usaremos una aproximación decimal, por ejemplo con dos decimales $\sqrt{7} \approx 2.65$.

2. Indique cuáles son los números que satisfacen

(a) $x^2 = 0.36$ (b) $x^2 = \dfrac{4}{9}$ (c) $x^2 = 11$

Solución:

(a) $x^2 = 0.36 = 36 \times 10^{-2} \Leftrightarrow$ (si y solamente si) $x = \pm 6 \times 10^{-1} = \pm 0.6$

(b) $x^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2}{3}$

(c) $x^2 = 11 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}$, $(x \approx \pm 3.1167)$

3. Calcule en forma exacta:

(a) $\sqrt{20 + \sqrt{25}}$ (b) $\sqrt{30 - \sqrt{25}}$

Solución:

(a) $\sqrt{20 + \sqrt{25}} = \sqrt{20 + 5} = \sqrt{25} = 5.$

(b) $\sqrt{30 - \sqrt{25}} = \sqrt{30 - 5} = \sqrt{25} = 5.$

4. Simplifique lo máximo posible y dé una respuesta exacta (sin aproximaciones) de la expresión $\dfrac{15 + \sqrt{12 + 38}}{5\sqrt{11 - 2}}$.

Solución:

$$\frac{15 + \sqrt{12 + 38}}{5\sqrt{11 - 2}} = \frac{15 + \sqrt{2\,(6 + 19)}}{5\sqrt{9}} = \frac{15 + \sqrt{2 \times 25}}{5\sqrt{3^2}} = \frac{15 + \sqrt{2 \times 5^2}}{5 \times 3} =$$

$$= \frac{15 + \sqrt{2}\,\sqrt{5^2}}{5 \times 3} = \frac{15 + 5\sqrt{2}}{5 \times 3} = \frac{5\,(3 + \sqrt{2})}{5 \times 3} = \frac{3 + \sqrt{2}}{3}.$$

Observe que el resultado obtenido es la mínima expresión y no se puede seguir simplificando.

Atención: Si a y b son distintos de cero, $\sqrt{a+b}$ **no es igual a** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Por ejemplo:

$$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \text{ no es igual a } \sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7.$$

1.7.2 Raíces cualesquiera

Ya hemos definido la raíz cuadrada de un número. En forma similar definimos las raíces cúbicas, cuartas, etc.

- **Raíz cúbica:**

$$\boxed{\sqrt[3]{a}=b \iff b^3=a}$$

En palabras, la afirmación "b es igual a la raíz cúbica de a" equivale a $b^3=a$.

- **Raíz cuarta:**

Dado un número positivo a

$$\boxed{\sqrt[4]{a}=b \iff b^4=a \text{ , } b\geq 0}$$

En palabras, la afirmación "b es igual a la raíz cuarta de a" equivale a $b^4=a$, con $b\geq 0$.

EJEMPLOS

1. $\sqrt[3]{27} = 3$
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$
3. $\sqrt[4]{16} = 2$
4. $\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{4^2} = 2$

En forma similar se definen las demás raíces. En vez del símbolo de raíz cuadrada se usa también el exponente fraccionario de $1/2$; para la raíz cúbica se usa $1/3$, etc. Para los exponentes fraccionarios arbitrarios valen las mismas reglas que para los exponentes enteros, cuando la base es un número real **positivo**.

EJEMPLOS

1. (a) $(-32)^{1/5} = -2$ (b) $64^{1/6} = 2$

2. (a) $\left((-27)^{1/3}\right)^2 = (-3)^2 = 9$
   (b) $\left((-27)^2\right)^{1/3} = 729^{1/3} = 9$
   (c) $4^{2/4} = 4^{1/2} = 2$
   (d) $(-4)^{1/2}$ no existe pero $\left((-4)^2)\right)^{1/4} = 16^{1/4} = 4^{1/2} = 2$

   Observe que en el último ejemplo la base no es positiva y por lo tanto no valen las reglas de las potencias.

3. Simplifique utilizando las reglas para exponentes fraccionarios:

   (a) $\sqrt{16x^4}$ (b) $\sqrt[4]{64x^8y^3}$

   Solución:

   (a) $\sqrt{16x^4} = (16x^4)^{1/2} = (16)^{1/2}(x^4)^{1/2} = 4x^2$

(b)
$$\sqrt[4]{64x^8y^3} = (2^6x^8y^3)^{1/4} = (2^6)^{1/4}(x^8)^{1/4}(y^3)^{1/4}$$
$$= 2^{3/2}x^{8/4}y^{3/4} = 2x^2 2^{1/2}y^{3/4}$$

Hasta aquí hemos definido a^x cuando x es un número racional y $a > 0$. Sin embargo uno puede demostrar que es posible definir a^x cuando $a > 0$ para todo número real x de tal manera que las siguientes reglas sean válidas:

Reglas para las potencias con exponentes reales

Sean $x, y \in I\!R$ y $a > 0$, entonces:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}, \quad b \neq 0$
5. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
6. $a^x > 0$ para todo x

EJERCICIOS

29. Calcule:

(a) $\left[(-2)^2\right]^{1/2}$

(b) $\left[(-2)^6\right]^{1/3}$

(c) $\left(\dfrac{25}{81}\right)^{1/2}$

(d) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-3/2}$

(e) $(2^6)^{-1/2}$

(f) $(-5^6)^{1/3}$

30. En este ejercicio $x \geq 0$, $y \geq 0$. Simplifique las siguientes expresiones.

(a) $\sqrt{8x^2y^2}$

(b) $(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)$

(c) $\sqrt{(-3x^2y^4)^2}$

(d) $\sqrt[3]{\dfrac{-81}{a^6}}$

(e) $\sqrt[3]{2x^{-2}y^4}\,\sqrt[3]{4xy^{-1}}$

(f) $\sqrt[4]{(x+2)^4y^8}$

(g) $\sqrt[3]{x^6-9x^3y}$

(h) $\sqrt[4]{16x^2+64x^8}$

(i) $\sqrt{x^2+x^2y^2}$

31. Indique cuáles son los números que satisfacen:

(a) $x^2 = 0.0049$

(b) $x^2 = \dfrac{25}{16}$

(c) $x^2 = 13$

Dé una respuesta exacta e indique también, en caso de ser necesario, una aproximación decimal.

32. Simplifique lo máximo posible y dé una respuesta exacta (sin aproximaciones):

(a) $4\sqrt{12}+3\sqrt{18}-\sqrt{50}-2\sqrt{48}$

(b) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$

(c) $\dfrac{\sqrt{36-32}-\sqrt{32-16}}{\sqrt{144}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{8+4}-\sqrt{144-96}}{\sqrt{12}}$

(e) $\dfrac{\sqrt{18+9}-\sqrt{162-81}}{\sqrt{27}}$

(f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{64-56}}{\sqrt{81-72}}$

(g) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$

(h) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}$

33. Calcule y compare los resultados que obtenga en los items (a) y (b) por un lado, y (c) y (d) por otro.

(a) $(2+3)^2$

(b) 2^2+3^2

(c) $(10+90)^{1/2}$

(d) $10^{1/2}+90^{1/2}$

34. Muestre que son ciertas las siguientes igualdades:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-2} = \dfrac{\sqrt{a}+2}{a-4}, \quad a \neq 4$

(b) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}+3, \quad x \neq 9$

(c) $\dfrac{3-a}{9-a^2} = \dfrac{1}{3+a}, \qquad a \neq \pm 3$

1.8 Notación científica

Para poder manejarnos con números muy pequeños y muy grandes es mucho más cómodo usar un número decimal cuya parte entera posea una sola cifra (distinta de cero), multiplicado por potencias de 10.

EJEMPLOS

1. Escriba los números 2451.367 y 0.034581 en notación científica.

   Solución:

   $2451.367 = 2.451367 \times 10^3; \qquad 0.034581 = 3.4581 \times 10^{-2}$

2. Exprese $\dfrac{36 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^{-12}}{30 \times 10^{15} \times 10^{-6}}$ en notación científica.

   Solución:

   $$\frac{36 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^{-12}}{30 \times 10^{15} \times 10^{-6}} = \frac{6^2 \times 5^2 \times 10^{-14}}{6 \times 5 \times 10^{9}} = 6 \times 5 \times 10^{-23} = 3.0 \times 10^{-22}$$

Entonces, en vez de decir:
En el año 1982 se consumieron en el mundo 4 300 000 000 000 *litros de petróleo.*
La masa de un electrón es 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 *kg.*
Podremos decir que:
En el año 1982 se consumieron en el mundo 4.3×10^{12} *litros de petróleo.*
La masa de un electrón es 9.11×10^{-31} *kg.*

EJERCICIOS

1. Exprese los siguientes números en notación científica:

   (a) 3765.032

   (b) 0.000005681

   (c) 235.785×10^{-2}

   (d) 0.03486×10^{-3}

2. Exprese los siguientes números en notación científica sin usar calculadora, y luego controle el resultado usándola:

(a) $\dfrac{25 \times 10^{12} \times 5 \times 10^{-32}}{12.5 \times 10^{15} \times 2 \times 10^{14}}$

(b) $\dfrac{6 \times 10^{9} \times 5 \times 10^{8}}{2.5 \times 10^{2} \times 4 \times 10^{-11}}$

(c) $\dfrac{4 \times 10^{12} \times (5 \times 10^{3})^{2}}{2.5 \times 10^{5} \times (2 \times 10^{-10})^{3}}$

Observe que en algunas calculadoras sólo se escribe el número decimal y el exponente al que el número 10 está elevado, o sea que se sobreentiende que la base es 10.

1.8.1 Prefijos

Sabemos que:

1 kilómetro = 1 km = 1000 m = 10^3 m, y que 1 decilitro = 1 dl = 0.1 l = 10^{-1} l.

La palabra *kilómetro* se obtiene reemplazando a la potencia 10^3 por el prefijo *kilo*; kilo$\equiv 10^3$ (kilo equivale a 10^3).

De igual manera, la palabra *decilitro* se obtiene reemplazando la potencia 10^{-1} por el prefijo *deci*.

En la tabla siguiente se listan los prefijos correspondientes a distintas potencias de 10.

Potencia de 10	**Prefijo** *Símbolo*	*Nombre*
10^{18}	E	exa
10^{15}	P	penta
10^{12}	T	tera
10^{9}	G	giga
10^{6}	M	mega
10^{3}	k	kilo
10^{-3}	m	mili
10^{-6}	μ	micro
10^{-9}	n	nano
10^{-12}	p	pico
10^{-15}	f	fempto
10^{-18}	a	ato
En la vida diaria usamos:		
10^{2}	h	hecto
10^{-1}	d	deci
10^{-2}	c	centi

EJEMPLOS

1. Las calculadoras tienen un tiempo de cálculo de 20 ms (20 *milisegundos*); el prefijo *mili* $\equiv 10^{-3}$. Entonces 20 ms $= 20\times10^{-3}$ s $=2 \times 10^{-2}$ s.
2. El espesor de una hoja de papel es de 2.4 μm (2.4 *micrómetros*); *micro* $\equiv 10^{-6}$. O sea 2.4 μm $= 2.4\times10^{-6}$ m.
3. La superficie de un terreno es de 9 km^2. Entonces 9 km^2$=9\times(10^3)^2$ m^2$=9\times10^6$ m^2.

EJERCICIOS

3. Reemplace los prefijos por la correspondiente potencia de 10, seguida de la unidad de medida correspondiente:

(a) 7.5 MW	(d) 20 ns	(g) 2.4 μm
(b) 6.2 aJ	(e) 1 GW	(h) 5 TWh
(c) 5.4 km^2	(f) 7 km^3	(i) 4 fm^2

4. La velocidad de la luz en el vacío es de 3×10^8 m/s. Sabiendo que $d = v\,t$ (donde d es la distancia recorrida, v es la velocidad y t es el tiempo que tarda la luz en recorrer d), responda:
   (a) ¿Cuántos segundos demora en recorrer 150 000 000 km?
   (b) ¿Cuántos ns demora en recorrer 1.5 m?
   (c) ¿Cuántos km recorre en 1.5 ms?
   (d) ¿Cuántos mm recorre en 10 ps?

1.9 Números irracionales

Definición: Todos los números que no se pueden escribir como a/b (con a y b números enteros, $b \neq 0$), se denominan números irracionales

Los números irracionales más conocidos son

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$$
$$\pi = 3.141592653589793\ldots$$

Geométricamente, se puede representar a $\sqrt{2}$ como el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1, y a π como el cociente entre el perímetro y el diámetro de cualquier círculo. Se sabe desde hace más de 2000 años que $\sqrt{2}$ es un número irracional, mientras que la demostración de que π lo es se conoce desde el año 1700, aproximadamente.

EJERCICIOS

Para la resolución de los siguientes problemas use, para comparar, los valores de $\sqrt{2}$ y π dados en el párrafo anterior. También podrá hacer uso de la calculadora.

1. En general, si k es un número racional positivo, $\sqrt{k}$ es irracional. Teniendo esto en cuenta, determine cuáles de los siguientes números son irracionales:

   (a) $\sqrt{40}$ (d) $\sqrt{2209}$ (g) $\sqrt{0.001}$
   (b) $\sqrt{6.4}$ (e) $\sqrt{22201}$ (h) $\sqrt{\frac{49}{64}}$
   (c) $\sqrt{625}$ (f) $\sqrt{567897}$

2. Los números racionales

   $$\frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \ldots$$

   son aproximaciones al valor de $\sqrt{2}$.

   (a) Eleve al cuadrado cada uno de estos números para ver cuánto se aproximan a 2.
   (b) ¿Cuál es el primer decimal en el desarrollo de 239/169 que no coincide con $\sqrt{2}$?
   (c) Deduzca el algoritmo de formación de la sucesión y dé una mejor aproximación que 239/169.

3. Unos jeroglíficos babilónicos que datan de 4000 años atrás revelan la siguiente aproximación para $\sqrt{2}$:

   $$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}.$$

   ¿Hasta qué cifra decimal esta aproximación coincide con el valor de $\sqrt{2}$?

4. ¿Hasta qué cifra decimal las siguientes aproximaciones coinciden con el valor de π?

   (a) $\dfrac{22}{7}$ (b) $\dfrac{355}{113}$

   (La aproximación 355/113 era conocida en China ya desde el año 400).

5. En el antiguo Egipto se decía que el área de un círculo era igual al área de un cuadrado cuyo lado fuera 8/9 del diámetro del círculo. Teniendo en cuenta este método de cálculo para el área de un círculo, diga qué aproximación racional para π se obtiene. (Recuerde que el área de un círculo de radio r es πr^2)

6. Algunos de los siguientes ejercicios están mal resueltos. Diga cuáles y dé el resultado correcto.

   (a) $\dfrac{7 \times 11 \times 13 + 77}{26 \times 19 - 417} - \dfrac{42 \times 48 + 998}{1507} = 12$

   (b) $\left(\dfrac{576/144 + 2784/29}{313 - 11808/41}\right)^5 = 1024$

   (c) $\dfrac{288 + 12^3}{16 \times 9} = 300$

   (d) $\dfrac{184 + 3^5}{5^2 + 6^2} = 7$

   (e) $\dfrac{8925 + (-5)^5}{25^2 + 100} = 8$

   (f) $\dfrac{1959 - (-6)^3}{4^3 + 3^4} = 15$

7. Calcule y redondee el resultado, dejándolo expresado con tres cifras significativas:

   (a) $\sqrt{\dfrac{1}{5.92} + \dfrac{1}{9.85}}$

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{17.2^2 + 15.6^2}}$

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{2.32 \times 10^{-12}}} + \dfrac{1}{\sqrt{1.27 \times 10^{-11}}}$

   (d) $\dfrac{1}{\sqrt{593}} + \dfrac{1}{5.72^2}$

1.10 Unión e intersección de conjuntos

Dados dos o más conjuntos definimos su unión $(A \cup B)$ como el conjunto formado por todos los elementos que están en A **o** en B, o sea en alguno de los dos, y su intersección $(A \cap B)$ como el conjunto formado por todos los elementos que están en A **y** en B, o sea en ambos a la vez.

EJEMPLOS

1. Sean A y $B \subset I\!N$ los conjuntos dados por

$$A = \{2, 3, 7\} \qquad B = \{2, 4, 8\}$$

   Determine $(A \cup B)$ y $(A \cap B)$.
   Solución:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 7, 8\} \qquad A \cap B = \{2\}$$

2. Sean A y $B \subset I\!N$ dados por

$$A = \{2, 3, 7\} \qquad B = \{1, 4, 8\}$$

   Determine $A \cup B$ y $A \cap B$.
   Solución:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \qquad A \cap B = \phi \text{ (vacío).}$$

Intervalos: A un subconjunto de la recta real le llamamos intervalo si contiene por lo menos dos números y también todos los números reales entre dos de sus elementos.

Por ejemplo

$$A = \{x \in I\!R : 6 < x < 8\}$$

es un intervalo, también lo podremos escribir $A = (6, 8)$.

El conjunto

$$B = \{x \in I\!R : x \neq 0\}$$

es la unión de dos intervalos, o sea $B = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Observe que ∞ ó $-\infty$ no son números reales.

Si a y b son dos números reales tal que $a < b$ diremos que

- el **intervalo abierto** de a a b, denotado por (a, b) es el conjunto de todos los números reales que satisfacen $a < x < b$.
- el **intervalo cerrado** de a a b, denotado por $[a, b]$ es el conjunto de todos los números reales que satisfacen $a \leq x \leq b$.
- el **intervalo semi-abierto** $(a, b]$ es el conjunto de todos los números reales que satisfacen $a < x \leq b$.
- el **intervalo semi-abierto** $[a, b)$ es el conjunto de todos los números reales que satisfacen $a \leq x < b$.

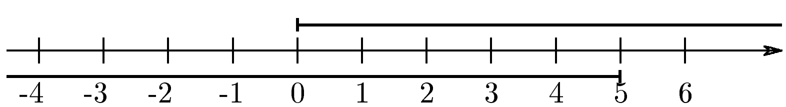
EJEMPLO

Exprese el subconjunto de los números reales que satisfacen que $x \geq 0$ y $x \leq 5$ como un intervalo o unión de intervalos.

Solución: Lo que estamos buscando es la intersección entre los conjuntos

$$A = \{x \in I\!R : x \geq 0\} \qquad \text{y} \qquad B = \{x \in I\!R : x \leq 5\},$$

gráficamente vemos que:



Entonces el conjunto buscado es el intervalo $[0, 5]$.

EJERCICIOS

1. Sean A y B los siguientes subconjuntos de los números enteros o sea A y $B \subset \mathbb{Z}$

$$A = \{-3, -5, 1, 3, 7\} \qquad B = \{1, 4, 8\}.$$

   Determine $(A \cup B)$ y $(A \cap B)$.

2. Exprese el subconjunto de los números reales que satisfacen las condiciones siguientes como un intervalo o unión de intervalos:

   (a) $x \geq 4$ y $x < 5$
   (b) $x < 2$ y $x \geq -3$
   (c) $x > -5$ ó $x < -6$
   (d) $x \neq -1$
   (e) $x > -2$
   (f) $x < 2$ ó $x \geq 4$

3. Determine el conjunto de los números naturales que satisfacen que $-3 \leq x < 7$.

4. Determine el conjunto de los números enteros que satisfacen que $-\pi \leq x \leq \mathrm{e}$.

Capítulo 2

Simplificación de expresiones

2.1 Cuadrado y cubo de un binomio, producto de la suma por la diferencia

Una expresión con dos sumandos, $a + b$, se denomina **binomio**.

- El **cuadrado de un binomio** es

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,}$$

ya que

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- El **cubo de un binomio** es

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,}$$

puesto que

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a(a+b)^2 + b(a+b)^2 = a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

- El **producto de la suma por la diferencia de dos números**

El producto de la suma por la diferencia de dos números se puede expresar como la diferencia de sus cuadrados, o sea

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,}$$

ya que

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

EJERCICIOS

Simplifique las siguientes expresiones:

1. $(p-1)^2 + (p+1)^2 - 2p^2$
2. $(p+q)(p-q) - (p-q)^2$
3. $(r+s)^2 - (r-s)^2$
4. $3(t-3)^2 - 2(t-1)^2 + 2(t+1)^2 - 3(t+3)^2$
5. $(t-3)^3 - (t+3)^3$.

2.2 Factoreo

Factorizar una expresión significa expresarla como un **producto de factores**.

- **Cuadrados perfectos**

En este caso usamos la fórmula que conocemos del cuadrado de un binomio e identificando coeficientes expresamos ciertos **trinomios** como el **cuadrado de un binomio**.

EJEMPLOS

1. $a^2 + 6a + 9 = a^2 + 2 \cdot 3a + 3^2 = (a+3)^2$

2. $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = (x-5)^2$

3. $x^4 - 6x^2 + 9 = x^4 - 2 \cdot 3x + 3^2 = (x^2 - 3)^2$

- **Trinomio de segundo grado**

  Sabiendo que

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b) = x^2 + xb + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab\,,$$

en ciertos casos podremos expresar un **trinomio** como el producto de dos **binomios**. Se dice que el miembro derecho de la última expresión es un **trinomio** de **segundo grado** en x puesto que ésta aparece elevada al cuadrado.

EJEMPLOS
Factorice las siguientes expresiones:

1. $x^2 - 2x - 15$
2. $x^2 - 3\,x$
3. $(x-1)^2 - 3\,(x-1)$
4. $x^2 + 2x + xy + 2y$

Solución:

1. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 2x - 15$, identificando términos, tenemos que
$$a + b = -2 \qquad \text{y} \qquad ab = -15. \tag{2.1}$$
Estas ecuaciones no pueden ser resueltas fácilmente y a veces no existen soluciones de (2.1) en los reales ($a, b \in I\!R$). Pruebe de despejar a ó b de una de ellas y reemplazarla en la otra, ¿qué obtiene? En el Capítulo siguiente encontraremos un método general para factorizar un trinomio de segundo grado.

   En algunas situaciones es útil (cuando trabajamos con números enteros) intentar encontrar soluciones enteras ($a, b \in Z\!\!Z$). Trateremos de buscar dos números enteros cuya suma nos dé -2 y su producto -15. Sabemos que uno de los números debe ser positivo y el otro negativo (para que su producto nos dé un número negativo). Por otro lado podemos escribir a 15 como $15 = 3\times 5 = 1\times 15$. En este caso la única solución posible de (2.1) es $a = -5$ y $b = 3$. Nuestra respuesta entonces es

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3).$$

Controle que esta sea la respuesta correcta expandiendo el miembro de la derecha.

2. En este caso observamos claramente que cada término de la expresión $x^2 - 3\,x$ contiene a x como factor común. Escribimos entonces

$$x^2 - 3\,x = x\,(x-3).$$

3. Cada término de la expresión $(x-1)^2 - 3\,(x-1)$ contiene a $(x-1)$ como factor común, por lo tanto

$$(x-1)^2 - 3\,(x-1) = (x-1)(x-1-3) = (x-1)(x-4).$$

Observe que $(x-1)^2 - 3\,(x-1) = x^2 - 5\,x + 4$, o sea que es un trinomio de segundo grado en x.

4. Aquí aparece y como factor común de los dos últimos términos de la expresión $x^2 + 2x + xy + 2y$, entonces intentaremos sacar a x como factor común de los dos primeros términos e y de los dos últimos.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + xy + 2y &= x(x+2) + y(x+2) \quad \text{(sacamos factor común } (x+2)\text{)} \\ &= (x+y)(x+2). \end{aligned}$$

Observe que esta expresión es un trinomio de segundo grado en x si la reescribimos en la forma

$$x^2 + 2x + xy + 2y = x^2 + x(2+y) + 2y.$$

- **Diferencia de cuadrados**

Sabiendo que el producto de la suma por la diferencia de dos números se puede escribir como la diferencia de sus cuadrados, en ciertos casos podremos expresar un **binomio** como el **producto** de la **suma** por la **diferencia** de dos números.

EJEMPLOS

1. $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$.
2. Factorice las siguientes expresiones:

   (a) $2y^2 - 8$

   (b) $a - b^2, a > 0$

   Solución:

   (a) $2y^2 - 8 = 2(y^2 - 4) = 2(y-2)(y+2)$

   (b) $a - b^2 = (\sqrt{a})^2 - b^2 = (\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

EJERCICIOS

1. Factorice los siguientes trinomios:

   (a) $x^2 + 10x + 25$

   (b) $x^2 - 6x + 9$

   (c) $x^2 + 16x + 64$

   (d) $x^2 + \dfrac{10}{3}x + \dfrac{25}{9}$

   (e) $3x^2 - 30x + 75$

   (f) $t^2 - 2\sqrt{7}t + 7$

   (g) $y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$

   (h) $3x^2 + 4x + \dfrac{4}{3}$

2. Factorice los siguientes binomios:

   (a) $x^2 - 16$

   (b) $x - 16$ para $x > 0$

   (c) $2x^2 - 5$

   (d) $3a^2 - 5$

   (e) $4y^2 - 9b^2$

   (f) $t^4 - t^2$

   (g) $a - b$ $(a, b > 0)$

3. Factorice las siguientes expresiones:

   (a) $a^2 + 5a + 6$

   (b) $x^2 - 2x - 3$

   (c) $t^2 + 9t + 18$

   (d) $t^2 - 9t + 18$

   (e) $t^2 - 7t - 18$

   (f) $x^2 + \left(3 - \sqrt{2}\right)x - 3\sqrt{2}$

(g) $t^2 + \frac{5}{6}t + \frac{1}{6}$

4. Factorice las siguientes expresiones:

(a) $x^2 + 4x$

(b) $x^3 + 2x^2 - 3x$

(c) $9x^3 + 18x^2 + 9x$

(d) $x^4 + 6x^2 + 8$

(e) $x^4 - 17x^2 + 16$

(f) $x^4 + 6x^2 + x^2 + 6$

(g) $x^{k+2} + 5x^k + x^2 + 5$

(h) $2 - x - x^2$

(i) $2x^2 - x - 10$

(j) $5x^2 + 2x - 3$

(k) $5 - x + 3\,(5 - x)^2$

(l) $33 + 3\,x - (11 + x)^2$

2.3 Simplificación de fracciones

Si $c \neq 0$ sabemos que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Es decir, en una fracción se pueden simplificar los factores comunes al numerador y denominador sin alterar el valor de la misma.

> Cuando tengamos un cociente de dos expresiones algebraicas trataremos de factorizar el numerador y el denomiador para poder simplificar los factores comunes y así obtener una expresión más sencilla.

EJEMPLOS

1. $\dfrac{ab + ac}{ad} = \dfrac{a(b + c)}{ad} = \dfrac{b + c}{d}$

2. $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 6x} = \dfrac{(x - 1)(x + 6)}{x(x + 6)} = \dfrac{x - 1}{x}$

3. Simplifique la siguiente expresión: $\dfrac{1}{ab(a + b)} - \dfrac{1}{b(a^2 - b^2)}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ab(a+b)} - \frac{1}{b(a^2-b^2)} &= \quad \text{(factorizamos los denominadores)} \\
&= \frac{1}{ab(a+b)} - \frac{1}{b(a-b)(a+b)} \quad \text{(sacamos mcm)} \\
&= \frac{a-b}{ab(a+b)(a-b)} - \frac{a}{ab(a-b)(a+b)} \quad \text{(sumamos)} \\
&= \frac{a-b-a}{ab(a+b)(a-b)} \\
&= -\frac{b}{ab(a^2-b^2)} \quad \text{(simplificamos)} \\
&= -\frac{1}{a(a^2-b^2)}.
\end{aligned}$$

Observe que el mcm de $ab(a+b)$ y $b(a^2-b^2)$ es $ab(a+b)(a-b)$.

EJERCICIOS

Simplifique las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{x^2+2x}{x}$
2. $\dfrac{x^3}{x^2-3x}$
3. $\dfrac{2x^2-2ax}{5bx-5ab}$
4. $\dfrac{x-1}{x-5} \cdot \dfrac{x^2-2x-15}{x^2+x-2}$
5. $\dfrac{1}{x^2+x} + \dfrac{1}{x^2-1}$
6. $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$
7. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$
8. $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-5a-ax+5x}$
9. $\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$
10. $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{2x-1}{5}$
11. $\dfrac{3x-4}{4x} - \dfrac{2x-3}{3x}$
12. $\left(1-\dfrac{y}{2x-y}\right)\left(\dfrac{x^2}{x-y}-x+y\right)$
13. $\dfrac{\frac{b^2}{a+b}+1-b}{1-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}$
14. $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}+\frac{1}{\frac{a+1}{a-1}}}{1-\frac{a+1}{a-1}}$

15. $\dfrac{2}{a^2-1}-\dfrac{1}{a(a+1)}$

16. $\dfrac{x+6}{x^2-36}$

17. $\dfrac{x-5}{x^2-5}-\dfrac{1}{x+2}$

2.4 Racionalización de denominadores

Cuando trabajamos con números reales, hay situaciones en las cuales no es fácil distinguir que dos números son iguales, ya que la apariencia de los mismos cambia.

EJEMPLOS

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{a}}=\dfrac{1-\sqrt{a}}{(1+\sqrt{a})\,(1-\sqrt{a})}=\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}$

Se dice que se "racionaliza un denominador" cuando se deja expresado un número real de forma que el denominador no tenga raíces.

Muchas veces, racionalizar un denominador sirve para simplificar expresiones.

EJEMPLO

Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{4\,a}{\sqrt{1-2\,a}+\sqrt{1+2\,a}}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{4\,a}{\sqrt{1-2\,a}+\sqrt{1+2\,a}} &= \frac{4\,a}{\sqrt{1-2\,a}+\sqrt{1+2\,a}}\cdot\frac{\sqrt{1-2\,a}-\sqrt{1+2\,a}}{\sqrt{1-2\,a}-\sqrt{1+2\,a}}\\
&= \frac{4\,a\,\left(\sqrt{1-2\,a}-\sqrt{1+2\,a}\right)}{(\sqrt{1-2\,a})^2-(\sqrt{1+2\,a})^2}=\frac{4\,a\,\left(\sqrt{1-2\,a}-\sqrt{1+2\,a}\right)}{-4\,a}\\
&= -\left(\sqrt{1-2\,a}-\sqrt{1+2\,a}\right)=\sqrt{1+2\,a}-\sqrt{1-2\,a}.
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Racionalice los denominadores:

   (a) $\dfrac{1-a}{\sqrt{2}}$

   (b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-3}$

   (c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

   (d) $\dfrac{a-x}{\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{a}}{2}}$

   (e) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{6}}}$

2. Determine el valor exacto de las siguientes expresiones para los valores dados de x:

   (a) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; $\quad x=\dfrac{3}{5}$

   (b) $x^2+\dfrac{4}{x^2}$; $\quad x=2+\sqrt{2}$

3. Simplifique lo máximo posible:

   (a) $\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$, $\quad x>0$

   (b) $a\cdot\dfrac{\sqrt{2-a}-\sqrt{2+a}}{\sqrt{2-a}+\sqrt{2+a}}$

Capítulo 3

Ecuaciones

3.1 Ecuaciones de primer grado

Comenzaremos por enunciar las propiedades de las igualdades:

Propiedades básicas de las igualdades

Si a , b , c y d son cuatro números reales cualesquiera, entonces valen las propiedades siguientes:

1. $a = b \Rightarrow$ (implica que) $b = a$
2. $a = b$ y $b = c \Rightarrow a = c$
3. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
   En palabras, si se suma el mismo número a ambos miembros de una igualdad se obtiene otra igualdad.
4. $a = b$ y $c = d \Rightarrow a + c = b + d$
5. $a = b \Rightarrow ac = bc$
   En palabras, si se multiplican ambos miembros de una igualdad por un mismo número se obtiene otra igualdad.
6. $a = b$ y $c = d \Rightarrow ac = bd$

A veces se tienen igualdades en las cuales hay un término desconocido.

Por ejemplo:

$$3x + 2 = 8. \tag{3.1}$$
$$5x^2 - 8 = 3. \tag{3.2}$$

Estas igualdades se denominan **ecuaciones**. En la ecuación (3.1) aparece la **incógnita** x elevada a la potencia 1; se la denomina entonces **ecuación** de **primer grado** o **lineal**, mientras que la ecuación (3.2) se la denomina **ecuación** de **segundo grado** o **cuadrática** ya que x aparece elevada a la potencia 2.

El desafío consiste en encontrar el o los números que, puestos en lugar de x, transformen a las expresiones (3.1) y (3.2) en igualdades. Por ahora nos concentraremos en las ecuaciones lineales y para resolverlas usaremos las propiedades básicas de las igualdades.

EJEMPLOS

1. Encuentre el valor de x si se cumple que $3x - 4 = 5$.

   Solución: Sumamos 4 a ambos miembros:

   $$\begin{aligned} 3x - 4 + 4 &= 5 + 4 \\ 3x &= 9. \end{aligned}$$

   Dividimos ambos miembros por 3, o multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{3}$:

   $$\begin{aligned} \frac{3x}{3} &= \frac{9}{3} \\ x &= 3. \end{aligned}$$

   Si reemplazamos $x = 3$ en la ecuación inicial, obtendremos

   $$3 \times 3 - 4 = 9 - 4 = 5.$$

   O sea que $x = 3$ es solución de la ecuación dada.

2. Despeje a de la siguiente expresión:

   $$\frac{a+3}{2} + 5 = 3.$$

   Solución: Restamos 5 a ambos miembros

   $$\frac{a+3}{2} + 5 - 5 = 3 - 5$$

$$\frac{a+3}{2} = -2.$$

Para eliminar el denominador, multiplicamos ambos miembros por 2:

$$a+3 = -4.$$

Ahora sumamos -3 a ambos miembros:

$$a = -7.$$

3. Despeje x de

$$\frac{\frac{x-a}{b} - \frac{x+b}{c}}{2} = 3.$$

Solución: Multiplicamos ambos miembros por 2:

$$\frac{x-a}{b} - \frac{x+b}{c} = 6.$$

Sumamos las fracciones de la izquierda

$$\frac{cx - ca - bx - b^2}{bc} = 6$$

y sacamos x factor común de los términos que la contienen:

$$\frac{(c-b)x - ca - b^2}{bc} = 6.$$

Multiplicamos ambos miembros por bc:

$$(c-b)x - ca - b^2 = 6\,bc,$$

luego

$$\begin{aligned} (c-b)x &= ca + b^2 + 6\,bc, \\ x &= \frac{ca + b^2 + 6\,bc}{c-b}, \quad c \neq b. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Despeje x de la siguientes ecuaciones:

(a) $\dfrac{4x}{3+x} = 5$

(b) $\dfrac{1}{x} + 3a = b$

(c) $\dfrac{\frac{x}{a} + \frac{x}{b}}{\frac{x}{c} - 1} = 3$

(d) $\dfrac{\frac{ax}{b-c} - 3x}{\frac{x}{b+c} + \frac{1}{a}} = a$

(e) $\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{2-a}{a}$

(f) $\dfrac{x}{2(x-3)} + \dfrac{3}{x-3} = 2$

(g) $\dfrac{2}{3x-2} + \dfrac{3x}{3x-2} = 5$

(h) $5(x+2)^2 - 1 = 5x^2 - x + 3$

(i) $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2a+5}{x-1}$

(j) $3x + 2 = \dfrac{6x^2 - 1}{2x+1}$

(k) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2x+1} = 0$

2. Despeje a de las siguientes ecuaciones:

(a) $\dfrac{\frac{ax}{b-c} - 3x}{\frac{x}{b+c} + \frac{1}{a}} = a$

(b) $\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{2-a}{a}$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $\dfrac{1}{2}x - 2 = 5$

(b) $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{3}{2}$

(c) $3x - 5 = 2x$

(d) $\dfrac{8}{x} - 1 = 2$

(e) $\dfrac{4}{x-1} - 3 = 0$

(f) $\dfrac{\frac{8}{3} + x}{3} = \dfrac{7}{3}$

(g) $\dfrac{4}{\frac{1}{3}} = \dfrac{x}{\frac{1}{4} - x}$

(h) $\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{-3} = \dfrac{1-2x}{2x}$

(i) $\dfrac{2/5}{1/6} = \dfrac{3/5}{x}$

(j) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{8}{9.6}$

(k) $\dfrac{5}{\sqrt{8}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{x}$

(l) $\dfrac{x-1}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(m) $\dfrac{x}{1+0.2} = \dfrac{1}{(0.1+0.1)^2}$

(n) $\dfrac{3}{2x} + \dfrac{5}{6x} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{3x}$

(o) $\dfrac{3x+2}{2x-2} - \dfrac{5x-1}{3x+3} = \dfrac{3x-2-x^2}{6x^2-6}$

Las ecuaciones de primer grado surgen en la resolución de distintos problemas.

EJEMPLOS

1. ¿Cuál es el número entero que restado a 20 da 154?

   Solución:

   Luego de leer atentamente el enunciado, debemos identificar qué es lo que nos pide el problema y cuáles son los datos de que disponemos para resolverlo. En este caso, nos piden un número entero (al que llamaremos x) y el dato que tenemos es

   $$20 - x = 154.$$

   Claramente esta es una ecuación lineal. La resolvemos como sigue:

   $$\begin{aligned} 20 - x &= 154 \\ -x = &= 154 - 20 \\ x &= -134. \end{aligned}$$

   Respuesta: El número entero buscado es $x = -134$.

2. El largo L de un rectángulo mide 1 cm menos que el doble de su ancho A. Si el perímetro mide 28 cm, encuentre las dimensiones del rectángulo.

   Solución:

   Lo que debemos encontrar son las dimensiones del rectángulo, es decir, el valor de su largo L y de su ancho A. Para esto, contamos con los siguientes datos:

   (a) Nos dicen que el largo mide 1 cm menos que el doble de su ancho. O sea que

   $$L = 2A - 1.$$

   (b) Además, sabemos que el perímetro (que es igual a la suma de los lados, es decir $P = 2A + 2L$) mide 28 cm. O sea que

   $$2A + 2L = 28.$$

   Con estos datos es posible resolver el problema: De 1) conocemos L en términos de A. Reemplazamos este valor en 2), con lo que resulta:

   $$2A + 2(2A - 1) = 28$$

   o bien

$$\begin{aligned} 2A + 4A - 2 &= 28 \\ 6A &= 30 \\ A &= 5. \end{aligned}$$

Ahora que conocemos el valor del ancho, lo usamos para calcular el largo con la expresión dada en 1), de modo que:

$$\begin{aligned} L &= 2 \times 5 - 1 \\ L &= 9. \end{aligned}$$

Respuesta: El ancho del rectángulo es $A = 5$ cm y el largo es $L = 9$ cm.

EJERCICIOS

4. Convierta en ecuaciones los siguientes enunciados y encuentre la solución. Verifique su respuesta.

   (a) Tres veces un número es igual a ocho unidades menos que el número.

   (b) Ocho veces un número es igual a 47.

   (c) Al restar un número a 7 obtengo 14.

   (d) 75% de un número es igual a 12 menos que el número.

5. Arturo tenía cuatro gatitos para vender. Vendió los primeros a $20, 21$ y 25 pesos, respectivamente. Si obtuvo un promedio de \$27 por los cuatro, ¿a cuánto vendió el cuarto gatito?

6. En un comercio una pareja adquirió 50 artículos. La mujer adquirió 30, con un promedio por artículo de \$52 . El hombre adquirió los restantes, con un precio promedio de \$46. ¿Cuál fue el precio promedio de los 50 artículos adquiridos?

7. Se amplía una pista de baile rectangular dándole el doble del ancho y el largo originales. Si ahora tiene una superficie de 82.9 m^2, ¿cuál era su superficie original?

8. Un automóvil sale al mediodía de cierta población con rumbo este, a 40 km/h. Una hora después sale otro automóvil en la misma dirección, a 50 km/h. ¿En cuántas horas alcanzará el segundo al primero?

3.2 Compleción de cuadrado

En el Capítulo anterior hemos presentado un trinomio de segundo grado como la expresión:

$$a\,x^2 + b\,x + c, \qquad a,\, b,\, c \neq 0.$$

Sabemos que ésta no siempre puede factorizarse como un cuadrado perfecto. De todos modos, si reordenamos la expresión convenientemente, podremos transformarla en una suma de dos términos, siendo uno de ellos un cuadrado perfecto.

EJEMPLO
Sea la expresión

$$x^2 - 6x + 8. \tag{3.3}$$

Sabemos que

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2,$$

por lo tanto,

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x-3)^2 - 1.$$

Se dice que hemos **completado** el cuadrado en (3.3).

EJERCICIOS

Complete los cuadrados en las siguientes expresiones:

1. $x^2 - 6x + 2$
2. $x^2 - 3x + 2$
3. $x^2 + 3x + 2$
4. $x^2 + 6x + 2$
5. $x^2 + 14x - 2$
6. $3x^2 - 3x + 2$
7. $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$
8. $2x^2 + 6x - 2$
9. $3z^2 + 6z - 12$
10. $2y^2 - 5y$
11. $y^2 + 2y - 4$
12. $2m^2 + 2m + 2$
13. $9x^2 - 3x - 1$

3.3 Solución de ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una ecuación donde la máxima potencia a la que aparece elevada la incógnita es 2. Por ejemplo:

$$x^2 + 5x + \frac{3}{7} = 0.$$

Esta igualdad es una ecuación ya que no se verifica para todo valor de x (pruebe $x = 1$ por ejemplo). Usando compleción del cuadrado podemos resolver este tipo de ecuaciones. A la o las soluciones de esta ecuación se les llama **raíces**. Observe que estamos buscando soluciones reales y que a diferencia de las ecuaciones de primer grado, no siempre va a existir una solución.

EJEMPLO
Considere la ecuación cuadrática

$$x^2 - 6x + 8 = 0. \tag{3.4}$$

Para resolverla comenzamos completamos el cuadrado en el miembro izquierdo:

$$(x-3)^2 - 1 = 0.$$

Sumando 1 a ambos miembros resulta

$$(x-3)^2 = 1.$$

Para que esto sea cierto basta que sea cierta cualquiera de las dos igualdades siguientes:

$$x - 3 = 1 \qquad \text{ó} \qquad x - 3 = -1.$$

En el primer caso se tiene

$$x = 4,$$

mientras que en el segundo resulta

$$x = 2.$$

Si escribimos 4 en vez de x en la ecuación original obtenemos una afirmación verdadera:

$$4^2 - 6 \times 4 + 8 = 0.$$

Lo mismo sucede si sustituimos 2 en vez de x:

$$2^2 - 6 \times 2 + 8 = 0.$$

Por lo tanto la ecuación (3.4) tiene dos raíces. $\blacksquare$

EJERCICIOS

Resuelva las siguientes ecuaciones completando el cuadrado.

1. $x^2 + 8x = 9$
2. $x^2 + 5x = \frac{11}{4}$
3. $x^2 - 14x = -24$
4. $x^2 + 9 = -4x$
5. $x^2 + 4x = 2$
6. $z^2 + z = 2$
7. $t^2 - 24 = -10t$
8. $x^2 + 6 = 5x$
9. $x^2 + 3x - 4 = 0$
10. $-t^2 + 2t = -2$
11. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$
12. $x^4 + 4x^2 + 1 = 0$
13. $x^2 + 2x + 10 = 0$

3.4 Fórmula cuadrática

Es posible resolver una ecuación de segundo grado con coeficientes arbitrarios a, b, c de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \ \ (a \neq 0)$$

mediante la compleción del cuadrado. De esta forma se obtiene la llamada **fórmula cuadrática**.

Como $a \neq 0$ podemos dividir a ambos ambos miembros por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Completando el cuadrado se obtiene

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

y despejando la expresión entre paréntesis:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}.$$

Para que esto sea cierto debe cumplirse que

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}} \qquad \text{ó} \qquad x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}},$$

entonces, despejando x, obtenemos:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Observe que si $b^2-4ac<0$ la ecuación no posee soluciones en $I\!R$.

EJEMPLOS

1. Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones:

   (a) $x^2-4x+3=0$ (b) $x^4-x^2-2=0$

   Solución:

   (a) $a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3$

   $$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}3\\ 1\end{cases}$$

   (b) En este caso vemos que la expresión no es una ecuación cuadrática en x (x aparece elevada a la cuarta), pero

   $$x^4-x^2-2=(x^2)^2-x^2-2=0,$$

   o sea que esta es una ecuación cuadrática en x^2, lo cual nos permite identificar $a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-2$ y resolver x^2

   $$x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}2\\ -1\end{cases}$$

Por lo tanto $x = \pm\sqrt{2}$. La ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución en los números reales, puesto que no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea igual a un número negativo.

2. Resuelva las ecuaciones

(a) $x^2 = -9x$ (b) $(x-4)^2 + 15(x-4) = 0$

Solución:

Claramente, estas son ecuaciones de segundo grado a las que les podemos calcular las raíces con la fórmula cuadrática, pero en este caso resulta más práctico factorizar y utilizar el hecho de que si el producto de dos números reales es cero uno de los dos debe ser cero, simbólicamente $a\,b = 0 \Leftrightarrow$ (si y sólo si) $a = 0$ ó $b = 0$.

(a)

$$\begin{aligned} x^2 &= -9x && \text{(sumamos a ambos miembros } 9x\text{)} \qquad (3.5)\\ x^2 + 9x &= 0 && \text{(factorizamos)}\\ x(x+9) &= 0 && (a\,b = 0 \Leftrightarrow,\ a = 0 \text{ ó } b = 0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 0$ ó $x + 9 = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = -9$. Observe que si a la ecuación (3.5) la dividimos por x (olvidándonos que x puede ser cero) encontramos solamente una solución, $x = -9$.

(b)

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + 15(x-4) &= 0 && \text{(factorizamos)}\\ (x-4)(x-4+15) &= 0\\ (x-4)(x+11) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 4$ ó $x = -11$.

Recuerde entonces que:

Si a y b son números reales, $a\,b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$.

EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   (a) $x^2 + 8x - 12 = 0$
   (b) $x^4 + 8x^2 + 12 = 0$
   (c) $4t^2 - t - 3 = 0$
   (d) $-y^2 + 8y + 10 = 0$
   (e) $x^2 + 2x = 0$
   (f) $2x^4 - 3x^2 - 1 = 0$
   (g) $12x^2 + 3x = 2$
   (h) $(x+1)^2 = 4(x+1) - 1$
   (i) $x^3(x^3 - 3) = 4(x^3 + 2)$
   (j) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{1}{x} = x + 12$
   (k) $\dfrac{1}{x - \sqrt{2}} - \dfrac{2}{x + \sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{12}}{5}$
   (l) $\dfrac{2x+3}{2x-3} - \dfrac{2x-3}{2x+3} = \dfrac{8}{3}$
   (m) $3(x+2)^2 = 4(x^2 + 4)$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones, pero **piense primero** y calcule después:

   (a) $8(2x-3)(7x+11) = 0$
   (b) $15x^2 = 16x$
   (c) $15(x-2)^2 = 16(x-2)$
   (d) $4(2x-5)^3 = 7(2x-5)^2$
   (e) $x^4 + 36x^2 = 0$
   (f) $x^4 - 36x^2 = 0$

3. Calcule el valor de x/y si:

   (a) $x = 2y$
   (b) $x^2 = 4y^2$
   (c) $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$
   (d) $\dfrac{4(x-3y)}{x+4y} = \dfrac{2x-5y}{x+2y}$

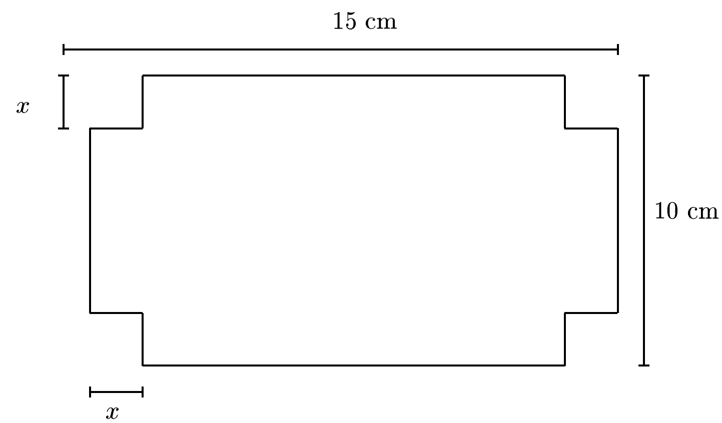
4. Un rectángulo tiene un perímetro igual a 60 m y un área de 200 m^2. Encuentre sus dimensiones.

5. A las ocho de la mañana Juan sale de una cabaña con rumbo oeste; una hora más tarde sale Pedro de la misma cabaña con rumbo sur. Los dos caminan a una velocidad de seis kilómetros por hora y ambos llevan radios portátiles con un alcance de 8 km. ¿A qué hora perdieron contacto?

6. Dos automovilistas realizan un viaje de 220 km a velocidad constante. Uno conduce a 5 km por hora más rápido que el otro. Si el más lerdo tarda 24 minutos más que el otro, encuentre la velocidad de cada uno de ellos.

7. La suma de los cuadrados de tres números pares positivos consecutivos es igual a 56. Encuentre los números.

8. La superficie de la figura es igual a 134 cm^2. Encuentre x.



3.5 División de polinomios

Decimos que $P(x)$ (se lee "**P de x**") es un polinomio en x si existen números reales $a_i, i = 0, 1...n$ tales que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

y denominamos **coeficientes** de $P(x)$ a los números a_i. Definiremos además el **grado** de $P(x)$ como

$$\text{grado de } P(x) = n, \qquad \text{si } a_n \neq 0.$$

EJEMPLO

Considere el polinomio

$$P(x) = 6x^5 - 2x + 4,$$

identifique los coeficientes y diga cuál es su grado.

Solución:

Los coeficientes de $P(x)$ son $a_5 = 6, a_4 = a_3 = a_2 = 0, a_1 = -2$ y $a_0 = 4$; el grado es 5.

Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$, con grado de $P \geq$ grado de D, se pueden encontrar polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ (con $R(x) = 0$ o grado de $R <$ grado de D) tales que

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x).$$

Llamamos a D el **divisor**, a Q el **cociente** y a R el **resto**.

Para obtener Q y R, realizaremos la división entre P y D. Vamos a ilustrar este algoritmo con dos ejemplos.

EJEMPLOS

1. Sean

$$P(x) = x - 2 + x^3 - 3x^2, \quad D(x) = x - 2.$$

Comenzamos ordenando los polinomio que queremos dividir (el dividendo y el divisor) ubicando de mayor a menor las potencias de x:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2, \quad D(x) = x - 2.$$

Observamos entonces que debemos dividir el primer término de $P(x)$, x^3, por el primero del divisor $D(x)$, x. O sea que buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé x^3, en este caso x^2. Esta expresión será el primer término del cociente; entonces multiplicamos el divisor por este término y se lo restamos al dividendo, es decir

$$\begin{array}{rl} x^3 - 3x^2 + x - 2 & \underline{|\ x - 2\quad} \\ -\underline{x^3 - 2x^2} & x^2 \\ -x^2 + x & \end{array}$$

Ahora debemos dividir un polinomio que comienza con $-x^2$ por otro que comienza con x, claramente debemos multiplicar al divisor por $-x$, o sea:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & x^3 - 3x^2 + & x - 2 & & \underline{x - 2} \\
- & \underline{x^3 - 2x^2} & & & x^2 - x \\
 & -x^2 + & x & & \\
- & \underline{-x^2 +} & \underline{2x} & & \\
 & & -x - 2 & &
\end{array}
$$

Por último nos queda multiplicar al divisor por -1:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & x^3 - 3x^2 + & x - 2 & & \underline{x - 2} \\
- & \underline{x^3 - 2x^2} & & & x^2 - x - 1 \\
 & -x^2 + & x & & \\
- & \underline{-x^2 +} & \underline{2x} & & \\
 & & -x - 2 & & \\
- & & \underline{-x + 2} & & \\
 & & -4 & &
\end{array}
$$

Resulta así

$$x^3 - 3x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 - x - 1) - 4.$$

2. Sean

$$P(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3x - 1, \quad D(x) = x^2 - x + 3.$$

Usando el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, obtenemos

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 3x - 1 & \underline{x^2 - x + 3} \\
- & \underline{3x^4 - 3x^3 + 9x^2} & 3x^2 + 3x - 10 \\
 & 3x^3 - 13x^2 + 3x & \\
- & \underline{3x^3 - 3x^2 + 9x} & \\
 & -10x^2 - 6x - 1 & \\
- & \underline{-10x^2 + 10x - 30} & \\
 & -16x + 29 &
\end{array}
$$

Por lo tanto

$$3x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x^2 - x + 3)(3x^2 + 3x - 10) - 16x + 29.$$

De manera similar a la división entre números naturales, si el resto de la división de $P(x)$ con $D(x)$ es cero tenemos que:

$$P(x) = D(x)Q(x).$$

Decimos entonces que D y Q son **factores** de P, o sea que D y Q dividen a P.

Por ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1);$$

entonces $(x-3)$ y $(x+1)$ dividen a $x^2 - 2x - 3$.

Puesto que $P(x) = (x-3)(x-1)$, resulta:

$$P(3) = (3-3)(3-1) = 0 \times 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad P(1) = (1-3)(1-1) = -2 \times 0 = 0,$$

o sea que 3 y -1 son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 3 = 0$.

En general, podemos factorizar un trinomio de segundo grado (un polinomio de segundo grado) si conocemos las raíces x_0 y x_1 de la ecuación cuadrática $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, $a \neq 0$ y escribir:

$$\boxed{a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_0)\,(x - x_1).}$$

En otras palabras

$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ es **divisible** por $(x - x_0) \Leftrightarrow P(x_0) = 0.$

EJEMPLO

Factorice el polinomio $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Solución:

$$P(x) = 2\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ son $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} P(x) &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) \\ &= \big(2x+1\big)\big(x-1\big). \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Encuentre el cociente y el resto que resultan de la división de los siguientes polinomios:

   (a) $P(x) = x^2 + 2x + 7$, $D(x) = x - 1$

   (b) $P(x) = x^2 + 2x + 7$, $D(x) = -x + 3$

   (c) $P(x) = -3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$, $D(x) = x^4 - 5x^2 - 3x + 1$

   (d) $P(x) = x^5 + 2x^3 + 3x - 1$, $D(x) = 3x^4 + x^3 - 3x - 1$

   (e) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $D(x) = x - 1$

   (f) $P(x) = x^4$, $D(x) = x^2 - 1$

2. Escriba las siguientes expresiones como un cociente de dos polinomios y luego efectúe la división.

   (a) $\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{x}{3}}{\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3}}$

   (b) $\dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x(x+1)}$

   (c) $\dfrac{1}{x^2 - 2x} + \dfrac{1}{x} + 1$

   (d) $\dfrac{x+2}{x-3} - \dfrac{x-3}{x+4}$

   (e) $\dfrac{\frac{x}{2} + \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}}$

3. Factorice los siguientes polinomios:

   (a) $P(x) = x^2 - 3\,x + 2$

   (b) $P(x) = x^2 + 5\,x + 6$

   (c) $P(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6$

4. Verifique que si un polinomio $P(x)$ es divisible por $D(x) = x - a$. Para ello, efectúe la división correspondiente, corrobore que el resto es cero y evalúe $P(a)$.

   (a) ¿Es $P(x) = x^2 - 6\,x + 8$ divisible por $(x - 2)$?

   (b) ¿Es $P(x) = x^2 + 6\,x + 8$ divisible por $(x + 4)$?

   (c) ¿Es $P(x) = x^2 + 7\,x + 6$ divisible por $(x + 6)$?

3.6 Ecuaciones con raíces

Se denominan ecuaciones con raíces a aquellas ecuaciones en las que la incógnita está bajo el símbolo de la raíz.

Por ejemplo

$$\sqrt{x} + 4x = 3,$$

$$\sqrt[3]{x+2} + x = 3x - 1$$

son ecuaciones con raíces, mientras que

$$x^2 + 4 = \sqrt[3]{8}$$

$$2x^3 - 6x^2 + \sqrt{3} = 0$$

no lo son.

Las ecuaciones con raíces cuadradas se resuelven elevando ambos miembros al cuadrado una o varias veces, según sea necesario.

Puesto que elevamos al cuadrado ambos miembros, las soluciones de la ecuación resultante pueden **no ser** soluciones de la ecuación original. Entonces, **siempre** se debe controlar que las soluciones obtenidas sean soluciones de la ecuación original.

EJEMPLOS

1. Resuelva $3 - x = \sqrt{2x-6}$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
3 - x &= \sqrt{2x-6} \quad \text{(elevamos al cuadrado)} && (3.6)\\
(3-x)^2 &= 2x - 6 \quad \text{(desarrollamos el cuadrado)} && (3.7)\\
9 - 6x + x^2 &= 2x - 6 \quad \text{(agrupamos todos los términos} \\
& \qquad\qquad \text{en el miembro izquierdo)} \\
x^2 - 8x + 15 &= 0 \quad \text{(factorizamos)} \\
(x-3)(x-5) &= 0 \\
& && (3.8)
\end{aligned}$$

   $\Rightarrow x = 3$ ó $x = 5$.

Control: para $x = 3$ calculamos el miembro derecho (m.d.) y el miembro izquierdo (m.i.) de la ecuación (3.6):

$$\begin{aligned} \text{m.i.} &= 3 - 3 = 0 \\ \text{m.d.} &= \sqrt{2 \times 3 - 6} = \sqrt{0} = 0. \end{aligned}$$

Vemos que resulta m.d.=m.i., entonces $x = 3$ es una solución. Para $x = 5$ tenemos:

$$\begin{aligned} \text{m.i.} &= 3 - 5 = -2 \\ \text{m.d.} &= \sqrt{2 \times 5 - 6} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

y vemos que aquí no se cumple la igualdad, entonces $x = 5$ **no** es **solución**.

En resumen, $x = 3$ es la única solución de la ecuación (3.6), mientras que, tanto $x = 3$ como $x = 5$ son soluciones de la ecuación (3.7) (verifique esto último!).

2. Resuelva $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Elevamos al cuadrado:} \qquad \left(3 - \sqrt{x-1}\right)^2 &= \left(\sqrt{4x+5}\right)^2 \\ \text{Desarrollamos los cuadrados:} \qquad 9 + x - 1 - 6\sqrt{x-1} &= 4x + 5 \\ \text{Agrupamos los términos sin raíz y dividimos por 3:} \qquad -2\sqrt{x-1} &= x - 1 \\ \text{Elevamos al cuadrado:} \qquad 4(x-1) &= (x-1)^2 \\ \text{Restamos a ambos miembros } (x-1)^2\text{:} \qquad 4(x-1) - (x-1)^2 &= 0 \\ \text{Sacamos factor común } (x-1)\text{:} \qquad (x-1)[4-(x-1)] &= 0 \\ (x-1)(5-x) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 1$ ó $x = 5$.

Control: para $x = 1$ calculamos el miembro derecho (m.d.) y el miembro izquierdo (m.i.) de la ecuación:

$$\begin{aligned} \text{m.i.} &= 3 - \sqrt{1-1} = 3 - 0 = 3 \\ \text{m.d.} &= \sqrt{4 \times 1 + 5} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

Vemos que resulta m.d.=m.i., entonces $x = 1$ es una solución. Para $x = 5$ tenemos:

$$\begin{aligned} \text{m.i.} &= 3 - \sqrt{5-1} = 3 - 2 = 1 \\ \text{m.d.} &= \sqrt{4 \times 5 + 5} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

y vemos que aquí no se cumple la igualdad, entonces $x = 5$ **no** es **solución**. En resumen, $x = 1$ es la única solución de la ecuación.

EJERCICIOS

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x-1} = \sqrt{x-9}$
2. $3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$
3. $2\sqrt{x} - \sqrt{5x+1} + \frac{1}{2} = 0$
4. $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1} - 2 = 0$

3.7 Manipulación de fórmulas

De una relación entre distintas magnitudes, muchas veces es necesario "despejar" una en términos de las demás.

Por ejemplo, de la relación $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ se desea despejar g. Podemos hacerlo usando las propiedades básicas de las igualdades:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\ T^2 &= (2\pi)^2 \frac{l}{g} \Rightarrow \\ g &= l\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Despeje I de la relación $x = \dfrac{\omega L^3}{EI}$.

2. Despeje t de la fórmula $f = \dfrac{\omega}{L^2 t} + P$.

3. Encuentre la magnitud positiva D de la relación $v = \dfrac{\pi D^2}{4} L$.

4. En la relación $F = G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$ todas las magnitudes son positivas. Despeje m, M, G y h, respectivamente.

5. Sacando común denominador, despeje R de la fórmula $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$.

6. Despeje C ($C > 0$) de la fórmula $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$.

3.8 Ejercicios suplementarios. Capítulos 1-3

1. Calcule
$$\frac{3^{1/2}3^{5/3}}{\left(3^{2/3}\right)^{-2}\sqrt{3}}.$$

2. Simplifique:
$$2\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b^3}} - 3\sqrt[3]{a\sqrt{b\sqrt{b}}} + \sqrt[4]{ab\sqrt[3]{a}}.$$

3. Determine el valor exacto y simplifique lo más posible:
$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} \qquad \text{si } x = \frac{2}{3}.$$

4. Simplifique:
$$\frac{ab\,(1+a/b)\,(1-a/b)}{b^2 - a^2}.$$

5. Escriba la siguiente expresión como un cociente de polinomios, que no contengan factores comunes:

$$\frac{\frac{x-1}{x^2-4}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2-2x}+x}.$$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   (a) $x^3+x^2-6x=0$

   (b) $2(x+3)^2=5(x+3)$

   (c) $\dfrac{3x+2}{2x-2}-\dfrac{5x-1}{3x+3}=\dfrac{30x-2-x^2}{6x^2-6}$

   (d) $\sqrt{-x^2+1}=-x$

7. Sean $c>0, v>0$. Despeje v de la fórmula:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

8. Despeje E de la siguiente fórmula:

$$I=\frac{Z^2}{E}\left(E-E_0\right).$$

Capítulo 4

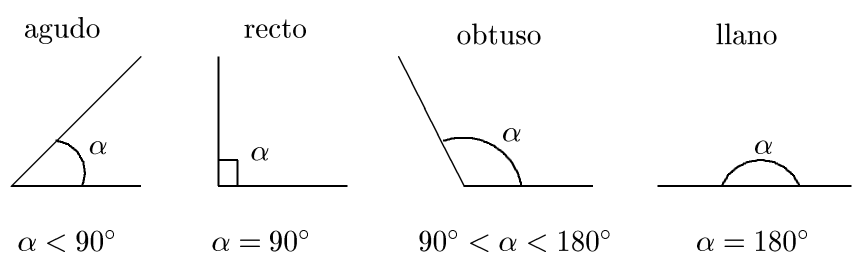
Geometría

4.1 Ángulos

Vamos a repasar y profundizar algunos conceptos básicos de geometría. Comenzaremos con definiciones y resultados relacionados con los ángulos.

- **Clasificación de los ángulos**

En la siguiente figura mostramos ejemplos de ángulos **agudo, recto, obtuso** y **llano**.



- **Ángulos Complementarios**

Si dos ángulos son tales que su suma es un ángulo recto se dice que son **complementarios**. Por ejemplo, si $\alpha = 32°$ y $\beta = 58°$, entonces α y β son complementarios.

- **Ángulos Suplementarios**

Si dos ángulos son tales que su suma es un ángulo llano se dice que son **suplementarios**. Por ejemplo, si $\alpha = 32°$ y $\beta = 148°$, entonces α y β son suplementarios.

- **Bisectriz**

Se denomina **bisectriz** a la semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos iguales.

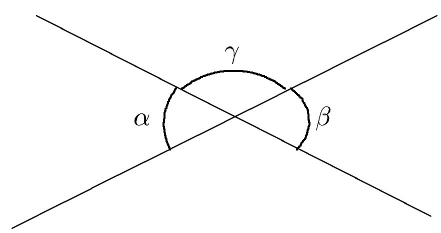
- **Ángulos opuestos por el vértice**

Los ángulos α y β de la figura en esta página son **opuestos por el vértice**.

Teorema: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Demostración: consideremos los ángulos α, β y γ, como se muestra en la figura. Vemos claramente que tanto α y γ, como β y γ son ángulos suplementarios, o sea:

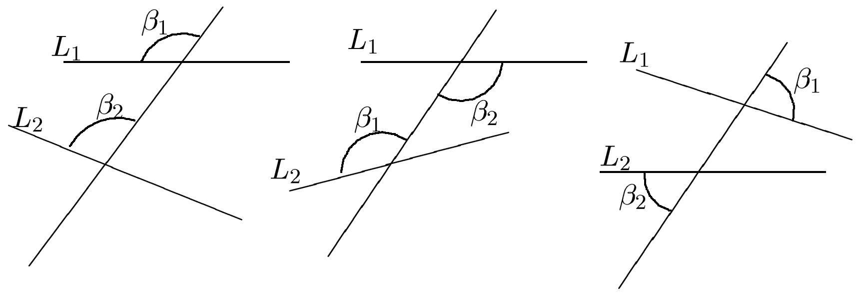
$$\alpha + \gamma = 180°$$
y
$$\beta + \gamma = 180°,$$



por lo tanto $\alpha = \beta$. ♢

- **Ángulos correpondientes y alternos**

Considere dos rectas intersectadas por una tercera, llamada **transversal**, como se muestra en las siguientes figuras. Los pares de ángulos marcados en las mismas se denominan **correspondientes**, **alternos internos** y **alternos externos** respectivamente.



correspondientes alternos internos alternos externos

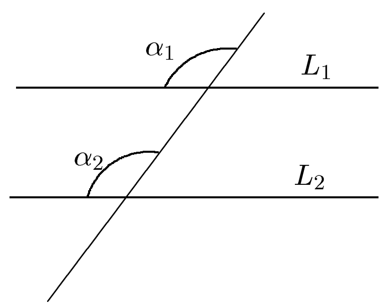
Cuando dos rectas L_1 y L_2 son paralelas (abreviamos $L_1//L_2$) vale el siguiente teorema:

Teorema: Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.

$L_1//L_2$

$\Rightarrow$

$\alpha_1 = \alpha_2$

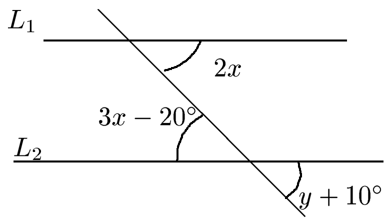


A partir de este resultado podemos demostrar fácilmente que:

- Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.
- Los ángulos alternos externos entre paralelas son iguales.

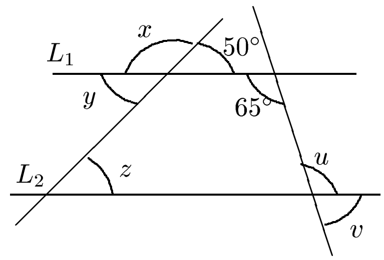
EJERCICIOS

1. (a)



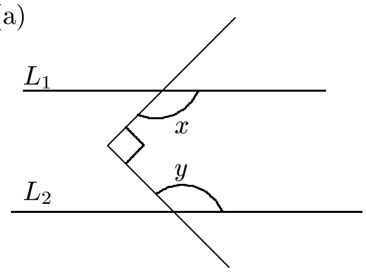
Calcule x, y.

(b)



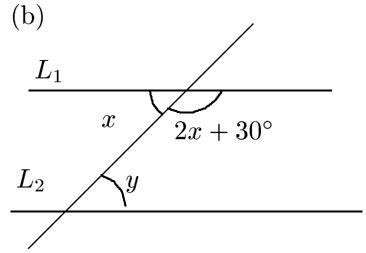
Calcule x, y, z, u y v.

2. (a)



Calcule $x + y$.

(b)



Calcule x, y.

4.2 Triángulos

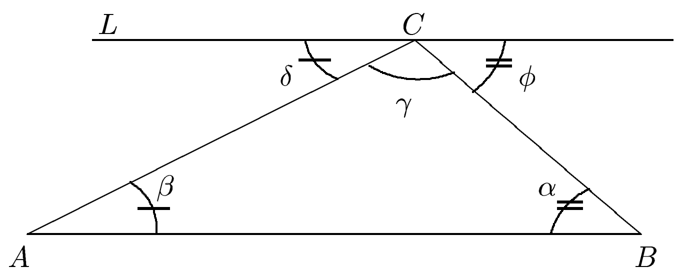
Tres puntos cualesquiera del plano que no estén sobre la misma recta determinan tres segmentos que forman un triángulo.

Denotaremos con A a un vértice y con $\hat{A}$ al ángulo correspondiente a ese vértice. También usaremos letras griegas (α, β, δ...) o latinas minúsculas (u, v, w ...) para denotar ángulos. Para denotar el lado opuesto a un vértice usaremos la letra que corresponde a dicho vértice, pero minúscula.

Teorema: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a $180°$.

Demostración:

En la figura se tiene que $\delta + \gamma + \phi = 180°$.



Por ser la recta L paralela al lado AB, los siguientes ángulos alternos internos entre paralelas son iguales: $\delta = \beta$, $\alpha = \phi$. Tenemos entonces que

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta + \gamma + \phi = 180°,$$

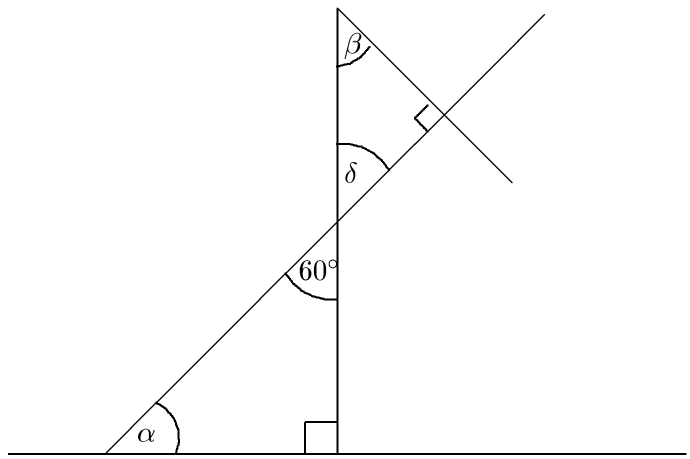
y por lo tanto

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°. \diamondsuit$$

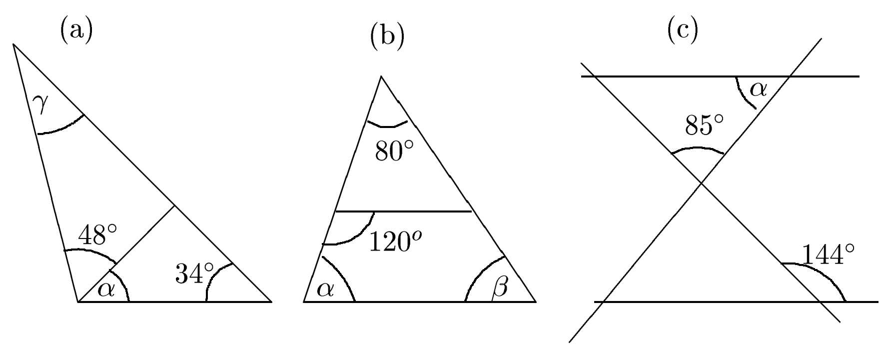
EJERCICIOS

1. Considere un triángulo en el que $\hat{A} = 35°$ y $\hat{B} = 72°$. Encuentre el valor de $\hat{C}$.
2. Muestre que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a $360°$.

3. Calcule el valor de los ángulos α, β y δ de la figura siguiente:



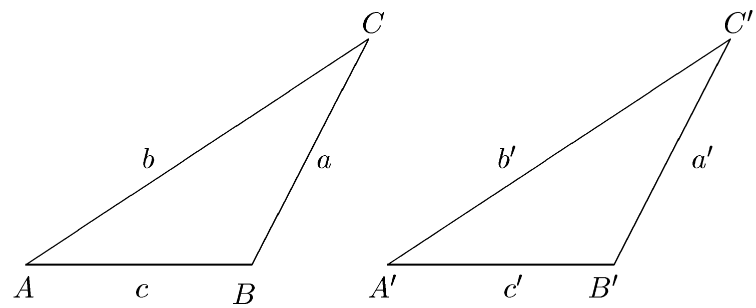
4. Calcule el valor de los ángulos indicados en los triángulos de la figura.



4.2.1 Teoremas de congruencia

Dos triángulos son iguales (congruentes) cuando se pueden superponer exactamente, es decir, cuando tienen iguales los lados y los ángulos.

En la figura siguiente se muestran dos triángulos congruentes: $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.



Teoremas de congruencia

1. Dos triángulos que tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes (LAL).
2. Dos triángulos que tienen sus tres lados iguales son congruentes (LLL).
3. Dos triángulos que tienen iguales dos ángulos y el lado adyacente a ambos son congruentes (ALA).

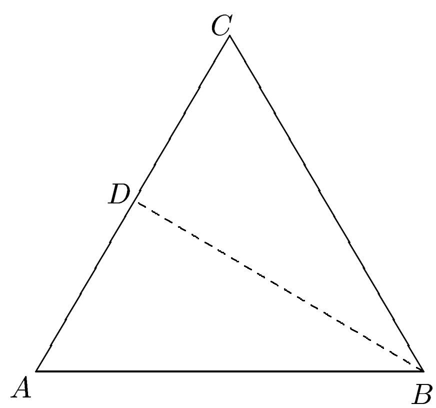
De acuerdo con el segundo teorema de congruencia, podemos afirmar que dos triángulos son iguales si verificamos la igualdad de sus tres lados (LLL). El primer y tercer teorema de congruencia dicen que para determinar si dos triángulos son o no iguales, basta con que se verefique la igualdad de dos lados y un ángulo (LAL) o dos ángulos y un lado (ALA).

Usando los criterios de congruencia podemos demostrar fácilmente que:

- En un triángulo isósceles, los ángulos adyacentes al tercer lado son iguales.
- En un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados iguales corta al lado opuesto en un ángulo recto.

EJERCICIOS

5. Sea el triángulo equilátero ABC.
   (a) Si se traza el segmento BD que divide a $\hat{B}$ en dos ángulos iguales.

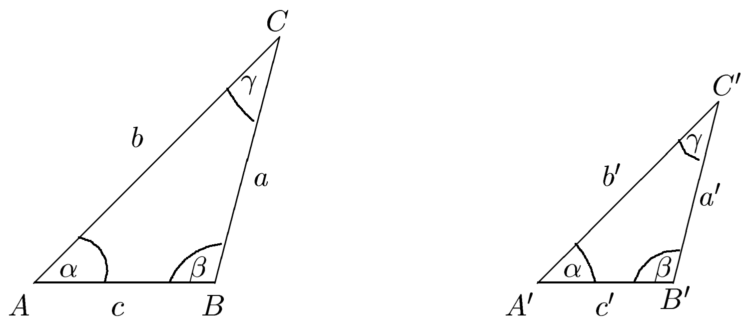


   Muestre que los triángulos ADB y CDB son iguales.
   (b) Muestre que si D es un punto de AC tal que los triángulos ADB y CDB son iguales, entonces BD es perpendicular a AC.

4.2.2 Teoremas de semejanza

Como se mencionó previamente, dos triángulos pueden tener sus ángulos iguales sin ser iguales.

Se dice que dos triángulos son **semejantes** (es decir, tienen la misma forma) si sus ángulos son iguales y sus lados homólogos (los lados opuestos a los mismos ángulos) son proporcionales.



En la figura, los lados homólogos son a y a', b y b', c y c'. La expresión son **proporcionales** significa que valen las relaciones

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

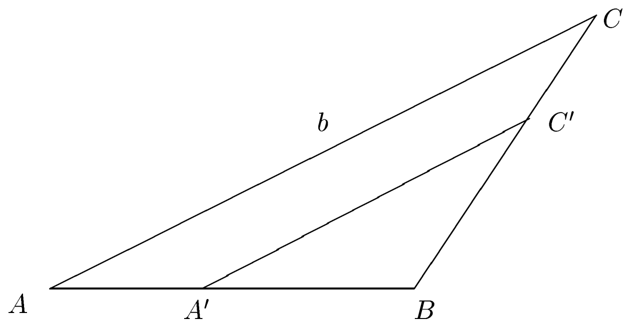
Enunciaremos a continuación los tres teoremas de semejanza, que nos aseguran cuando dos triangulos son semejante

Teoremas de semejanza

1. Dos triángulos que tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual son semejantes (LAL).
2. Dos triángulos que tienen sus tres lados proporcionales son semejantes (LLL).
3. Dos triángulos que tienen sus tres ángulos iguales son semejantes (AAA).

EJEMPLO

Consideremos el triángulo ABC de la figura siguiente.

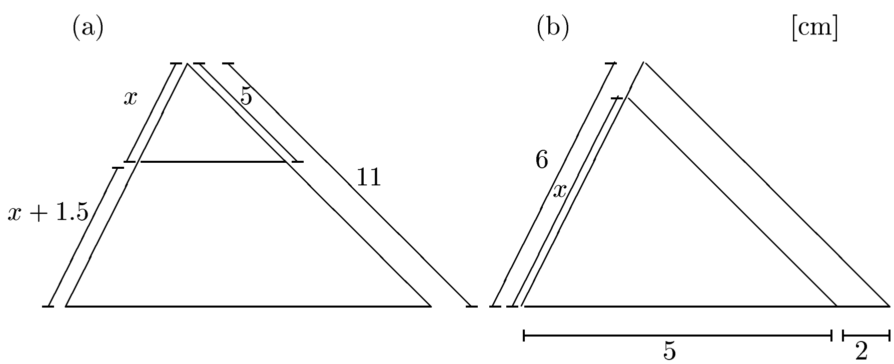


Dentro de él se traza una paralela al lado b, formando un nuevo triángulo $A'BC'$. El nuevo triángulo $A'BC'$ es semejante al original, pues $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{C} = \hat{C}'$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas y $\hat{B}$ es común. Por el tercer teorema de semejanza (AAA), los triángulos son semejantes.

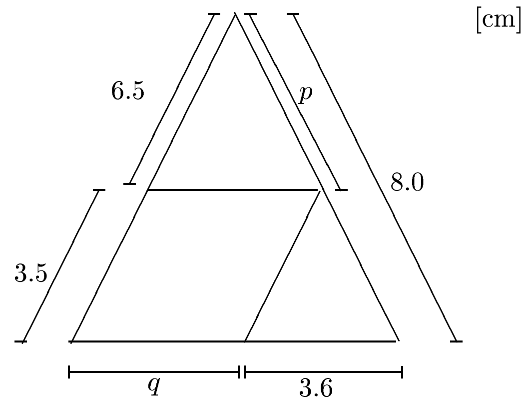
EJERCICIOS

6. Sean dos triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$, con $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $a' = 4$ cm. Calcule b'.

7. En los triángulos de la siguiente figura calcule el valor de x.



8. En el triángulo de la figura calcule el valor de p y q.



9. El ángulo $\hat{A}$ en el triángulo ABC es recto, el lado $|AB| = 36$ cm y el lado $|AC| = 48$ cm. En un punto P sobre BC, en un punto Q sobre AB y en un punto R sobre AC situamos el rectángulo $AQPR$. Sabiendo que $PQ = 2PR$, calcule $|PR|$.

10. Considere el rectángulo $ABCD$, el lado $|AB| = 10$ cm y la diagonal $|AC| = 15$ cm. De un punto P ubicado sobre el lado AC se traza una recta que corta al lado BC en un ángulo recto. Esta recta corta al lado BC en el punto Q.

    ¿Cuánto mide el segmento AP si $AP = PQ$?

4.3 Teorema de Pitágoras

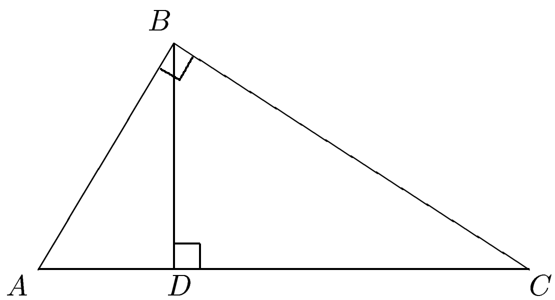
Un triángulo ABC en el cual uno de sus ángulos es recto se denomina **triángulo rectángulo**.

El lado opuesto al ángulo recto se denomina **hipotenusa**; los otros dos se denominan **catetos**.

> **Teorema:** En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

Demostración:

Consideremos el triángulo rectángulo ABC de la figura.



Tomemos un punto D tal que BD sea perpendicular a AC. Por tener ángulos iguales, los triángulos ADB y ABC son semejantes. Por la misma razón son semejantes BDC y ABC.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} |AD|/|AB| &= |AB|/|AC| \\ |DC|/|BC| &= |BC|/|AC| \end{aligned}$$

De estas igualdades resultan

$$|AB|^2 = |AC||AD| \text{ y } |BC|^2 = |AC||DC|$$

Es decir,

$$\begin{aligned} |AB|^2 + |BC|^2 &= |AC||AD| + |AC||DC| \\ &= |AC|(|AD| + |DC|) \\ &= |AC|^2. \diamondsuit \end{aligned}$$

EJERCICIOS

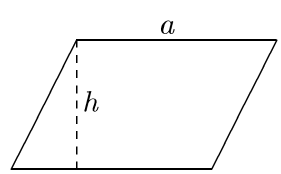
1. Sea ABC un triángulo rectángulo ($\hat{B} = 90°$). Encuentre la longitud del lado desconocido si

(a) $a = 20$ cm y $b = 50$ cm
(b) $a = 22$ cm y $c = 18$ cm
(c) $b = 25$ cm y $c = 18$ cm

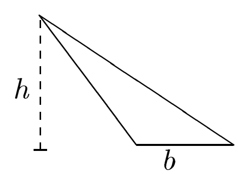
2. Encuentre la longitud de la hipotenusa si los dos catetos tienen longitud 1.
3. Encuentre la longitud del cateto mayor si la hipotenusa tiene longitud 1 y el cateto menor tiene longitud 1/2.

4.4 Cálculo de áreas y volúmenes

- El área de un paralelogramo de base b y altura h es $A = b\,h$.
- El área de un triángulo de base b y altura h es $A = b\,h/2$.

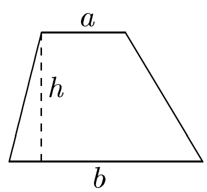


$A = ha$

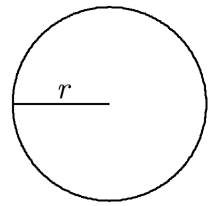


$A = \dfrac{bh}{2}$

- El área de un trapecio de bases a y b y altura h es $A = (a + b)\,h/2$.
- El área de un círculo de radio r es $A = \pi\,r^2$.

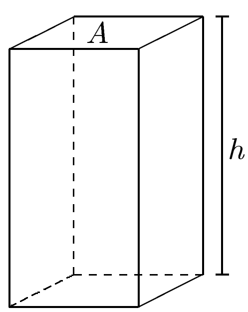


$$A = \frac{(a+b)\,h}{2}$$

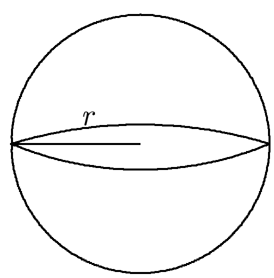


$$A = \pi r^2$$

- El volumen de un paralelepípedo regular (al igual que el de un cilindro) es $V = Ah$, donde A es el área de la base y h su altura.
- El volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4\pi}{3} r^3$.



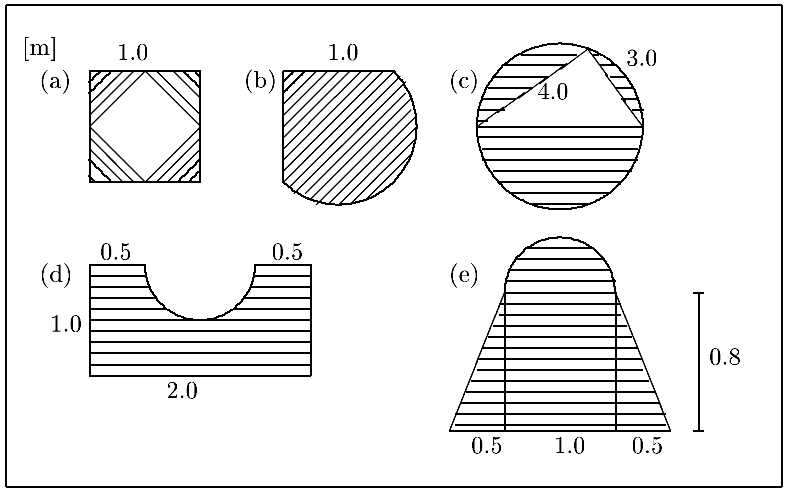
$$V = Ah$$



$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

EJERCICIOS

1. Calcule las superficies sombreadas que se muestran a continuación:

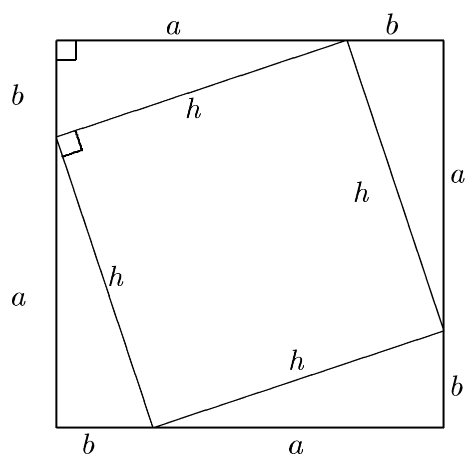


2. Calcule el área del cuadrado que muestra la figura de las siguientes maneras:

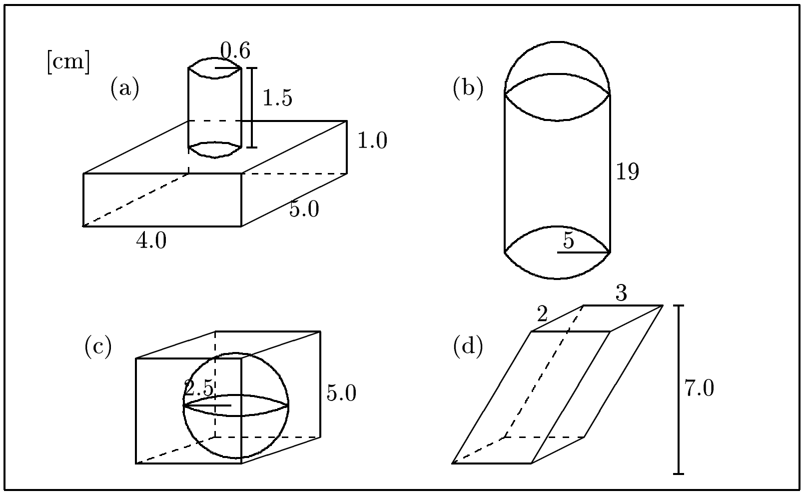
   (a) Usando la fórmula del área o sea $A = L^2$, donde $L = a + b$.

   (b) Sumando las áreas de los cuatro triángulos y del cuadrado interiores.

   Igualando las áreas calculadas en (a) y (b), demuestre el teorema de Pitágoras.



3. Encuentre los volúmenes de los cuerpos que se muestran en las siguientes figuras:



4.5 Aplicaciones

El manejo de la geometría es necesario para la resolución de problemas relacionados con la vida diaria.

EJEMPLO
Una bolita de oro cuyo radio es $r = 3$ cm se funde y se transforma en un cilindro del mismo radio. ¿Qué altura tiene este cilindro?

Solución: Llamaremos h a la incógnita del problema, es decir, la altura del cilindro. Entonces:

$$V_c = \text{volumen del cilindro} = \pi\, r^2\, h$$
$$V_b = \text{volumen de la bolita} = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$$

El volumen del cilindro necesariamente será igual al volumen de la bolita (ya que la cantidad de material utilizado es la misma), usando esta condición obtenemos

$$V_c = V_b \qquad \text{o sea} \quad \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \pi r^2\, h.$$

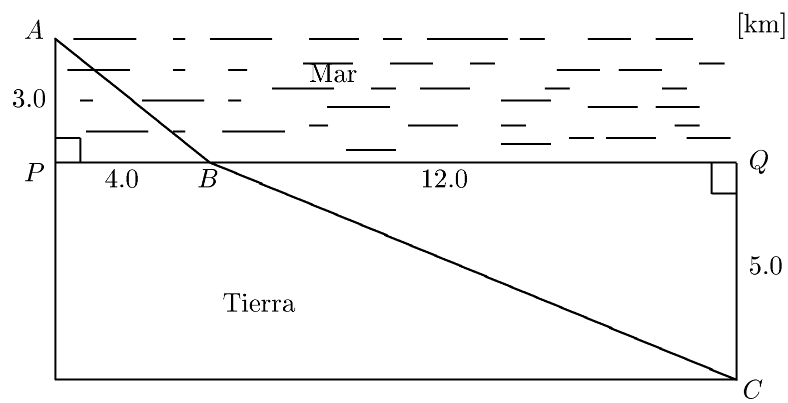
Despejando h de esta igualdad, resulta:

$$h = \frac{4}{3} r = \frac{4}{3}\, 3 = 4\,\text{cm}.$$

EJERCICIOS

Para resolver los siguientes problemas se permite el uso de máquinas calculadoras.

1. Se piensa construir una cañería de petróleo desde un puerto sumergido (A) hasta un depósito de petróleo (C), como se esquematiza en la figura.



   (a) ¿Cuán larga será la cañería?
   (b) El costo, por gastos de material y mano de obra, en el mar es de \$ 300 000 por km y en tierra es de \$ 100 000 por km. ¿Cuál es el costo total de la obra si se hace como muestra la figura?
   (c) ¿Cuánto costaría la obra si el punto B se mueve 1 km hacia P?
   (d) ¿Y si B se mueve 1 km hacia Q?

2. En un cilindro caben exactamente tres esferas de igual radio que el cilindro. Si el radio de cada esfera es 2.5 cm, ¿cuál es el volumen libre que queda entre las esferas y el cilindro?

3. Un recipiente de forma cilíndrica, con una base de superficie igual a 572 mm^2, contiene 0.04 litros de un líquido. Si se agrega un trozo de cobre de 28.68 cm^3 dentro del recipiente, diga cuál es la altura (medida en cm) que alcanza el nivel del líquido.

4. Un tanque cilíndrico, cuya base tiene un radio de 50 cm, se llena de agua. Si luego se sacan 26 baldes con 5 litros de agua cada uno, ¿cuántos cm desciende el nivel del agua?

5. Una sombrilla de forma cónica tiene un mango de 80 cm y el borde de la tela está rodeado por 188.40 cm de cinta. Cuando la sombrilla está abierta cubre hasta la mitad del mango. ¿Qué parte del mango cubre cuando está cerrada?

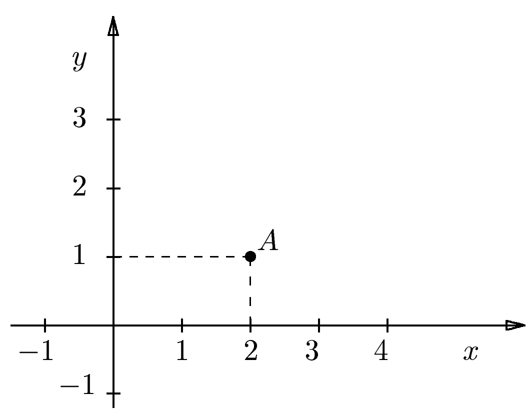
Capítulo 5

Plano cartesiano

5.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Los puntos del plano se identifican mediante pares ordenados de números reales, de manera tal que a cada punto le corresponde exactamente un par de números, y a cada par de números le corresponde exactamente un punto.

Para representar este concepto gráficamente se dibujan sobre el plano dos rectas perpendiculares. Sobre cada una de ellas se toma el punto de intersección como el punto correspondiente al número 0 (llamado **origen**), y usando la misma unidad de longitud se las transforma en rectas reales, como se muestra en la siguiente figura.



El punto A tiene coordenadas $(2, 1)$

El eje horizontal se denomina **eje de abscisas** (o **eje** x) y el eje vertical es el llamado **eje de ordenadas** (o **eje** y).

Dado un punto cualquiera del plano, se lo identifica mediante un par ordenado de números, siendo el primer elemento del par la coordenada x del punto, y el segundo la coordenada y del punto.

> A cada punto le corresponde un único par de coordenadas, y a cada par de números reales le corresponde un único punto del plano.

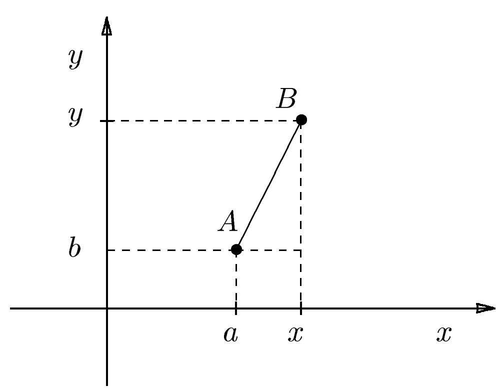
EJERCICIOS

Grafique los siguientes puntos:

1. $(1,3)$
2. $(0,2)$
3. $(2,0)$
4. $(-1,3)$
5. $(2,-1/2)$
6. $(-0.5,0.5)$

5.2 Distancia entre dos puntos

Dados un punto cualquiera $B=(x,y)$ y el punto $A=(a,b)$ se puede encontrar la distancia entre ellos mediante el teorema de Pitágoras, como se muestra en la figura.



$$\boxed{d(A,B)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

EJERCICIOS

Encuentre la distancia entre los siguientes puntos:

1. $(1, 3)$, $(2, 1)$
2. $(5, 3)$, $(2, 7)$
3. $(2, 3)$, $(-1, 2)$
4. $(5, 2)$, $(3, -1)$
5. $(3, -2)$, $(-3, 2)$
6. $(-1, 6)$, $(-5, -3)$

5.3 Curvas determinadas por ecuaciones

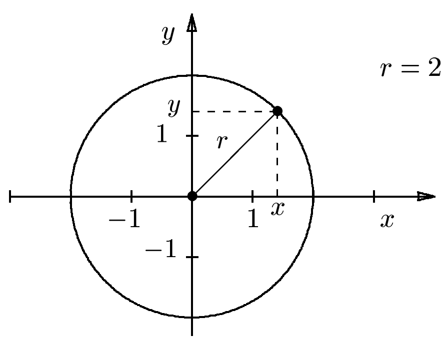
Toda curva está formada por un conjunto de puntos del plano. A estos puntos les corresponden ciertos valores de sus coordenadas y estos valores satisfacen alguna ecuación.

5.3.1 Ecuación de la circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia constante (**radio**) de un punto dado (**centro**).

EJEMPLO

La figura muestra la circunferencia con centro en el origen y radio 2.



Con ayuda de la fórmula de la distancia podremos escribir la ecuación que define a la circunferencia, o sea determinaremos la ecuación que el par (x, y) deberá satisfacer si éste representa un punto de la circunferencia.

Afirmar que el punto (x, y) pertenece a la circunferencia de centro $C = (a, b)$ y radio r equivale a afirmar que la distancia entre el punto dado y C es igual al radio. Para evitar raíces cuadradas se usa la afirmación equivalente: el cuadrado de la distancia es igual al cuadrado del radio:

$$\boxed{r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Esta ecuación (igualdad que es cierta sólo para algunos valores de x e y) se denomina **ecuación** de la **circunferencia** de **centro** (a, b) y **radio** r.

EJEMPLOS

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro $C = (-1, 2)$ que pasa por el punto $A = (2, -2)$.

   Solución:

   Conocemos el centro; por lo tanto sólo nos falta averiguar el radio. Éste es igual a la distancia entre A y C:

   $$[d(A, C)]^2 = (2 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 25$$

   y la ecuación buscada es

   $$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

2. Sea la ecuación

   $$x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9. \tag{5.1}$$

   Demuestre que corresponde a la ecuación de una circunferencia encontrando su centro y el radio.

Solución:

Comenzamos completando el cuadrado en los primeros dos términos y los segundos dos términos del primer miembro de (5.1):

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9.$$

$$y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4.$$

Sustituimos estos resultados en la ecuación (5.1):

$$\begin{aligned} (x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 &= -9 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 4. \end{aligned}$$

La ecuación original corresponde, entonces, a la circunferencia de centro $C = (3, 2)$ y radio $r = 2$.

3. Se desea encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A = (1, 1)$, $B = (4, 0)$ y $C = (7, 1)$.

Solución:

Toda circunferencia tiene una ecuación general de la forma

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0.$$

Para encontrar la ecuación buscada basta con averiguar los valores de los coeficientes. Para que A, B y C pertenezcan a la circunferencia, deben satisfacer su ecuación. Es decir, deben valer las siguientes tres igualdades:

$$\begin{aligned} 1^2 + a \times 1 + 1^2 + b \times 1 + c &= 0 \\ 4^2 + a \times 4 + 0^2 + b \times 0 + c &= 0 \\ 7^2 + a \times 7 + 1^2 + b \times 1 + c &= 0 \end{aligned}$$

Resulta así un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (a, b y c). Se acostumbra a escribirlo como sigue:

$$\begin{aligned} a + b + c &= -2 \\ 4a + c &= -16 \\ 7a + b + c &= -50 \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación de la tercera obtenemos $6a = -48$. Por lo tanto, $a = -8$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación resulta $c = 16$.

Entonces, podemos escribir la primera ecuación como:

$$-8 + b + 16 = -2,$$

es decir $b = -10$. La ecuación buscada es

$$x^2 - 8x + y^2 - 10y + 16 = 0\,.$$

Completando los cuadrados obtenemos la ecuación equivalente

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

Es decir, la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados tiene centro $C = (4,5)$ y radio $r = 5$.

EJERCICIOS

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r:

   (a) $C = (1,3)$, $r = 2$
   (b) $C = (-2,5)$, $r = 1$
   (c) $C = (-5,-1)$, $r = 1/2$
   (d) $C = (1,2)$, $r = 0.5$
   (e) $C = (-2,1/2)$, $r = 1$
   (f) $C = (-0.1,7/4)$, $r = 5^{1/2}$

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro C que pasa por el punto A en los siguientes casos:

   (a) $C = (1,0)$, $A = (-1,-2)$
   (b) $C = (-1,3)$, $A = (1,-3)$
   (c) $C = (\sqrt{3},1)$, $A = (-3,0)$
   (d) $C = (a,b)$, $A = (c,d)$

3. Encuentre el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

   (a) $x^2 + y^2 - 2y = 3$
   (b) $x^2 + 8x + y^2 + 6y = -21$
   (c) $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$
   (d) $x^2 + 8x + y^2 = -12$
   (e) $x^2 - 3x = -y^2 + 4y + 9$
   (f) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$
   (g) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

4. Encuentre las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los siguientes puntos. Luego calcule sus centros y radios:

   (a) $(-1,1)$, $(3,2)$, $(3,5)$
   (b) $(-1,2)$, $(0,-2)$, $(0,2)$
   (c) $(2,2)$, $(5,5)$, $(8,2)$

5.3.2 Ecuación de la recta

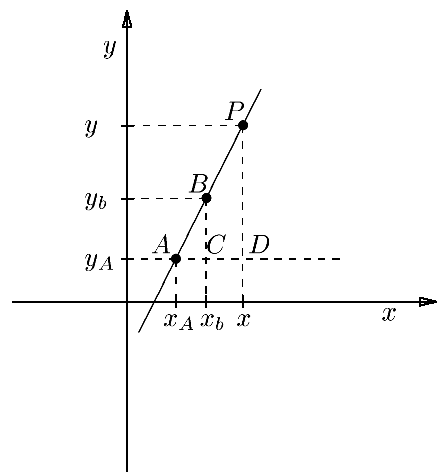
Sabemos que por dos puntos en el plano pasa una única recta o, dicho de otro modo, que dos puntos determinan una única recta. Para poder encontrar una ecuación para la recta debemos describir a la misma, al igual que hicimos con la circunferencia, a partir de la propiedad geométrica que satisfacen sus puntos.

Una recta no vertical (no paralela al eje y) tiene la propiedad de que sea cual fuere el par de puntos $A = (x_A, y_A)$ y $B = (x_B, y_B)$ que se elija, el cociente

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

no cambia, o sea es constante. Esto puede demostrarse fácilmente usando el criterio de semejanza (AAA) para afirmar que los triángulos ACB y ADP de la siguiente figura son semejantes.

La figura muestra que todo punto $P = (x, y)$ de esa recta debe satisfacer la igualdad $|PD|/|AD| = |BC|/|AC|$.



$$|PD| = y - y_A, \qquad |AD| = x - x_A, \qquad |BC| = y_B - y_A \qquad \text{y} \qquad |AC| = x_B - x_A$$

Es decir:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m. \tag{5.2}$$

Llamamos a la constante m la **pendiente** de la recta. Si despejamos y de (5.2), obtenemos:

$$y = mx + b, \tag{5.4}$$

con $b = y_A - m\,x_A$. Todo punto (x, y) que pertenezca a la recta determinada por los puntos A y B deberá satisfacer esta ecuación. Se dice que (5.4) es la ecuación de la recta que pasa por A y B.

La pendiente m es la medida de la inclinación de una recta, por lo tanto **dos rectas paralelas tienen la misma pendiente**. Nótese que una recta horizontal ($y = b$) tiene pendiente cero y que una recta que “sube” hacia la derecha tiene pendiente positiva mientras que una recta que “cae” hacia la derecha tiene pendiente negativa. El concepto de pendiente de una recta vertical no tiene sentido puesto que implicaría la división por cero. Por lo tanto, la pendiente de una recta vertical queda sin definir; en este caso la ecuación de la recta será $x = a$.

EJEMPLOS

1. Los pares (x, y) que satisfacen la ecuación $y = 2x + 1$ se encuentran sobre una recta. Dibuje esta recta en el plano.

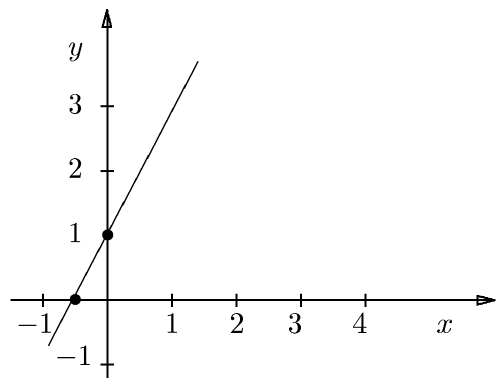
   Solución:

   Para dibujar la recta basta dibujar dos puntos por los que ésta pasa y unirlos mediante una línea recta. Si elegimos $x = 0$ vemos directamente de la ecuación que
   $$y = 2 \times 0 + 1 = 1$$
   y si colocamos $y = 0$ deducimos rápidamente que
   $$0 = 2x + 1, \qquad \Rightarrow x = -1/2.$$
   La recta determinada por los puntos $(0,\ 1)$ y $(-1/2,\ 0)$ se muestra en la siguiente figura:

2. Los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (4, 1)$ determinan una recta, encuentre su ecuación.

   Solución:

   Por lo dicho anteriormente sabemos que la ecuación de la recta es
   $$y = mx + b.$$
   Para encontrar la ecuación de la recta que pasa por A y B determinaremos primero su pendiente:
   $$m = \frac{1-2}{4-1} = \frac{-1}{3}\,,$$



entonces tenemos que

$$y = \frac{-1}{3}x + b.$$

Para determinar el valor de b usaremos el hecho de que la recta pasa por el punto A (o el punto B). O sea que, por ejemplo, reemplazando en la ecuación anterior a (x, y) por $(1, 2)$ (o por $(4, 1)$) obtendremos

$$1 = \frac{-2}{3} + b.$$

De aquí concluimos que $b = 7/3$.

EJERCICIOS

5. Determine las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos:
   (a) $(2, 1)$ y $(1, 2)$
   (b) $(-1, 1)$ y $(0, 2)$
6. Encuentre la ecuación de la recta
   (a) $y = mx + 1$ que pasa por el punto $(1, 0)$
   (b) $y = 3x + b$ que pasa por el punto $(1, 4)$

(c) $y = mx + 1$ que pasa por el punto $(1, 3)$

(d) $y = 3x + b$ que pasa por el punto $(4, -1)$

7. Dibuje las rectas determinadas por los siguientes pares de ecuaciones y decida si las mismas son paralelas o no. En este último caso encuentre el punto en que se cortan.

   (a) $y = 2x + 2, \quad y = 2x - \dfrac{5}{2}$

   (b) $y = 2, \quad x = 5$

   (c) $y = -2x + 3, \quad y = x - 3$

Capítulo 6

Desigualdades y valor absoluto

6.1 Desigualdades

Propiedades básicas de las desigualdades

- Transitividad:
  - Si $a < b$ y $b < c$, entonces vale $a < c$
- Relación entre el orden y las operaciones aritméticas
  - Si $a < b$ y c es cualquier número real, entonces $a + c < b + c$
  - Si $a < b$ y c es cualquier número real positivo, entonces $ac < bc$
  - Si $a < b$ y c es cualquier número real negativo, entonces $ac > bc$
  - $a > 0$ si y solo si $1/a > 0$
  - Si $a < b$, distintos de cero y de igual signo, entonces $1/a > 1/b$

A continuación, verificaremos estas propiedades con algunos ejemplos.

1. $a < b$ y $c \in I\!R \Rightarrow a + c < b + c$, por ejemplo:

$$\begin{array}{rcll} -6 & < & -2 & \text{entonces} \\ (-6)+(-8) & < & (-2)+(-8) & \quad \text{o sea} \\ -14 & < & -10. & \end{array}$$

2. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$, por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} -6 & < & -2 \\ (-6)\times 3 & < & (-2)\times 3 \\ -18 & < & -6. \end{array}$$

3. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$, por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} -6 & < & -2 \\ (-6)\times(-3) & > & (-2)\times(-3) \\ 18 & > & 6. \end{array}$$

4. $a < b < 0 \Rightarrow 1/a > 1/b$, por ejemplo:

$$\begin{array}{rcll} -6 & < & -2 & \Rightarrow \\ -\dfrac{1}{6} & > & -\dfrac{1}{2}. & \end{array}$$

Así como en el caso de las igualdades cuando aparece una incógnita se las denomina ecuaciones, cuando tenemos desiguadades en las que hay un término desconocido, las denominamos **inecuaciones**.

Por ejemplo:

$$2x + 3 < 2$$

es una inecuación. El problema consiste en encontrar el o los valores de x que hagan verdadera a esta desigualdad; es decir, tenemos que encontrar las soluciones de esta inecuación.

EJEMPLOS

1. Sea la desigualdad $7x + 3 < x - 2$.

   Si tomamos $x = 0$ se la transforma en una afirmación falsa: $3 < -2$; se dice que 0 **no satisface** la desigualdad. Si tomamos $x = -1$ obtenemos una afirmación verdadera: $-4 < -3$; se dice que -1 **satisface** la igualdad.

   A primera vista no resulta fácil determinar cuáles son los números que satisfacen la desigualdad. Para averiguarlo operamos con ambos miembros, siguiendo las leyes que rigen las desigualdades:

$$\begin{array}{rcll} 7x+3 & < & x-2 & \text{(restamos a ambos miembros) } x \\ 6x+3 & < & -2 & \text{(restamos a ambos miembros) } 3 \\ 6x & < & -5 & \text{(dividimos ambos miembros por el número positivo) } 6 \\ x & < & -\dfrac{5}{6}. & \end{array}$$

La última desigualdad es equivalente a la desigualdad de partida: las dos son satisfechas por los mismos números.

2. Resuelva la desigualdad $3x + 2 > 21x - 5$.

   Solución:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &> 21x - 5 \\ -18x + 2 &> -5 \\ -18x &> -7. \end{aligned}$$

   Tenemos que dividir ambos miembros por un número negativo, entonces se invierte el sentido de la desigualdad:

$$x < \frac{7}{18}.$$

3. ¿Para qué valores de x se satisface la inecuación $(x - 1)(x - 2) > 0$?

   Solución:

   El producto de dos factores es positivo cuando ambos tienen el mismo signo, o sea cuando los dos son simultáneamente positivos o negativos. Para poder determinar el signo del producto de los distintos factores, resulta práctico confeccionar la siguiente tabla:

	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$x > 2$
$x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   De aquí podemos deducir que la desiguadad se satisface para $x < 1$ ó $x > 2$, o sea $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

EJERCICIOS

1. Verifique las leyes de monotonía multiplicando miembro a miembro las siguientes desigualdades por el factor indicado:

(a) $3 > 1$; 6

(b) $2 < 4$; $\frac{-1}{2}$

(c) $-2 < 5$; -3

(d) $-2 > -6$; 5

(e) $3 > 1$; -5

2. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $5x - 8 > 2$

(b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x > 3x + \frac{2}{3}$

(c) $3(2x + 1) > 5(4 - x)$

(d) $\frac{3x - 5}{2} < x + 1$

(e) $2z - 3(5 - 3z) > \frac{4 - (2z - 3)}{3}$

(f) $-10x + 2 < 22$

(g) $\frac{-x}{8} + 1 > -3$

(h) $2 \leq 3u + 2$

(i) $x - \frac{5}{2}x < 3$

(j) $6 - \frac{4}{5}t > \frac{7}{5}t$

(k) $3u - 2(u + 2) > 5u - 1$

(l) $(x + 1)^2 - 2 < x^2 + 5$

3. Grafique las siguientes desigualdades:

(a) $x > 3$

(b) $x \leq -3$

4. Encuentre todas las x que satisfagan:

(a) $2(x - 1)(x + 2) < 0$

(b) $(1 - 2x)(x + 2) > 0$

(c) $x^2 + 2x > 18x$

(d) $x^3 - 3x^2 + 2x > 0$

(e) $\frac{(2x + 1)(x - 3)}{x + 5} \geq 0$

Ayuda: recuerde que a los efectos de controlar el signo da lo mismo considerar el factor $x + 5$ que el factor $\frac{1}{x + 5}$.

(f) $x - 3 \leq \frac{2x}{x - 2}$.

Ayuda: transforme la desigualdad de tal manera que uno de los miembros de la desigualdad resultante sea 0 y el otro sea un producto.

(g) $\frac{1}{x} \leq 2x - 1$

6.2 Valor absoluto y desigualdades

Dado un número cualquiera x se define su **valor absoluto** $|x|$ como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente se puede interpretar el valor absoluto en términos de distancia: $|x|$ es la distancia entre x y 0; y si a y b son números reales cualesquiera, $|a-b|$ es la distancia entre a y b.

EJEMPLOS

1. (a) $|-2| = -(-2) = 2$
   (b) $|5| = 5$
   (c) $|\pi| = \pi$
   (d) $|0| = 0$
   (e) $|5-2| = |3| = 3$
   (f) $|2-5| = |-3| = -(-3) = 3$

2. La distancia entre -2 y -3 es

$$|-2-(-3)| = |-2+3| = |1| = 1.$$

   Naturalmente, la distancia entre -3 y -2 es la misma:

$$|-3-(-2)| = |-3+2| = |-1| = 1.$$

3. $\sqrt{x^2} = |x|$, por ejemplo $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.

EJERCICIOS

1. Encuentre las distancias entre los siguientes números:
   (a) 7 y -3
   (b) -5 y -20
   (c) -5 y 4
   (d) $3\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$
   (e) -2π y $-\dfrac{\pi}{2}$

2. Calcule:

   (a) $|-2|$
   (b) $|0|$
   (c) $|3-5|$
   (d) $|\sqrt{14}-\sqrt{15}|$
   (e) $|2-\pi|$

3. Encuentre los x que satisfacen:

   (a) $|x|=2$
   (b) $|2x-4|=1$
   (c) $|x-3|=2$
   (d) $|x+1|=2$

En algunos casos, encontramos desigualdades que involucran términos en los que aparece el valor absoluto. A continuación ejemplicaremos cómo se resuelve este tipo de problemas.

EJEMPLOS

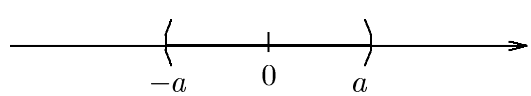
1. Resuelva la desigualdad $|x|<4$.

   Solución:

   Pedir que $|x|<4$ equivale a pedir que la distancia de x a 0 se encuentre entre -4 y 4. O sea que la respuesta es $-4<x<4$. Observe que un número que se encuentra entre -4 y 4 satisface las dos desigualdades al mismo tiempo $x>-4$ y $x<4$, o equivalentemente $x\in(-4,4)$. Esto puede deducirse formalmente de la definición como sigue:

   Tomemos un $x\geq 0$, entonces $|x|=x<4$. Si en cambio $x\leq 0$ tendremos que $|x|=-x<4 \Leftrightarrow -4<x$. Entonces los números reales que satisfacen $|x|<4$ son aquellos que están en alguno de los dos intervalos $(-4,0]$ ó $[0,4)$, es decir, aquellos que están en la unión $(-4,0]\cup[0,4)$, como ya vimos.

   En general podemos decir que si $|x|<a$ entonces $-a<x<a$, o equivalentemente $x\in(-a,a)$.



2. Resuelva la desiguadad $|2x - 3| < 2$.

   Solución:

   Usando lo dicho en el ejemplo anterior, escribimos

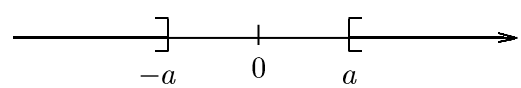
   $$\begin{array}{lll} -2 & < 2x - 3 < & 2 \quad \text{(sumamos 3 a ambas desigualdades)} \\ 1 & < 2x < & 5 \quad \text{(dividimos ambas desigualdades por 2)} \\ \frac{1}{2} & < \; x < & \frac{5}{2} \end{array}$$

   $\Rightarrow 1/2 < x < 5/2$, o sea, $x \in (1/2, 5/2)$.

3. Resuelva la desigualdad $|x| \geq 4$.

   Solución:

   Pedir que valga $|x| > 4$ equivale a pedir que la distancia de x a 0 sea mayor a 4. Por lo tanto la respuesta es $x \leq -4$ ó $x \geq 4$ o, equivalentemente, $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$.

   Observe que en este caso las dos desigualdades no se pueden satisfacer al mismo tiempo, y por lo tanto es **incorrecto** escribir $-4 \geq x \geq 4$.

   En general podemos decir que si $|x| \geq a \geq 0$ entonces $x \leq -a$ ó $x \geq a$, o equivalentemente $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

4. Resuelva la desigualdad $|2x + 4| > 3$.

   Solución:

   Sabemos que:

   $$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4 & 2x+4 \geq 0 \\ -(2x+4) & 2x+4 < 0 \end{cases}$$

   y además $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Por lo tanto tenemos:

$x < -2$	$x \geq -2$
$-(2x+4) > 3$	$2x+4 > 3$
$2x+4 < -3$	
$2x < -7$	$2x > -1$
$x < -7/2$	$x > -1/2$

$\Rightarrow x < -7/2$ ó $x > -1/2$, o equivalentemente $x \in (-\infty, -7/2) \cup (-1/2, \infty)$.

EJERCICIOS

4. Grafique las siguientes desigualdades:

(a) $|x| \leq 5$
(b) $|x-4| < 5$
(c) $|x-4| \leq 5$
(d) $|x| > 2$
(e) $|x| \geq 3$
(f) $|x-4| > 5$

5. Encuentre todos los valores de x que satisfacen:

(a) $|x+1| < 2$
(b) $|2x-4| < 1$
(c) $|x+2| > 5$
(d) $|3x-4| > 2$

6.3 Ejercicios suplementarios. Capítulos 4-6

1. Determine la ecuación de la recta $y = mx + 5$ que pasa por el punto $(1, 2)$.

2. Grafique la curva determinada por la ecuación $2x + 3y - 6 = 0$.

3. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia determinada por la ecuación:

$$x^2 - 3x + y^2 + 4y = 0.$$

4. Resuelva la inecuación:
$$\left|x - \frac{5}{4}\right| > \frac{7}{4}.$$

5. Encuentre los x que satisfacen:
$$\frac{1}{x} < \frac{5-2x}{x+2}.$$

6. Determine los x para los cuales se cumple que $x^2 + 6x + 1 \leq -4$.

Capítulo 7

Logaritmo

Sea $a \neq 1$ un número real positivo. Entonces para cada número positivo y existe un único número real x tal que $a^x = y$. A este número x se le llama **logaritmo** en **base** a de y, y lo denotamos $x = \log_a y$. Es decir:

Definición: Sean a e y positivos, $a \neq 1$, entonces

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$$

EJEMPLO
Sean $a = 2$ e $y = 4$.
Entonces la igualdad $2^x = 4$ implica que $x = 2$ o, equivalentemente, $x = \log_2 4$.

De la definición recientemente enunciada, tenemos que para todo $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1,$$

y como $y = a^x \ \Leftrightarrow \ x = \log_a y$ reemplazando x en la primera igualdad, podemos entonces escribir

$$y = a^{\log_a y},$$

por ejemplo $9 = 2^{\log_2 9}$.

En la práctica hay dos bases de interés: $a = 10$ y $a = \mathrm{e} \approx 2.718281\ldots$ El logaritmo en base 10 se denota lg y en base e se denota ln. O sea:

$$y = 10^x \;\Leftrightarrow\; x = \lg y$$
$$y = \mathrm{e}^x \;\Leftrightarrow\; x = \ln y$$

EJEMPLOS

1. $\lg 1000 = 3$ porque $1000 = 10^3$
2. $\lg \sqrt{10} = 1/2$ porque $\sqrt{10} = 10^{1/2}$
3. $\lg 0.0001 = -4$ porque $0.0001 = 1/10000 = 10^{-4}$
4. $\ln \sqrt{\mathrm{e}} = 1/2$ porque $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{1/2}$
5. ¿Para qué x se cumple $\log_3 x = 5$?

   Solución:
   De la definición, tenemos directamente que $x = 3^5 = 243$.

EJERCICIOS

1. Determine

(a) $\lg 100$	(d) $\lg \sqrt[3]{10}$	(g) $\log_2 2$
(b) $\lg 1000$	(e) $10^{\lg 17.7}$	(h) $\log_3 9$
(c) $\lg 10^{-\pi}$	(f) $\lg 1$	(i) $\ln \sqrt{\mathrm{e}}$

2. Calcule

(a) $\log_{11} \dfrac{1}{121}$ (b) $\ln \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ (c) $\ln \mathrm{e}^3$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $\mathrm{e}^x = 9$ (b) $\lg x = -1$ (c) $3 \ln x = 2$ (d) $\log_x 7 = -2$ (e) $2^x = 6$ (f) $\log_a x = \dfrac{1}{2}$

A continuación enunciamos las siguientes reglas de logaritmos (para valores de a, b, x, e y que tengan sentido):

Reglas de logaritmos

$$\begin{aligned}
\log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\
\log_a x^s &= s \log_a x \\
\log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de las potencias y la definición de logaritmo demostraremos la primera y la cuarta regla enunciadas. Dejamos como ejercicio la demostración de la segunda y la tercera.

- **Demostración de la fórmula del producto:**

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Como

$$x = a^{\log_a x} \qquad \text{e} \qquad y = a^{\log_a y},$$

escribimos

$$\begin{aligned} x\,y &= a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} \\ &= a^{\log_a x + \log_a y}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$x\,y = a^{\log_a x\,y}.$$

Entonces:

$$a^{\log_a x\,y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

lo que implica que

$$\log_a x\,y = \log_a x + \log_a y. \diamondsuit$$

- **Demostración de la fórmula de cambio de base:**

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Llamamos $t = \log_a x$. Entonces $x = a^t$, y $\log_b x = \log_b a^t = t \log_b a$. O sea que

$$t = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \diamondsuit$$

Estas reglas se pueden usar para calcular el logaritmo de distintos números o para transformar expresiones, como veremos en los ejemplos a continuación.

EJEMPLOS

1. Determine $\log_2 36 - \frac{1}{2} \log_2 81$.

   Solución:

   Usando las leyes del logaritmo tenemos

$$\frac{1}{2} \log_2 81 = \frac{1}{2} \log_2 9^2 = \frac{2}{2} \log_2 9.$$

   Entonces

$$\log_2 36 - \frac{1}{2} \log_2 81 = \log_2 36 - \log_2 9 = \log_2 \frac{36}{9} = \log_2 4 = 2 \log_2 2 = 2.$$

2. Escriba la expresión $2 \ln (x+1) - 3 \ln (x-1)$ como un solo logaritmo.

   Solución:

$$2 \ln (x+1) - 3 \ln (x-1) = \ln (x+1)^2 - \ln (x-1)^3 = \ln \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}.$$

EJERCICIOS

4. Calcule:
   (a) $\log_4 \frac{5}{4} + \log_4 \frac{4}{5}$
   (b) $\ln \frac{1}{\mathrm{e}} + 2 \ln \sqrt{\mathrm{e}}$
   (c) $\frac{1}{2} \lg 100 - \lg 10^{-1}$
   (d) $\log_5 1000 - \log_5 40$
   (e) $\ln (1+1) + \ln \left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln \left(1+\frac{1}{3}\right) + \ln \left(1+\frac{1}{4}\right) + \ln \left(1+\frac{1}{5}\right)$
5. Exprese $\log_2 x$ en base 8.
6. Calcule $\log_4 a$ si $\log_a 16 = \frac{1}{2}$.
7. Sabiendo que $\lg x = \frac{5}{8}$ y $\log_a x = \frac{2}{3}$, calcule $\lg a$.
8. Escriba como un solo logaritmo:
   (a) $\frac{1}{2} \ln (x^2+1) + \frac{2}{3} \ln (x^2-1)^{3/4}$ (b) $2 \ln (x^2-1) - 4 \ln (x+1)$
9. Sabiendo que $\lg 2 \approx 0.3010$ y que $\lg 3 \approx 0.4771$ aproxime los siguientes logaritmos:
   (a) $\lg 18$ (b) $\lg \frac{18}{6}$ (c) $\lg \frac{80}{90}$

7.1 Ecuaciones con logaritmo

A continuación ejemplificaremos como resolver ecuaciones en las cuales aparece el logaritmo.

EJEMPLOS

1. Resuelva la siguiente ecuación:

$$\log_3 x + \log_3(x-2) = 1.$$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_3 x + \log_3(x-2) &= 1 \qquad \text{(usamos las propiedades de log)} \\ \log_3\left(x^2-2x\right) &= 1 \qquad \text{(usamos la definición de log)} \\ x^2-2x &= 3. \end{aligned}$$

Las raíces de esta última ecuación son $x=3$ y $x=-1$. Sin embargo, como $\log_a x$ está definido sólo para $x>0$, $x=-1$ no es solución, y la única solución es $x=3$.

2. Resuelva $2^{1-x}3^x = \sqrt{12}$.

Solución:

$$\begin{aligned} 2\times 2^{-x}3^x &= \sqrt{12} \qquad \text{(según las reglas de la potencia)} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \sqrt{3} \qquad \text{(tomamos logaritmo en base e a ambos miembros)} \\ x\ln\frac{3}{2} &= \frac{1}{2}\ln 3 \\ x &= \frac{\ln 3}{2\ln\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   (a) $\log_2 x + \log_2 5 = 6$

   (b) $\log_5 x^2 - \log_5 (x-5) = 2$

   (c) $\log_2 (x+1) + \log_2 (x-1) = 3$

   (d) $(\ln x)^2 = \ln x^2$

   Ayuda: Llame $y = \ln x$.

   (e) $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$

   (f) $\dfrac{\lg 2x}{\lg (4x-15)} = 2$

2. Despeje u de la fórmula $m_0 = M_s \left(1 - e^{-v/u}\right)$.

3. Despeje K de la fórmula $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{(K-1)/K}$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   (a) $5^{3x} 2^x = \sqrt{250}$

   (b) $2^x 4^{1-x} = 5^{2-x}$

   (c) $x^{\ln x} = e$

   (d) $x^{\lg x} = 10$

   (e) $x^{1-\lg x} = 0.01$

   (f) $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = 2$

5. Resuelva y de la ecuación siguiente:

$$\ln \frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}} = 3x.$$

7.2 Ejercicios con calculadora

Mostraremos cómo usar las reglas de logaritmos, en este caso la regla del cambio de base, para realizar los cálculos previos necesarios antes de usar la calculadora.

EJEMPLO

Calcule con 4 decimales el valor aproximado de $\log_5 72$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\log_5 72 &= x \\
72 &= 5^x \quad \text{(aplicamos la definición de } \log_5) \\
\lg 72 &= x \lg 5 \quad \text{(tomamos logaritmo en base 10 a ambos miembros)} \\
x &= \frac{\lg 72}{\lg 5} \approx 2.6572.
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

Calcule con 4 decimales el valor aproximado de:

1. $\lg 3.7$
2. $\lg \mathrm{e}$
3. $\log_2 15$
4. $\ln 10$
5. $\log_{1/2} 3$

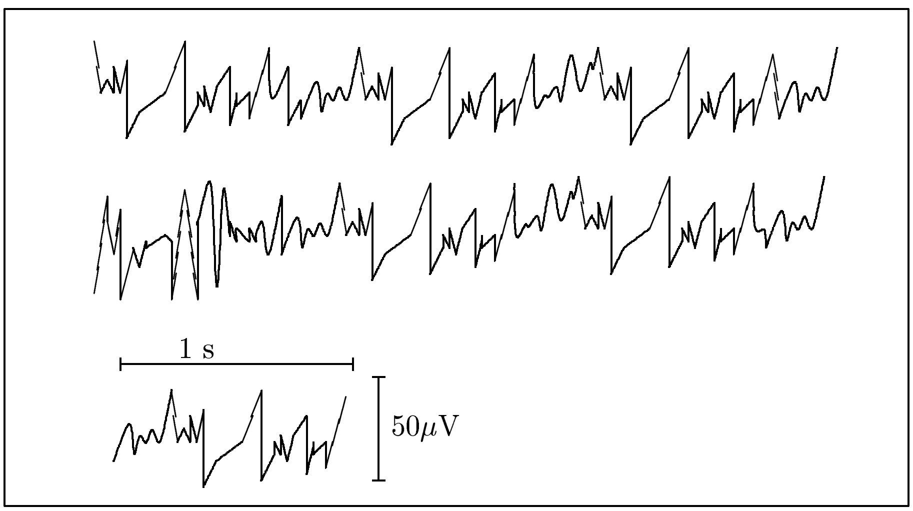
Capítulo 8

Funciones

8.1 Introducción

Cuando las células de la corteza cerebral trabajan, generan un voltaje. Midiendo cómo cambia el voltaje V con el tiempo t se puede descubrir el funcionamiento anormal del cerebro. A este método se lo llamó EEG (electro-encefalograma).

El cambio del voltaje medido **depende** del tiempo transcurrido.



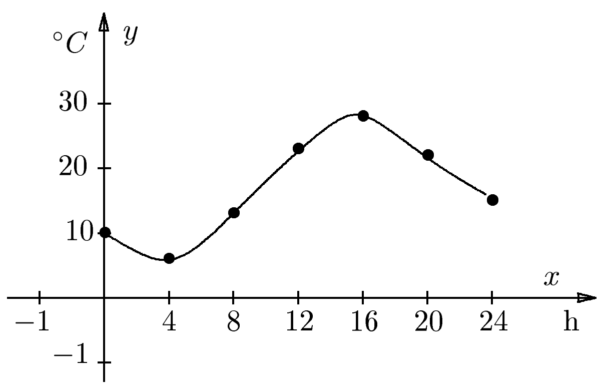
En general, la manera en que una cantidad cualquiera y (en el ejemplo arriba mencionado el voltaje V) depende de otra cantidad x (el tiempo t) puede ser presentada de formas muy diferentes, como se ejemplifica a continuación.

EJEMPLOS

1. La relación entre el peso, x medido en gramos , de una carta y el costo de su franqueo, y en pesos, se extrae de la siguiente tabla:

Peso x g	**Costo** y \$
100	0.60
250	0.85
500	1.25
1000	1.75

2. La relación entre el tiempo, x horas, y la temperatura del medio ambiente, $y\,^\circ$C, durante un día se puede describir con la siguiente gráfica:

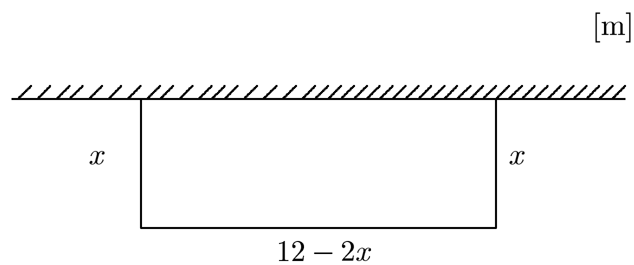


3. En una prueba de frenos de un auto en un camino seco se encuentra que la relación entre la distancia de frenado, y m, con la velocidad del auto, x km/h, puede representarse mediante la fórmula $y = 0.012\,x^2$.

En estos tres ejemplos vemos que a cada valor de x le corresponde exactamente un único valor de y (de acuerdo a una tabla, una gráfica o una fórmula) definiéndose de esta manera una dependencia específica de la **variable** y con la **variable** x. Decimos entonces en cada caso que "y es una función de x" y que x es la variable **independiente** e y es la variable **dependiente**.

8.2 El concepto de función

Con una valla de 12 m se desea cercar tres de los lados de un jardín rectangular que se encuentra contra un muro, como se muestra en la figura.



El área de este jardín es de y m^2 y está dada por la fórmula

$$y = x\,(12-2x) = 12\,x - 2x^2.$$

Con ayuda de esta fórmula podemos calcular el área y para **cada valor permitido** de x.

¿Cuáles son los valores permitidos de x?

Sabemos que los lados del rectángulo deben ser positivos, por lo tanto $0 < x < 6$ (observe la figura y entenderá por qué).

Tenemos entonces que

$$y = 12\,x - 2x^2\,, \qquad 0 < x < 6.$$

Por ejemplo, si el lado vertical del rectángulo es x=4 m, el área será

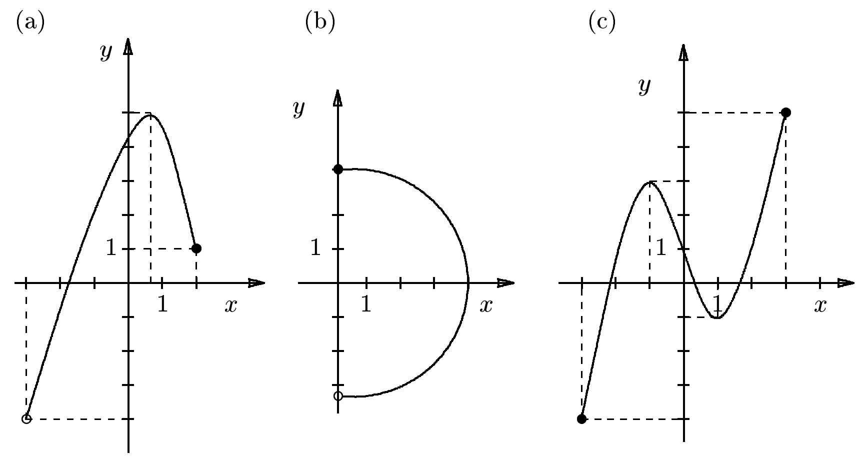
$$y = (12 \times 4 - 2 \times 16)\ \mathrm{m}^2 = 16\ \mathrm{m}^2.$$

Por lo tanto

Llamamos **función** a una regla que a cada valor **permitido** de x le adjudica exactamente un **único** valor y.

- Se denomina **dominio** al conjunto de valores **permitidos** de x.
- Se denomina **contradominio, codominio** o **imagen** al conjunto de valores y **obtenidos**.

EJEMPLO
Decida si las siguientes gráficas representan funciones. En caso de hacerlo, indique el dominio y contradominio.



Solución:

(a) La gráfica sí representa a una función ya que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Dominio =(-3, 2]; Contradominio =(-4, 5].

(b) No representa a una función ya que a cada valor de $x \in$ (0, 4) le corresponden dos valores de y.

(c) Sí representa a una función.

Dominio=[-3, 3]; Contradominio=[-4, 5].

EJERCICIOS

1. Decida si las siguientes tablas representan una función de las variables indicadas en cada caso. Justifique su respuesta.

(a)

x	20	30	40	50	60
y	11	14	23	20	11

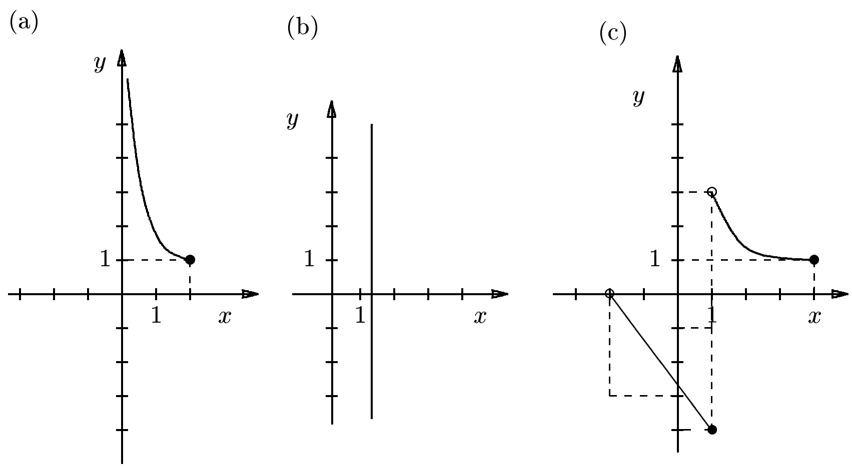
¿Es y una función de x? ¿Es x una función de y?

(b)

z	5	10	15	20	5
u	100	110	120	130	140

¿Es u una función de z? ¿Es z una función de u?

2. Diga si las siguientes gráficas representan una función o no, en caso de hacerlo indique el correspondiente dominio y contradominio. Justifique su respuesta.



8.3 La notación $f(x)$

En muchas situaciones encontramos que las reglas que determinan funciones están dadas por una fórmula (una expresión algebraica).

Por ejemplo, el perímetro de una circunferencia o el área de un círculo están dados, respectivamente, por las fórmulas: $y = 2\,\pi\,x$ e $y = \pi\,x^2$, donde x representa al radio de la circunferencia o del círculo.

Muchas veces resulta apropiado designar a la función con una letra que tenga relación con la magnitud que se desea calcular. En los ejemplos mencionados anteriormente, suele usarse la letra P para designar al perímetro y la letra A para el área. Entonces expresamos la dependencia del perímetro y del área con el valor del radio, x, como:

$$P(x) = 2\,\pi\,x$$
$$A(x) = \pi\,x^2$$

En una situación general, la letra más usual para denotar una función cualquiera es, naturalmente, f. Denotaremos entonces los **valores** de la función como $f(x)$.

$f(x)$ se lee **"f de x"**.

EJEMPLOS

1. Sea la función $f(x) = 4$. Los valores **permitidos** de x (dominio) son $x \in I\!R$. Para cualquier valor del dominio, la imagen es siempre 4, o sea que $f(2) = 4, f(5) = 4, f(1259) = 4$, etc...

2. Sea la función $f(x) = x, x \in [-4, 5]$. Los valores **permitidos** de x (dominio) son $x \in [-4, 5]$. Entonces $f(-4) = -4, f(2) = 2, f(1) = 1$, pero $f(10)$ no está definido ya que ese valor no pertenece al dominio de la función.

3. Considere la función $f(x) = x^2$. **Evalúe** la función en $x = 10$, $x = a + b$ y $x = 1 - \sqrt{3}$.

   Solución:

   - Si **evaluamos** la función en 10, tenemos
   $$f(10) = (10)^2 = 100.$$
   - Si se evaluamos la función en $a + b$, tenemos
   $$f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2a\,b$$
   - y si evaluamos en $1 - \sqrt{3}$,
   $$f\left(1 - \sqrt{3}\right) = \left(1 - \sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = \ = 4 - 2\sqrt{3}.$$

4. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y determine $f(2), f(a), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ y $\dfrac{1}{f(a)}$.

   Solución:

   - $f(2) = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$
   - $f(a) = \dfrac{1}{a+1}$
   - $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + 1} = \dfrac{1}{\frac{1+a}{a}} = \dfrac{a}{a+1}$
   - $\dfrac{1}{f(a)} = \dfrac{1}{\frac{1}{a+1}} = a + 1$

EJERCICIOS

1. Para cada una de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{2}$, calcule $f(3)$, $f(-5)$, $f(2+a)$, $f(3b)$

   (b) $f(x) = 3x + 1$, calcule $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, calcule $f(-1)$, $f(5)$, $f(t)$, $f(u)$, $f(4-j)$

   (d) $f(x) = -x$, calcule $f(-1)$, $f(a-b)$, $f(3z)$, $f(3t-1)$

   (e) $f(x) = 3x^2 + 1$, calcule $f(3+\sqrt{5})$, $f\left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$, $f\left(1 + \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$

2. Dada la función $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, calcule y simplifique:

   (a) $f(ab)$, $f(a)f(b)$, $f\left(\dfrac{a}{b}\right)$ y $\dfrac{f(a)}{f(b)}$

   (b) $f(a) + f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ y $f(a) + \dfrac{1}{f(a)}$

3. Sea $f(x) = 3x^2 - 8$, calcule:

   (a) $f(x+h)$

   (b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

4. El volumen $V[m^3]$ de aceite en una cisterna que tiene una pérdida en el tiempo t [horas] está determinado por la expresión

$$V(t) = 3000 - 2t - t^2 \ [\ \mathrm{m}^3].$$

   (a) Calcule la cantidad de aceite que salió entre $t_1 = 2$ horas y $t_2 = 7$ horas.

   (b) ¿Cuál fue la pérdida promedio por hora?

5. Considere las funciones

$$f(x) = x - \frac{1}{x},\ x > 0 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}.$$

   Demuestre que $f(g(x)) = g(f(x)) = x,\ x > 0$.

8.4 Determinación del dominio de una función

Si examinamos las funciones $f(x) = x + 2$, $g(x) = x/2$ y $h(x) = 3x + 1$, vemos que las tres aceptan cualquier número real como "entrada". En efecto, sea cual fuere el número x, se le puede sumar 2; dividir por 2 o multiplicarlo por 3 y sumarle 1, decimos entonces que el dominio de las tres funciones es el conjunto de todos los números reales. Denotamos el dominio de una función f como D_f, por lo tanto en este caso escribimos $D_f = D_g = D_h = I\!R$.

Examinemos ahora la función $f(x) = 1/x$. Como sabemos, podemos dividir al número 1 por cualquier número real x siempre y cuando x no sea cero, puesto que la división por 0 no está definida. Por lo tanto $f(0)$ carece de sentido. Decimos entonces que el 0 no pertenece al dominio de la función. Simbólicamente, $D_f = I\!R - \{0\}$.

EJEMPLO

Para encontrar el dominio de una función debemos identificar cuál es el conjunto de valores permitidos. Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}.$$

Como la división por cero no está definida, debe ser $x - 2 \neq 0$, o sea $x \neq 2$. Por otro lado, el argumento de la raíz cuadrada debe ser mayor o igual a cero, con lo que resulta $x + 1 \geq 0$, o lo que es lo mismo $x \geq -1$.

Por lo tanto, el dominio está constituido por todos los números que **no** sean 2 **ni** menores que -1. En otras palabras, el dominio de $f(x)$ es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a -1 , excepto 2. Simbólicamente escribimos:

$$D_f = \{x \in I\!R \,|\, x \geq -1 \quad \text{y} \quad x \neq 2\}$$

EJERCICIOS

Determine el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 43\,x$
2. $f(x) = \sqrt{x-5}$
3. $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)(x-6)}$
4. $f(x) = \sqrt{x+2}$
5. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
6. $f(x) = \sqrt{|x|}$
7. $f(x) = \ln(x^2-1)$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

9. $f(x) = \dfrac{1}{16 - x^2}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{3 - \sqrt{x}}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$

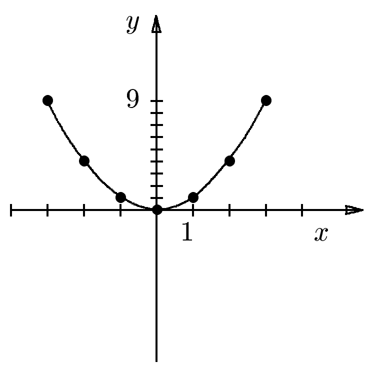
8.5 Gráfica de funciones

Podemos visualizar gráficamente la relación entre las variables dependiente e independiente de una función dada si utilizamos cada valor de x y su correspondiente valor de y como la abscisa y la ordenada de un punto, respectivamente.

En otras palabras, para graficar una función calcularemos y luego ubicaremos en el plano los pares ordenados $(x, f(x))$ para distintos valores permitidos de x.

EJEMPLO

Consideremos la función $f(x) = x^2$, calculemos los pares $(-3, f(-3))$ $(-2, f(-2))$ $(-1, f(-1))$ $(0, f(0))$ $(1, f(1))$ $(2, f(2))$ $(3, f(3))$ y ubiquémoslos en el plano:



Si pudiéramos hacer este procedimiento para **todos** los valores del dominio obtendríamos una curva a la que le llamaremos **gráfica de** f.

Definición: El conjunto de puntos (x, y) del plano tal que $y = f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f se denomina gráfica de f.

8.5.1 La recta como gráfica de una función lineal

Consideremos la función lineal (x aparece elevado a la potencia 1)

$$f(x) = mx + b. \tag{8.1}$$

Su gráfica está determinada por todos los puntos (x, y) tal que $y = f(x)$, o sea tal que

$$y = mx + b.$$

Por lo tanto toda función de la forma representada por la expresión (8.1) determina la gráfica de una recta no vertical y toda recta no vertical es la gráfica de una función de este tipo. Para obtener la gráfica de $f(x)$ procederemos de la manera ya explicada en el Capítulo 5.

Observe que la ecuación de la recta horizontal dada por $y = 3$ corresponde a la función $f(x) = 3$ pero que la ecuación de la recta vertical dada por $x = 3$ no corresponde a ninguna función.

EJERCICIOS

Dibuje en un mismo gráfico las siguientes funciones:

1. $h(x) = x - 3$ y $g(x) = 2x$.
2. $l(x) = 3x$ y $f(x) = 5$.

8.5.2 La parábola como gráfica de una función cuadrática

Una función cuadrática es aquella que está definida por un polinomio de grado 2, o sea

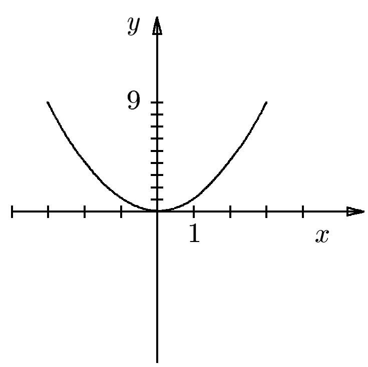
$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

La gráfica de esta función es una curva llamada **parábola**.

Al comienzo del capítulo dibujamos algunos puntos que pertenecen a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$; si dibujamos más cantidad de puntos en el mismo intervalo, de tal modo que la separación entre dos coordenadas x sea "pequeña" y luego los unimos "suavemente" obtendremos una parábola. Por supuesto que aquí debemos hacernos varias preguntas:

- ¿Cómo sabemos que la curva obtenida corresponde realmente a una parábola, si sólo hemos dibujado algunos puntos y no todos en el intervalo? Para entender mejor la pregunta, dibuje en el intervalo $[-3, 3]$ solamente tres puntos de la gráfica de $f(x) = x^2$ y únalos entre sí con segmentos de recta; luego haga lo mismo con cinco puntos y luego con diez. Observará que las gráficas son diferentes.

  ¿No habrá algunos puntos en el intervalo $[-3, 3]$ en los cuales de pronto la gráfica cambie drásticamente? Esta pregunta es difícil de responder. La respuesta es que la gráfica no cambiará drásticamente si dibujamos una cantidad **suficiente** de puntos, el **porqué** no lo podemos responder en este curso. Por ahora aceptaremos que la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$ es la siguiente:



- ¿Cómo es la gráfica fuera del intervalo $[-3, 3]$? Agrande el intervalo a $[-5, 5]$ y repitamos el procedimiento del punto anterior.

  ¿Cómo es la gráfica fuera del intervalo $[-5, 5]$? Agrande el intervalo a $[-10, 10]$ y repitamos el procedimiento.

  ¿Podemos repetir este proceso hasta abarcar todo el dominio de la función para estar seguros de su comportamiento?

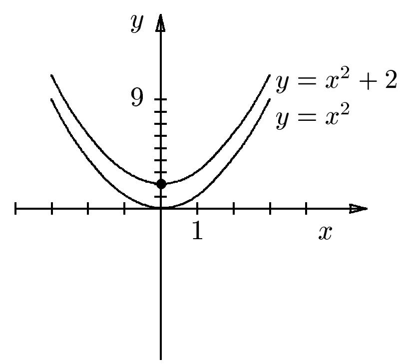
  La respuesta claramente es no. Para estar seguros de que su comportamiento no nos dará ninguna sorpresa, es decir, no cambiará drásticamente en todo su dominio, necesitamos las herramientas que nos proporciona un curso de cálculo. Entonces, por ahora, aceptaremos que la gráfica presentada refleja el comportamiento de la función en todo su dominio.

EJEMPLOS

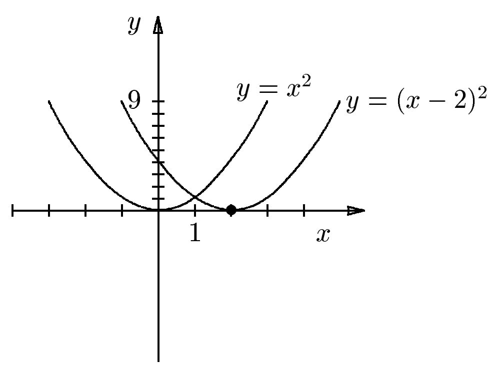
1. Esboce la gráfica de la función $g(x) = x^2 + 2$.

   Solución:

   La función $g(x) = x^2 + 2$ tiene una gráfica similar a la de $f(x) = x^2$, pero trasladada dos unidades hacia arriba ya que la coordenada y es la que se desplaza en dos unidades.

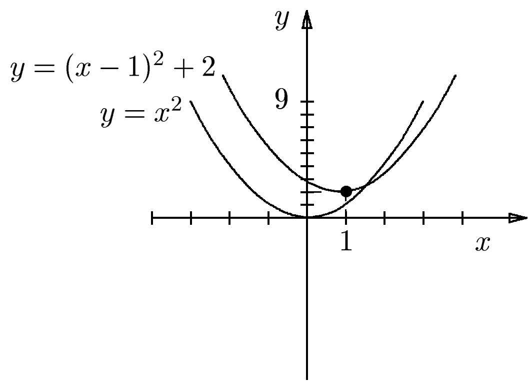


2. Examinemos ahora la gráfica de la función $h(x) = (x-2)^2$. Notemos primero que $h(x) = f(x-2)$, por lo tanto la gráfica de la función $h(x)$ es similar a la gráfica de $f(x) = x^2$ pero está desplazada hacia la derecha dos unidades, ya que $y = 0$ cuando $x = 2$.



3. Sea la función $h(x) = x^2 - 4x + 4$. Factorizándola, podemos ver que es la misma función del Ejemplo 2.

4. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Completando cuadrado vemos que se puede escribir como:
$$h(x) = (x-1)^2 + 2$$
Por lo tanto, su gráfica se obtiene desplazando la gráfica de x^2 una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia arriba:



Dada una función cuadrática, podemos encontrar inmediatamente tres puntos **característicos** de su gráfica:

1. La intersección con el eje de ordenadas. Es el punto $(0, f(0))$.

2. Las intersecciones (si es que existen) con el eje de abscisas. Son los puntos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, tales que $f(x_1) = 0 = f(x_2)$.

3. El mínimo o máximo de la función. Está dado por el punto $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b^2}{4a} + c\right)$.

   Podemos deducir las coordenadas de este punto completando cuadrado en el polinomio original. Para un polinomio de grado 2 con coeficientes arbitrarios a, b, y c, tendremos:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ ax^2+bx+c &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \end{aligned}$$

Vemos que si $a>0$, el valor mínimo posible se obtiene cuando $x_{min}=\dfrac{-b}{2a}$ y $f(x_{min})=\dfrac{-b^2}{4a}+c$.

Si $a<0$, el valor máximo posible se obtiene cuando $x_{max}=\dfrac{-b}{2a}$ y $f(x_{max})=\dfrac{-b^2}{4a}+c$.

EJEMPLOS

1. Encuentre el máximo o mínimo de la función $f(x)=x^2-2x+6$.

   Solución:

   Primero completamos cuadrado,

   $$f(x)=x^2-2x+6=(x-1)^2+5. \tag{8.2}$$

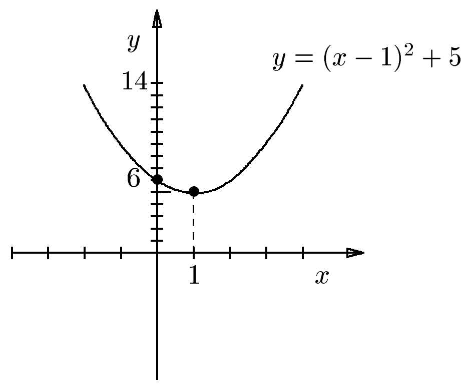
   $f(x)$ resulta igual a la suma de dos términos que siempre son positivos: $(x-1)^2$ y 5, por lo tanto esta suma tomará el valor más pequeño cuando el primer término, a saber $(x-1)^2$, se anule; en otras palabras cuando $(x-1)^2=0$ $(\Leftrightarrow x=1)$. Entonces $x_{min}=1$ y el valor mínimo de la función será $f(x_{min})=5$.

2. Esboce la gráfica de $f(x)$.

   Solución:

   Sabemos que es una parábola con la misma forma que la gráfica de x^2, pero su "vértice" se encuentra en el punto $(1,5)$. Además $f(x)$ no tiene raíces reales ya que $f(x)\geq 5$, y por lo tanto no corta al eje de las x en ningún punto. Además la gráfica corta al eje de las y en $y=6$ (cuando $x=0$).

Con esta información podemos entonces esbozar la gráfica.



EJERCICIOS

3. Encuentre el máximo o mínimo de las funciones:

   (a) $f(x) = -x^2 + 3x - 8$
   (b) $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$

4. Grafique las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$
   (b) $g(x) = x^2 - 8x + 4$
   (c) $h(x) = x^2 - 2x + 4$
   (d) $l(x) = x^2 + 2x$
   (e) $f(t) = t^2 + 2t + 3$
   (f) $g(u) = -u^2 + 2u - 7$
   (g) $m(x) = 3x^2 + 6x - 1$

5. Considere la familia de funciones

$$f(x) = 2x - 3 + k(x-2)^2, \qquad k \in [-2, 2].$$

   Dibuje estas funciones en una misma gráfica para algunos valores de k, por ejemplo $k = -2, 0, 2$. ¿Para cuál o cuáles valores de k la curva cambia cualitativamente?

6. ¿Para cuáles valores de x se satisface la desigualdad $x^2 + 5x + 4 \geq 0$?

7. Considere un triángulo isósceles cuyos lados iguales valen 10 m.

   (a) Exprese la superficie del triángulo como función de la base.

   (b) Identifique el dominio de la función.

8. Para un diodo semiconductor la corriente I es una función del voltaje U dada por:
$$I(U) = I_0 \left(\mathrm{e}^{KU} - 1\right), \qquad I_0, K > 0.$$
   En una prueba de laboratorio se miden los siguientes valores

I (mA)	U(V)
2.0	0.60
40.0	1.20

   donde mA indica miliAmpères y V voltios. Use estos datos para saber el voltaje cuando la corriente es de 20 mA.

9. Cuando se mantiene aislado un volumen de gas, la función $T(V)$ entre la temperatura absoluta T (medida en grados Kelvin) y el volumen V es:
$$T(V) = AV^{1-\kappa},$$
   donde A y κ son constantes. Cuando 30 litros de aire se comprimen a 15 litros, la temperatura sube de 20°C a 114°C. Determine κ.

   Entre °C (grados centígrados) y K (grados Kelvin) vale la relación x°C$= (x + 273)$ K.

8.6 Ejercicios suplementarios. Capítulos 7-8

1. Resuelva:
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}.$$

2. Resuelva la ecuación
$$\lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg(x+2).$$

3. Considere la función
$$f(x) = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x(x+1)}.$$
   (a) Halle el dominio.
   (b) Calcule $f(a)$ y $f(x+1)$.
4. Dibuje la gráfica de la función
$$f(x) = -x^2 + 6x + 5.$$
5. Considere la función $f(x) = c\ \mathrm{e}^{Kx}$.
   (a) Determine las constantes c y K si sabe que $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$.
   (b) Calcule $f(4)$.
   (c) ¿Para qué valores de x vale que $f(x) = 4$?

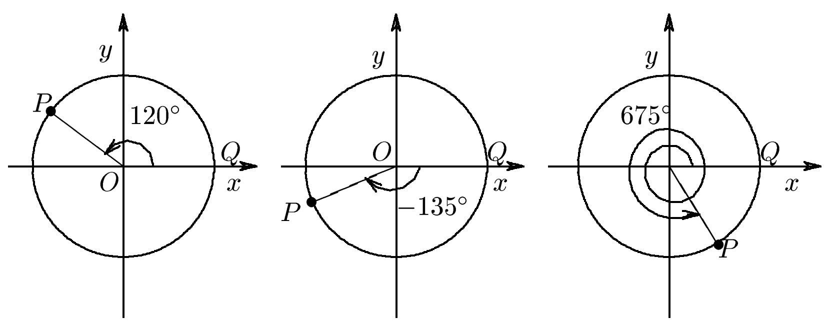
Capítulo 9

Trigonometría

9.1 Grados y radianes

Llamamos **circunferencia unitaria** a la circunferencia de radio $r = 1$ y centro en el origen O. Denominamos Q a la intersección de la circunferencia con el semieje positivo de las x.

Definimos un ángulo partiendo del radio OQ y luego girando este último a otra posición, por ejemplo, OP. Un ángulo positivo se obtiene girando el radio en sentido antihorario, y uno negativo en sentido horario.



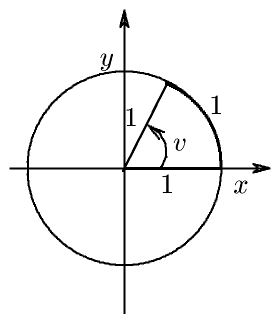
A un ángulo se le puede asignar una medida de varias maneras:

- Se toma como unidad a una vuelta completa dividida en 360. A dicha unidad se le llama **grado**; entonces una vuelta completa mide 360 grados (360°).

- Se toma como unidad el giro positivo para el cual el arco QP tiene el mismo largo que el radio. La unidad se denomina **radián** (1 rad). Una vuelta completa equivale a 2π radianes, ya que el perímetro de la circunferencia unitaria es $2\pi\times$ unidad de longitud.

$$1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$$



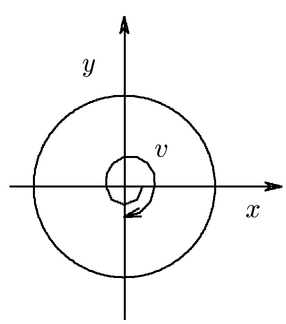
EJEMPLO

Dibuje un giro de $-\dfrac{5}{2}\pi$ radianes y dé la equivalencia en vueltas y en grados.

Solución:

$-\dfrac{5}{2}\pi$ radianes corresponden a un giro negativo (sentido horario), de $\dfrac{5\pi/2}{2\pi}$ vueltas, o sea $\dfrac{5}{4}$ vueltas.

$$v = -\frac{5}{2}\pi$$



EJERCICIOS

1. Escriba la ecuación de la circunferencia unitaria.
2. Diga a cuántos grados equivale un giro de:

   (a) $\frac{1}{2}$ vuelta en sentido antihorario.

   (b) 2 vueltas en sentiro antihorario.

   (c) $\frac{1}{3}$ vuelta en sentido antihorario.

   (d) $\frac{8}{5}$ vuelta en sentido antihorario.

3. Dé la equivalencia en vueltas y grados, y dibuje un giro de:

   (a) $\frac{\pi}{4}$ radianes.

   (b) $\frac{-3\pi}{4}$ radianes.

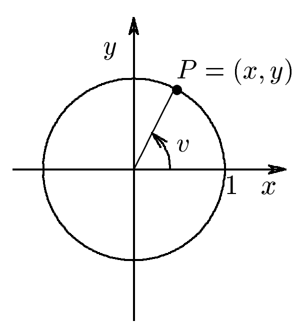
   (c) 6π radianes.

9.2 Seno y coseno

Para todo número real v existe siempre un ángulo que mide v.

Consideremos al punto P sobre la circunferencia unitaria, tal como se muestra en la figura, con coordenadas (x, y).

$x = \cos v \qquad y = \operatorname{sen} v$



A cada ángulo v le asociamos un solo valor de x y uno solo de y; entonces a la primera coordenada de P la definimos como **coseno** de v y a la segunda coordenada de P como **seno** de v.

A menos que se indique lo contrario, de ahora en más usaremos los **radianes** como unidad de ángulo.

Escribimos por lo tanto:

$$x = \cos v, \qquad y = \operatorname{sen} v.$$

Claramente $-1 \leq \cos v \leq 1$ y $-1 \leq \operatorname{sen} v \leq 1$ para todo v. En particular:

$$\cos(0) = 1\ ,\ \ \operatorname{sen}(0) = 0\ ,\ \ \operatorname{sen}(\pi) = 0\ ,\ \ \operatorname{sen}(-\pi) = 0.$$

Podemos inferir a partir de la definición que los valores de coseno y seno son los mismos al girar una o más vueltas en sentido horario o antihorario, ya que volvemos al mismo punto. O sea que vale lo siguiente:

$$\cos v = \cos(v + 2n\pi), \qquad \operatorname{sen} v = \operatorname{sen}(v + 2n\pi)$$

con n un número entero arbitrario ($n \in \mathbb{Z}$).

EJEMPLO

Calcule $\operatorname{sen}(95\pi)$.

Solución: Escribimos

$$95\pi = \pi + 94\pi = \pi + 47 \times 2\pi,$$

y resulta

$$\operatorname{sen}(95\pi) = \operatorname{sen}(\pi + 47 \times 2\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

9.2.1 Valores importantes de seno y coseno

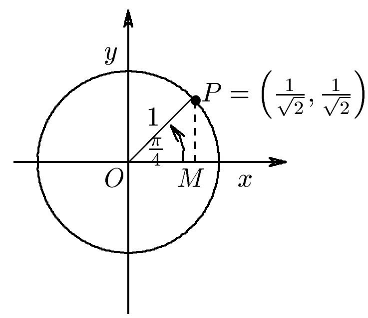
- Si $v = \pi/4\,(45^\circ)$, el triángulo OMP que se muestra en la siguiente figura, es isósceles. Por el teorema de Pitágoras $OM = PM = 1/\sqrt{2}$. Esto nos permite escribir las coordenadas de P como $P = \big(1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2}\big)$.

  Hemos demostrado que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

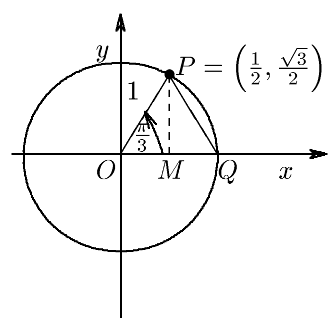


- Si $v = \pi/3\,(60^\circ)$, el triángulo OQP es equilátero. Entonces $OM = 1/2$ unidad de largo. Por el teorema de Pitágoras $PM = \sqrt{3}/2$. Entonces las coordenadas de P son $P = \Big(1/2, \sqrt{3}/2\Big)$, por lo tanto

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

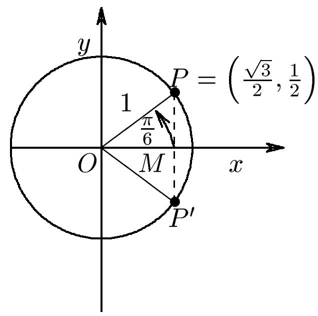
y

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



- Sea P' la reflexión de P con respecto al eje x, como se muestra en la siguiente figura. Si $v = \pi/6\,(30^\circ)$, el triángulo OPP' es equilátero. Las coordenadas del punto P son $P = \Big(\sqrt{3}/2, 1/2\Big)$ y hemos demostrado que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
y
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$



Es muy útil recordar la siguiente tabla:

x	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
0	$\sqrt{0/4}$	$\sqrt{4/4}$
$\pi/6$	$\sqrt{1/4}$	$\sqrt{3/4}$
$\pi/4$	$\sqrt{2/4}$	$\sqrt{2/4}$
$\pi/3$	$\sqrt{3/4}$	$\sqrt{1/4}$
$\pi/2$	$\sqrt{4/4}$	$\sqrt{0/4}$

EJEMPLO
Calcule $\cos\left(\dfrac{25\pi}{4}\right)$.
Solución:
Podemos escribir $\dfrac{25\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{24\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 6\pi = \dfrac{\pi}{4} + 3 \times 2\pi$. Entonces:

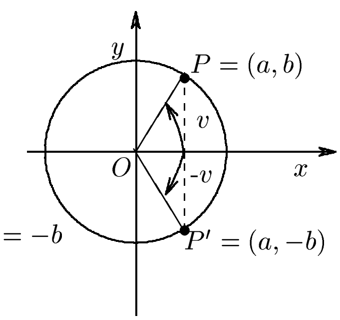
$$\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3 \times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

9.2.2 Propiedades del seno y del coseno

- Sea ahora P' la reflexión del punto P con respecto al eje x. Si P corresponde al ángulo v, P' corresponde al ángulo $-v$.

$\cos v = a$ y $\operatorname{sen} v = b$

$\cos(-v) = a$ y $\operatorname{sen}(-v) = -b$



Esto nos da las siguientes importantes y útiles relaciones:

$$\cos(-v) = \cos v \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$$

EJEMPLOS

1. Calcule $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Calcule $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Solución:

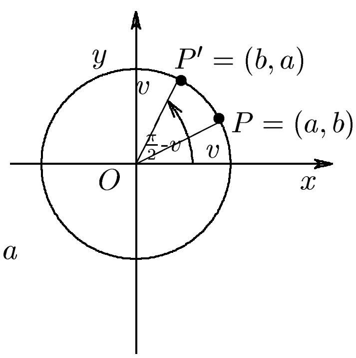
1. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

2. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

- Sea P' esta vez la reflexión del punto P con respecto a la recta dada por $y = x$. Si P corresponde al ángulo v, P' corresponde al ángulo $\pi/2 - v$.

$$\cos v = a \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} v = b$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = b \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = a$$

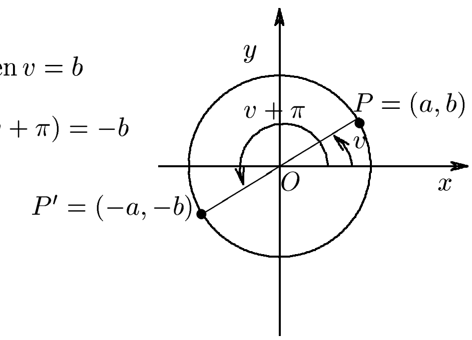


Esto nos da dos importantes y útiles relaciones más:

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \operatorname{sen} v \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v}$$

- Sea P' el punto en que la prolongación de OP corta a la circunferencia unitaria. Si P corresponde al ángulo v, P' corresponde al ángulo $\pi + v$.

$$\cos v = a \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} v = b$$
$$\cos(v+\pi) = -a \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(v+\pi) = -b$$



Esto nos da otras dos importantes y útiles relaciones más:

$$\boxed{\cos(v+\pi) = -\cos v \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(v+\pi) = -\operatorname{sen} v}$$

- Para un punto P de la circunferencia unitaria que corresponde al ángulo v sus coordenadas son (por definición) $P = (\cos v, \operatorname{sen} v)$. El teorema de Pitágoras nos permite escribir:

$$\boxed{\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = 1. \qquad (9.2)}$$

Esta igualdad se denomina "el uno trigonométrico".

EJEMPLOS

1. Calcule:

(a) $\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{3}\right)$. (b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Solución:

(a) Como $\dfrac{10\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 3\pi = \dfrac{\pi}{3} + \pi + 2\pi$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{3}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\\ &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

(b) Como $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

2. ¿Cuánto vale $\operatorname{sen} v$ si $\cos v = \dfrac{1}{3}$?

Solución:

Según “el uno trigonométrico”, $\dfrac{1}{9} + \operatorname{sen}^2 v = 1$. Entonces $\operatorname{sen}^2 v = \dfrac{8}{9}$ y

$$\operatorname{sen} v = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{sen} v = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

EJERCICIOS

1. Calcule:

(a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $\cos(2\pi)$

(d) $\operatorname{sen}(2\pi)$

(e) $\operatorname{sen}(5\pi)$

(f) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

(g) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$

(h) $\operatorname{sen}(27\pi)$

(i) $\cos(1016\pi)$

(j) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{93\pi}{2}\right)$

(k) $\cos(-36\pi)$

(l) $\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right)$

(m) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$

(n) $\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{4}\right)$

(o) $\operatorname{sen}\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

(p) $\cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

(q) $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$

(r) $\operatorname{sen}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

(s) $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

(t) $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$

(u) $\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

(v) $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

(w) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

(x) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

(y) $\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{4}\right)$

(z) $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)$

2. Encuentre

   (a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+v\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)$, si $\operatorname{sen} v = \frac{1}{3}$

   (b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+v\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-v\right)$, si $\cos v = \frac{1}{4}$

3. Haciendo una reflexión del punto $P = (a, b)$ respecto al eje y deduzca las fórmulas $\cos(\pi - v) = -\cos v$ y $\operatorname{sen}(\pi - v) = \operatorname{sen} v$ con técnicas parecidas a las utilizadas previamente.

4. Calcule con ayuda de las fórmulas del ejercicio anterior:

   (a) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

   (b) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

   (c) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

   (d) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

5. ¿Cuáles son los valores de $\operatorname{sen} v$ si:

   (a) $\cos v = \frac{1}{7}$?

   (b) $\frac{\pi}{2} < v < \pi$ y $\cos v = -\frac{1}{5}$?

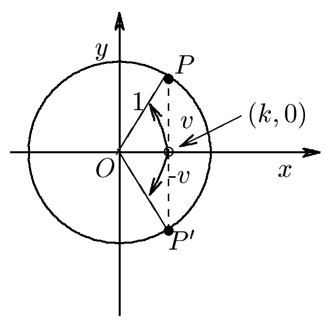
9.3 Algunas ecuaciones trigonométricas fundamentales

Consideremos la siguiente ecuación:

- $\cos x = k, \qquad \text{con } -1 \leq k \leq 1$

En la figura vemos que en la circunferencia unitaria hay dos puntos (P y P') con la coordenada x igual a k. Si $k = \pm 1$, los puntos coinciden. Si P corresponde al ángulo v que cumple $\cos x = k$ con $0 \leq v \leq \pi$, entonces P' corresponde a $-v$.

$$\cos v = k \qquad \text{y} \qquad \cos(-v) = k$$



También vale que $\cos v = \cos(v + 2n\pi)$. De esto se concluye lo siguiente:

La ecuación $\cos x = \cos v$ es equivalente a

$$x = v + 2n\pi \quad \text{ó} \quad x = -v + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

EJEMPLO

Resuelva la ecuación $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución:

Sabemos, o podemos ver con ayuda de la circunferencia unitaria, que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
Entonces, podemos escribir la ecuación como $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, lo cual da

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{ó} \qquad x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi.$$

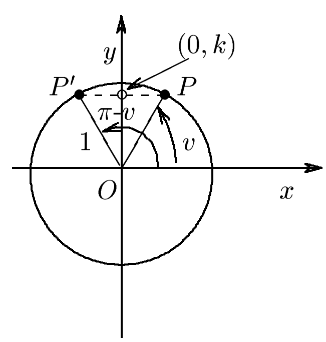
Consideremos ahora la ecuación:

- $\operatorname{sen} x = k, \qquad \text{con } -1 \leq k \leq 1$

Sea P el punto que corresponde al ángulo v en el primer o cuarto cuadrante, o sea $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ y P' a su reflexión con respecto al eje y, o sea que P' corresponde al ángulo $\pi - v$.

Si observamos la siguiente figura vemos que se cumple que $\operatorname{sen}(\pi - v) = \operatorname{sen} v = k$, ya que P y P' tienen la misma coordenada y.

$$\operatorname{sen} v = k \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\pi - v) = k$$



Puesto que $\operatorname{sen} v = \operatorname{sen}(v + 2n\pi)$, obtenemos el siguiente resultado:

La ecuación $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} v$ es equivalente a

$$x = v + 2n\pi \quad \text{ó} \quad x = \pi - v + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

EJEMPLO
Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Solución:
Sabemos, o podemos ver con ayuda de la circunferencia unitaria, que $\frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
Entonces podemos escribir la ecuación como $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, lo cual da

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \qquad \text{ó} \qquad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2n\pi.$$

Las soluciones son, entonces,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \qquad \text{ó} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$$

EJERCICIOS

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos x = \cos(1)$
3. $\cos x = 0$
4. $\cos x = \frac{1}{2}$
5. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$
7. $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\operatorname{sen} x = 0$
9. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$
10. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2)$
11. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(53)$

9.4 Tangente y cotangente

Definiremos las funciones **tangente** y **cotangente**:

$$\begin{aligned}
\tan v &= \frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}, \quad v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z} \\
\cot v &= \frac{\cos v}{\operatorname{sen} v}, \quad v \neq n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

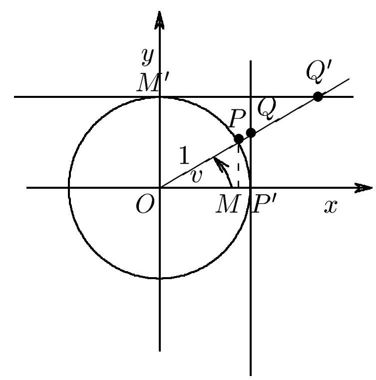
Consideremos los triángulos OPM y $OP'Q$ que se muestran en la figura.

Estos triángulos son semejantes, por lo tanto $\tan v = |P'Q|$. Del mismo modo, si consideramos los los triángulos OPM y $OQ'M'$, éstos también son semejantes; concluimos entonces que $\cot v = |MQ'|$.

$P = (\cos v, \operatorname{sen} v)$

$Q = (1, \tan v)$

$Q' = (\cot v, 1)$



EJEMPLOS

Calcule:

1. $\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. $\tan\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.

Solución:

1. $\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos(\pi/3)}{\operatorname{sen}(\pi/3)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $\tan\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}(13\pi/3)}{\cos(13\pi/3)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3+4\pi)}{\cos(\pi/3+4\pi)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$.

Tanto el seno como el coseno tienen la misma periodicidad de 2π. Así, podría ser natural pensar que debe valer lo mismo para la tangente y cotangente. En realidad, la tangente y la cotangente tienen el período (mínimo) de π, ya que

$$\tan(v+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(v+\pi)}{\cos(v+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} v}{-\cos v} = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos v} = \tan v.$$

De la misma forma, $\cot(v+\pi) = \cot v$.

De lo anterior inferimos que:

$$\tan(v+n\pi) = \tan v \quad \text{y} \quad \cot(v+n\pi) = \cot v \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

lo cual nos permite concluir que:

- La ecuación $\tan x = \tan v$ es equivalente a $x = v + n\pi$, donde n es un número entero arbitrario.

- La ecuación $\cot x = \cot v$ es equivalente a $x = v + n\pi$, donde n es un número entero arbitrario.

EJEMPLOS

1. $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   Sabemos que $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\pi/6}{\cos\pi/6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   Entonces $\tan x = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ y $x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi$ donde n es un número entero arbitrario.

2. $\cot x = \cot(2)$.

   Esta ecuación da directamente $x = 2 + n\pi$, donde n es un número entero arbitrario.

EJERCICIOS

1. Calcule

   (a) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ (b) $\cot\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$ (c) $\tan\left(\dfrac{16\pi}{3}\right)$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones

   (a) $\tan x = 1$

   (b) $\cot x = \sqrt{3}$

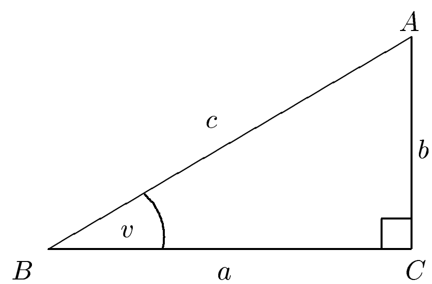
   (c) $\tan x = \tan 1$

   (d) $\cot x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

9.5 Triángulos rectángulos

Recordaremos la interpretación de las funciones trigonométricas en los triángulos rectángulos.

Consideremos el triángulo ABC, donde el ángulo C es un ángulo recto, de acuerdo a la figura siguiente.



Observemos que todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo no recto v igual son semejantes, y por lo tanto tienen sus lados correspondientes proporcionales. Esto nos permite definir:

- $\cos v = \dfrac{a}{c}$ $\qquad$ coseno de $v = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
- $\operatorname{sen} v = \dfrac{b}{c}$ $\qquad$ seno de $v = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
- $\tan v = \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ tangente de $v = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$
- $\cot v = \dfrac{a}{b}$ $\qquad$ cotangente de $v = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

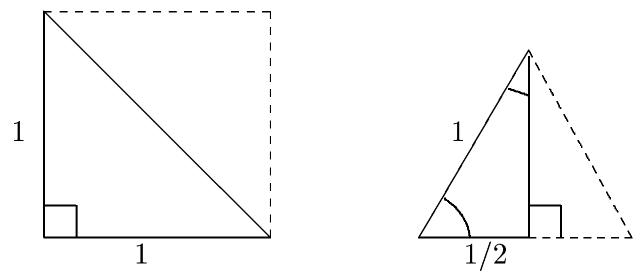
Con la ayuda de estas relaciones y las existentes entre los lados de medio cuadrado y medio triángulo equilátero, rápidamente se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas para ciertos ángulos notables como $\pi/4, \pi/6, \pi/3$ de manera similar a lo efectuado en la sección 9.2.

EJERCICIOS

Encuentre los valores de:

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
2. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$
3. $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$
4. $\cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,

con ayuda de las siguientes figuras:



9.6 Algunas fórmulas trigonométricas

Enunciaremos algunas fórmulas que relacionan las funciones trigonométricas de los ángulos.

Suma de ángulos

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \tag{9.7}$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \tag{9.8}$$

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u \tag{9.9}$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \operatorname{sen} v \cos u \tag{9.10}$$

De hecho, de la fórmula (9.7) se pueden deducir las demás. En el siguiente ejemplo deduciremos la fórmula (9.9). Dejamos como ejercicio la deducción de las dos restantes.

EJEMPLO
Deduzca la fórmula (9.9) con ayuda de la fórmula (9.7).

Solución:
Si reemplazamos u por $\pi/2 - u$ en (9.7) obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Miembro izquierdo} &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (u+v)\right] = \operatorname{sen}(u+v)\\ \text{Miembro derecho} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\operatorname{sen} v = \\ &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v.\end{aligned}$$

Por lo tanto vale

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v \quad , \quad \text{o sea (9.9).}$$

Si en las fórmulas (9.8) y (9.9) colocamos $u = v$ obtenemos:

Fórmulas del ángulo doble

$$\cos(2v) = \cos^2 v - \operatorname{sen}^2 v \tag{9.13}$$

$$\operatorname{sen}(2v) = 2\cos v \operatorname{sen} v \tag{9.14}$$

Si sumamos y restamos, respectivamente, las fórmulas (9.2) y (9.13) obtenemos:

$$\cos^2 v = \frac{1 + \cos(2v)}{2} \tag{9.17}$$

$$\operatorname{sen}^2 v = \frac{1 - \cos(2v)}{2} \tag{9.18}$$

EJERCICIOS

1. Reemplazando v por $-v$ en (9.8) demuestre que para todo u, v vale que:

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \qquad \text{(fórmula (9.7)).}$$

2. Suponga que $\operatorname{sen} u = \frac{4}{5}$, $\cos u = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen} v = \frac{3}{5}$ y $\cos v = \frac{4}{5}$ y calcule:

   (a) $\operatorname{sen}(u+v)$ (b) $\cos(u-v)$

3. Use la relación $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ para calcular:

   (a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4. Usando las fórmulas (9.7) a (9.10) y el "uno trigonométrico", demuestre que para todo v valen las siguientes igualdades:

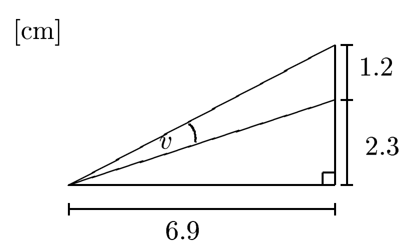
   (a) $\cos(2v) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 v$
   (b) $\cos(2v) = 2\cos^2 v - 1$
   (c) $\cos(3v) = 4\cos^3 v - 3\cos v$
   (d) $\operatorname{sen}(4v) = 4\operatorname{sen} v\cos v - 8\operatorname{sen}^3 v\cos v$
   (e) $\tan(2v) = \dfrac{2\tan v}{1-\tan^2 v}$, $v \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

5. Calcule, con ayuda de valores conocidos y de las fórmulas (9.17) y (9.18), los valores exactos de:

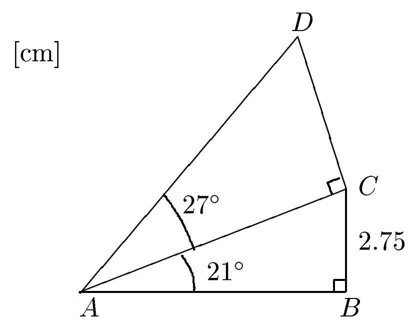
   (a) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (c) $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$

6. En los siguientes ejercicios está permitido el uso de una calculadora. Dé una respuesta aproximada con tres cifras significativas.

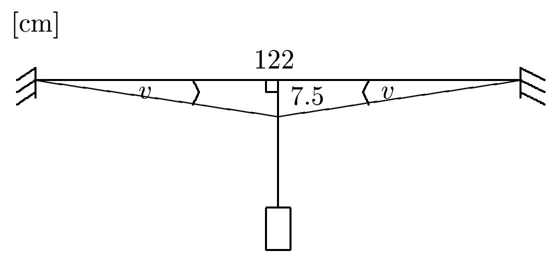
   (a) Calcule v y exprese el resultado en grados y en radianes.



(b) Calcule AD.



(c) Un peso está colgado de un cable como se muestra en la figura. Calcule el ángulo v y dé el resultado en grados y en radianes.



9.7 Ecuaciones trigonométricas más generales

Estudiaremos aquí algunos tipos más generales de ecuaciones trigonométricas. Tenga en cuenta que siempre se buscan **todas** las soluciones.

Antes de seguir adelante debe cerciorarse de que **ya sabe** resolver las ecuaciones fundamentales estudiadas: $\cos x = k$, $\operatorname{sen} x = k, \tan x = k$ y $\cot x = k$.

EJEMPLOS

1. Resuelva la ecuación
$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Solución:
Podemos escribir el miembro derecho de la siguiente forma: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
Así, la ecuación resulta:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

donde

$$2x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

y $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{4} + 2n\pi && (9.19) \\ \text{ó} \quad 2x + \frac{\pi}{6} &= -\frac{\pi}{4} + 2n\pi. && (9.20) \end{aligned}$$

La ecuación (9.19) da

$$2x = \frac{\pi}{12} + 2n\pi.$$

Entonces

$$x = \frac{\pi}{24} + n\pi.$$

La ecuación (9.20) da

$$2x = \frac{-5\pi}{12} + 2n\pi,$$

entonces

$$x = \frac{-5\pi}{24} + n\pi.$$

Las soluciones son, entonces,

$$x = \frac{\pi}{24} + n\pi \quad \text{ó} \quad x = \frac{-5\pi}{24} + n\pi.$$

2. Resuelva la ecuación $2\cos^2 x - \operatorname{sen} x = 1$.

Solución:
Usando el "uno trigonométrico" obtenemos una ecuación de segundo grado en $(\operatorname{sen} x)$:

$$\begin{aligned} 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x &= 1 \\ 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Definiendo $t \equiv \operatorname{sen} x$ obtenemos $2t^2 + t - 1 = 0$, cuyas soluciones son:

$$t = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}.$$

O sea:

$$t = -1 \quad \text{ó} \quad t = \frac{1}{2}.$$

La ecuación $\operatorname{sen} x = -1$ da $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. A su vez, $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ da $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ ó $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Resumiendo, las soluciones son:

$$x = \frac{3\,\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{ó} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{ó} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

3. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos(2x)$ en el intervalo de $38 \leq x \leq 40$.

Solución:

Si en ambos miembros de la ecuación hubiese estado la función seno o coseno, hubiéramos podido resolver la ecuación directamente, como en los ejemplos anteriores. En este caso, relacionaremos el seno con el coseno de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

y reemplazando en la ecuación original obtenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x,$$

lo cual equivale a

$$\frac{\pi}{2} - x = 2x + 2n\pi \tag{9.21}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = -2x + 2n\pi \tag{9.22}$$

La ecuación (9.21) da

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

Observación: Podríamos pensar que hay un error en la expresión anterior, al escribir "$2n\pi$" en vez de "$-2n\pi$". Sin embargo, como n vale para cualquier número entero, podemos poner un signo positivo adelante de n para que las fórmulas no sean más difíciles de leer.

La ecuación (9.22) da

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Todas las soluciones son, entonces:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

Ahora falta imponer restricciones sobre n para que x esté dentro del intervalo deseado. Tenemos que

$$38 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \leq 40,$$

ó bien

$$38 \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3} \leq 40$$

lo cual da

$$17.89 \leq n \leq 18.84$$

ó

$$6.29 \leq n \leq 6.61$$

Entre 17.89 y 18.84 hay un solo número entero, el 18. Entre 6.19 y 6.61 no hay ningún número entero, por lo tanto no existe solución. La respuesta es

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2 \times 18\pi}{3} = \frac{73\pi}{6} \approx 38.22.$$

4. Resuelva la ecuación $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.

Solución:

La ecuación equivale a

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \tag{9.23}$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{9.24}$$

Luego,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{y} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Podemos reescribir (9.23) como

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

y (9.24) como

$$\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

La ecuación (9.23) equivale a

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{ó} \qquad x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

y la ecuación (9.24), a su vez, equivale a

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{ó} \qquad x = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Las cuatro diferentes clases de soluciones se pueden escribir como:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

5. Resuelva la ecuación $\cos(2x) + \cos x + 1 = 0$.

Solución:

Podemos combinar las fórmulas (9.2) y (9.13) de maneras muchas veces útiles. Por ejemplo, las igualdades:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ 1 &= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

dan por adición:

$$\cos(2x) + 1 = 2\cos^2 x.$$

Esta expresión, insertada en la ecuación a resolver nos da $2\cos^2 x + \cos x = 0$. Luego de factorear obtenemos $(\cos x)(2\cos x + 1) = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \cos x &= 0 && (9.25) \\ \text{ó} \qquad 2\cos x + 1 &= 0. && (9.26) \end{aligned}$$

La ecuación (9.25) nos da $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, o bien $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, con n entero arbitrario. Esto puede resumirse en $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

La otra ecuación, (9.26), da $\cos x = -\frac{1}{2}$ y como $\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, entonces:

$$\cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Así, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{ó} \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

EJERCICIOS

Encuentre todas las soluciones a las ecuaciones

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$
2. $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$
3. $\cos x \operatorname{sen} x = 0$
4. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x$
5. $2\cos(2x) + 4\operatorname{sen} x = 3$
6. $\operatorname{sen}(6x) = \frac{1}{2}$
7. $\cos(3x) = \operatorname{sen}(4x)$
8. $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
9. $\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$
10. $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, en el intervalo $72\pi \leq x \leq 73\pi$
11. $\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, en el intervalo $23 \leq x \leq 25$
12. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, en el intervalo $-33 \leq x \leq -29$
13. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, en el intervalo $2.3 \leq x \leq 451.9$
14. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x$, para $-22 \leq x \leq -19$
15. $\cos(2x) = \cos^2 x + 3\operatorname{sen} x$, para $\frac{35\pi}{2} \leq x \leq \frac{39\pi}{2}$
16. $\operatorname{sen}(2x) = \sqrt{2}\cos x$, en el intervalo $-\frac{19\pi}{2} < x < -\frac{15\pi}{2}$

Respuestas a los ejercicios

Capítulo 1

Sección 1.1

2. (a) 3 (b) 4 (c) $\sqrt{41}$

Sección 1.2

1. (a) 21 (b) 4 (c) -21 (d) 4 (e) -25 (f) 11

2. (a) -22 (b) 18 (c) -156

3. (a) -1 (b) -24 (c) $24\,a - 54$ (d) $3\,a^2 - a - 4$ (e) $360\,a + 558$ (f) $b + c + 1$

4. (a) 11°C (b) -8°C (c) -26°C (d) 24°C (e) -30°C

5. (a) 10°C (b) 20°C (c) -1°C (d) 0°C

Sección 1.3

1. $2^2 \times 3 \times 7$
2. 2^4
3. 3×19
4. $2 \times 5^2 \times 23$
5. 2^8
6. 3^5

Sección 1.4

1. (a) 13923 (b) 51450 (c) 34969 (d) 3780 (e) 6300 (f) 15120

2. (a) 360 (b) 9400 (c) 720

Sección 1.5

1. (a) $-\frac{3}{8}$ (b) $-\frac{1}{9}$ (c) 5

2. (a) $\frac{17}{30}$ (b) $-\frac{47}{2}$ (c) $\frac{15}{28}$ (d) $\frac{21}{20}$

3. (a) $-\frac{40}{9}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 18 (d) 2 (e) $\frac{30}{7}$ (f) 7 (g) $\frac{7}{12}$ (h) $\frac{5}{7}$ (i) 9 (j) $\frac{1}{9}$ (k) $\frac{3}{5}$

4. (a) $\frac{7}{4}$ (b) $\frac{5}{9}$ (c) $-\frac{7}{12}$ (d) $\frac{13}{24}$ (e) $-\frac{2}{5}$ (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\frac{29}{209}$ (h) $\frac{14}{57}$ (i) $\frac{149}{1254}$ (j) $\frac{6}{35}$ (k) $-\frac{6}{77}$ (l) $-\frac{139}{216}$

(m) $\frac{11}{50}$
(n) $-\frac{37}{24}$
(o) $-\frac{83}{252}$
(p) $\frac{13}{11}$
(q) $\frac{49}{216}$
(r) $\frac{145}{108}$
(s) $-\frac{8681}{7560}$

Sección 1.6

1. (a) 0.5
   (b) $0.\overline{571428}$
   (c) $0.\overline{4}$
   (d) 0.4
   (e) $0.\overline{36}$
   (f) 5.25
   (g) $4.\overline{142857}$
   (h) $1.6\overline{4}$

2. (a) 34.20
   (b) 2.15
   (c) 104.43
   (d) 10.00
   (e) 1.95

3. (a) $14.7\ \mathrm{m}^3$
   (b) $21.5\ \mathrm{m}^3$

4. (a) $\frac{148}{45}$
   (b) $\frac{140747}{9900}$
   (c) $\frac{47}{1980}$
   (d) $\frac{500}{3367}$

Sección 1.7

1. $\frac{1}{27}$
2. $-\frac{1}{27}$
3. $\frac{49}{36}$
4. $\frac{81}{100}$
5. $\frac{b^2}{c^2}$
6. $\frac{(a^2 - b\,c)^2}{a^2\,c^2}$
7. 125
8. 8
9. $\frac{19}{48}$
10. $\frac{21}{100}$
11. $\frac{319}{8}$
12. $\frac{317}{8}$
13. $-\frac{1}{32}$
14. 13
15. $\frac{11}{2}$
16. $\frac{2\,a^2}{b^2}$
17. 48
18. 0
19. 192
20. -18
21. -448

22. $-\dfrac{1}{72}$

23. $\dfrac{2}{5}a - \dfrac{4}{15}$

24. $\dfrac{9(1+2\,a)^3}{(2+3\,a)^2\,a^3}$

25. $\dfrac{d^{25}}{32\,b^{20}}$

26. $12\,b^2\,d$

27. $\dfrac{1}{a^3}$

28. $\dfrac{256}{z^{28}}$

29. (a) 2 (b) 4 (c) $\dfrac{5}{9}$ (d) $\dfrac{27}{8}$ (e) $\dfrac{1}{8}$ (f) -25

30. (a) $2\sqrt{2}\,x\,y$ (b) $a-b^2$ (c) $3\,x^2\,y^4$ (d) $-\dfrac{3\sqrt[3]{3}}{a^2}$ (e) $\dfrac{2\,y}{\sqrt[3]{x}}$ (f) $(x+2)\,y^2$ (g) $x\,\sqrt[3]{x^3-9y}$ (h) $2\sqrt{x}\,\sqrt[4]{1+4x^6}$ (i) $x\,\sqrt{1+y^2}$

31. (a) $x=\pm 0.07$ (b) $x=\pm\dfrac{5}{4}$ (c) $x=\pm\sqrt{13}\approx\pm 3.6056$

32. (a) $4\sqrt{2}$ (b) $2-\sqrt{2}$ (c) $-\dfrac{1}{6}$ (d) -1 (e) $1-\sqrt{3}$ (f) $\sqrt{2}$ (g) 2 (h) 2

33. (a) 25 (b) 13 (c) 10 (d) $4\sqrt{10}$

Sección 1.8

1. (a) 3.765032×10^3 (b) 5.681×10^{-6} (c) 2.35785×10^1 (d) 3.486×10^{-5}

2. (a) 5×10^{-49} (b) 3×10^{26} (c) 5×10^{43}

3. (a) 7.5×10^6 W (b) 6.2×10^{-18} J (c) 5.4×10^6 m^2 (d) 2×10^{-8} s (e) 10^9 W (f) 7×10^9 m^3 (g) 2.4×10^{-6} m (h) 5×10^{12} Wh (i) 4×10^{-30} m^2

4. (a) 500 s
   (b) 5 ns
   (c) 450 km
   (d) 3 mm

Sección 1.9

1. (a) irracional
   (b) irracional
   (c) racional
   (d) racional
   (e) racional
   (f) irracional
   (g) irracional
   (h) racional

2. (a) 1.96; $2.0069\overline{4}$; 1.99881...; 2.000204...; 1.999965...
   (b) El quinto.
   (c) $\dfrac{577}{408} = 2.000006\ldots$

3. La quinta.

4. (a) La segunda.
   (b) La sexta.

5. $\dfrac{256}{81}$

6. (a) Bien.
   (b) Bien.
   (c) Mal. Correcto: 14.
   (d) Bien.
   (e) Bien.
   (f) Bien.

7. (a) 0.520
   (b) 0.0431
   (c) 3.46×10^6
   (d) 0.0716

Sección 1.10

1. $A \cup B = \{-5, -3, 1, 3, 4, 7, 8\}$; $A \cap B = \{1\}$.

2. (a) $[4, 5)$
   (b) $[-3, 2)$
   (c) $(-\infty, -6) \cup (-5, \infty)$
   (d) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
   (e) $(-2, \infty)$
   (f) $(-\infty, 2) \cup [4, \infty)$

3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

Capítulo 2

Sección 2.1

1. 2
2. $2\,q\,(p-q)$
3. $4\,r\,s$
4. $-28\,t$
5. $-18\,(t^2+3)$

Sección 2.2

1. (a) $(x+5)^2$
   (b) $(x-3)^2$
   (c) $(x+8)^2$
   (d) $\left(x+\dfrac{5}{3}\right)^2$
   (e) $3\,(x-5)^2$
   (f) $(t-\sqrt{7})^2$
   (g) $(y-\sqrt{3})^2$
   (h) $3\,\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2$

2. (a) $(x-4)(x+4)$
   (b) $(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)$
   (c) $(\sqrt{2}\,x-\sqrt{5})(\sqrt{2}\,x+\sqrt{5})$
   (d) $(\sqrt{3}\,a-\sqrt{5})(\sqrt{3}\,a+\sqrt{5})$
   (e) $(2\,y-3\,b)(2\,y+3\,b)$
   (f) $t^2\,(t+1)\,(t-1)$
   (g) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

3. (a) $(a+3)(a+2)$
   (b) $(x+1)(x-3)$
   (c) $(t+6)(t+3)$
   (d) $(t-3)(t-6)$
   (e) $(t+2)(t-9)$
   (f) $(x-\sqrt{2})(x+3)$
   (g) $\left(t+\dfrac{1}{3}\right)\left(t+\dfrac{1}{2}\right)$

4. (a) $x\,(x+4)$
   (b) $x\,(x+3)(x-1)$
   (c) $9\,x\,(x+1)^2$
   (d) $(x^2+4)(x^2+2)$
   (e) $(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)$
   (f) $(x^2+6)(x^2+1)$
   (g) $(x^2+5)(x^k+1)$
   (h) $-(x+2)(x-1)$
   (i) $2\,(x+2)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$
   (j) $5\,(x+1)\left(x-\dfrac{3}{5}\right)$
   (k) $(5-x)(16-3\,x)$
   (l) $-(11+x)(8+x)$

Sección 2.3

1. $x+2$
2. $\dfrac{x^2}{x-3}$
3. $\dfrac{2x}{5b}$
4. $\dfrac{x+3}{x+2}$
5. $\dfrac{2x-1}{x\,(x^2-1)}$
6. $\dfrac{a+b}{a\,b}$
7. $\dfrac{x+2}{x-2}$
8. $\dfrac{x-a}{x+5}$
9. $\dfrac{x}{x-1}$
10. $\dfrac{x+3}{5}$
11. $\dfrac{1}{12}$
12. $2\,y$
13. $\dfrac{(a+b)(a+b-a\,b)}{4\,a\,b}$
14. $-\dfrac{(a^2+1)}{(a+1)}$
15. $\dfrac{1}{a\,(a-1)}$
16. $\dfrac{1}{x-6}$
17. $\dfrac{-(3x+5)}{(x+2)(x^2-5)}$

Sección 2.4

1. (a) $\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{2}$
   (b) $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{7}$
   (c) $(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
   (d) $\dfrac{6\,(a-x)(2+3\sqrt{a})}{4-9a}$
   (e) $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+1)}{5}$
2. (a) 4
   (b) 12
3. (a) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$
   (b) $\sqrt{4-a^2}-2$

Capítulo 3

Sección 3.1

1. (a) $x = -15$
   (b) $x = \dfrac{1}{b - 3\,a}$
   (c) $x = \dfrac{-3\,a\,b\,c}{b\,c + a\,c - 3\,a\,b}$
   (d) $x = \dfrac{b^2 - c^2}{2\,a\,c - 3\,b^2 + 3\,c^2}$
   (e) $x = -\dfrac{17\,a + 36}{2(19\,a - 36)}$
   (f) $x = 6$
   (g) $x = 1$
   (h) $x = -\dfrac{16}{21}$
   (i) $x = 4 + 2\,a$
   (j) $x = -\dfrac{3}{7}$
   (k) $x = 0$

2. (a) $a = \dfrac{(3\,x + 1)(b^2 - c^2)}{2\,c\,x}$
   (b) $a = \dfrac{36(2\,x - 1)}{40\,x + 17}$

3. (a) $x = 14$
   (b) $x = \dfrac{13}{2}$
   (c) $x = 5$
   (d) $x = \dfrac{8}{3}$
   (e) $x = \dfrac{7}{3}$
   (f) $x = \dfrac{13}{3}$
   (g) $x = \dfrac{3}{13}$
   (h) $x = \dfrac{3}{5}$
   (i) $x = \dfrac{1}{4}$
   (j) $x = \dfrac{5}{2}$
   (k) $x = 8$
   (l) $x = 7$
   (m) $x = 30$
   (n) $x = 3$
   (o) $x = -\dfrac{1}{4}$

4. (a) $x = -4$
   (b) $x = \dfrac{47}{8}$
   (c) $x = 21$
   (d) $x = 48$

5. 42 \$

6. 49.60 \$

7. 20.725 m^2

8. 4 hs

Sección 3.2

1. $(x - 3)^2 - 7$
2. $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$
3. $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$
4. $(x + 3)^2 - 7$
5. $(x + 7)^2 - 51$

6. $3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

7. $\frac{(x-6)^2}{2}-16$

8. $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{2}$

9. $3(z+1)^2-15$

10. $2\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$

11. $(y+1)^2-5$

12. $2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

13. $9\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{5}{4}$

Sección 3.3

1. $x=1;\ -9$
2. $x=\frac{1}{2};\ -\frac{11}{2}$
3. $x=12;\ 2$
4. $\nexists$ solución en $I\!R$
5. $x=-2\pm\sqrt{6}$
6. $x=1;\ -2$
7. $x=2;\ -12$
8. $x=2;\ 3$
9. $x=1;\ -4$
10. $x=1\pm\sqrt{3}$
11. $x=\pm1$
12. $\nexists$ solución en $I\!R$
13. $\nexists$ solución en $I\!R$

Sección 3.4

1. (a) $x=-4\pm2\sqrt{7}$
   (b) $\nexists$ solución en $I\!R$
   (c) $t=1;\ -\frac{3}{4}$
   (d) $y=4\pm\sqrt{26}$
   (e) $x=0;\ -2$
   (f) $x=\frac{\pm\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$
   (g) $x=-\frac{1}{8}\pm\frac{\sqrt{105}}{24}$
   (h) $x=1\pm\sqrt{3}$
   (i) $x=\sqrt[3]{5};\ \sqrt[3]{2}$
   (j) $x=2\pm\sqrt{3};\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$
   (k) $x=-\frac{5\sqrt{3}}{18}+\sqrt{2};\ -\sqrt{2}$
   (l) $x=3;\ -\frac{3}{4}$
   (m) $x=6\pm4\sqrt{2}$

2. (a) $x=\frac{3}{2};\ -\frac{11}{7}$
   (b) $x=0;\ \frac{16}{15}$
   (c) $x=2;\ \frac{46}{15}$
   (d) $x=\frac{5}{2};\ \frac{27}{8}$
   (e) $x=0$
   (f) $x=0;\ \pm6$

3. (a) $x=2$
   (b) $x=\pm2$
   (c) $x=3;\ \frac{1}{2}$
   (d) $x=-\frac{1}{2};\ 4$

4. (10×20) m
5. A las 9hs 46' 48"
6. $v_1 = 55$ km/h; $v_2 = 50$ km/h
7. 2; 4; 6
8. $x = 2$

Sección 3.5

1. (a) $Q(x) = x + 3$, $R(x) = 10$
   (b) $Q(x) = -x - 5$, $R(x) = 22$
   (c) $Q(x) = -3$, $R(x) = 2\,x^3 - 19\,x^2 - 6\,x + 2$
   (d) $Q(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}$, $R(x) = \dfrac{19}{9}x^3 + x^2 + 3\,x - \dfrac{10}{9}$
   (e) $Q(x) = x^2 + 2\,x + 1$, $R(x) = 0$
   (f) $Q(x) = x^2 + 1$, $R(x) = 1$
2. (a) $x + \dfrac{3\,x}{2\,x^2 + 3}$
   (b) $\dfrac{1}{x^3 - x}$
   (c) $1 + \dfrac{x - 1}{x^2 - 2\,x}$
   (d) $\dfrac{12\,x - 1}{x^2 + x - 12}$
   (e) $2\,x$
3. (a) $P(x) = (x - 1)(x - 2)$
   (b) $P(x) = (x + 3)(x + 2)$
   (c) $P(x) = 2(x + 1)(x - 3)$

Sección 3.6

1. $\nexists$ solución en $I\!R$
2. $x = 1$
3. $x = \dfrac{9}{4};\ \dfrac{1}{4}$
4. $x = 4$

Sección 3.7

1. $I = \dfrac{\omega L^3}{E\,x}$
2. $t = \dfrac{\omega}{L^2(f-P)}$
3. $D = 2\sqrt{\dfrac{v}{\pi L}}$
4. $m = \dfrac{F(R+h)^2}{G\,M}$; $M = \dfrac{F(R+h)^2}{G\,m}$; $G = \dfrac{F(R+h)^2}{m\,M}$; $h = \sqrt{\dfrac{G\,m\,M}{F}} - R$
5. $R = \dfrac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_2R_3}$
6. $C = \dfrac{1}{\omega^2 L - \omega\sqrt{z^2 - R^2}}$

Sección 3.8

1. 27
2. 0
3. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$
4. $\dfrac{a}{b}$
5. $\dfrac{2\,x^2 - x - 4}{(x+2)(x^3 - 2\,x^2 + 1)}$
6. (a) $x = 0;\ 2;\ -3$
   (b) $x = -3;\ -\dfrac{1}{2}$
   (c) $x = 2$
   (d) $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
7. $v = c\sqrt{1 - \dfrac{m_0^2}{m^2}}$
8. $E = \dfrac{Z^2\,E_0}{Z^2 - I}$

Capítulo 4

Sección 4.1

1. (a) $x = 20°; \ y = 30°$
   (b) $x = 130°; \ y = 50°;$
   $z = 50°; \ u = 65°; \ v = 115°$
2. (a) $x = 135°; \ y = 135°$
   (b) $x = 50°; \ y = 50°$

Sección 4.2

1. $\hat{C} = 73°$
3. $\alpha = 30°; \ \beta = 30°; \ \delta = 60°$
4. (a) $\alpha = 42°; \ \gamma = 56°$
   (b) $\alpha = 60°; \ \beta = 40°$
   (c) $\alpha = 59°$
6. 2.5 cm
7. (a) $x = 7.5$ cm
   (b) $x = 4.28$ cm
8. $p = 5.2$ cm; $q = 6.69$ cm
9. $|PR| = 14.4$ cm
10. $AP = 6$ cm

Sección 4.3

1. (a) $c = 45.83$ cm
   (b) $b = 28.43$ cm
   (c) $a = 17.35$ cm
2. $h = \sqrt{2}$
3. $c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Sección 4.4

1. (a) 0.5 m^2
   (b) 1.29 m^2
   (c) 13.63 m^2
   (d) 1.61 m^2
   (e) 1.59 m^2

3 (a) 21.7 cm^3
   (b) 1492.25 cm^3
   (c) 59.55 cm^3
   (d) 42 cm^3

Sección 4.5

1. (a) 18 km
   (b) 2 800 000 $
   (c) 2 665 631 $
   (d) 2 849 285.60 $
2. 98.17 cm^3
3. 12.01 cm
4. 16.55 cm
5. 50 cm

Capítulo 5

Sección 5.2

1. $\sqrt{5}$
2. 5
3. $\sqrt{10}$
4. $\sqrt{13}$
5. $\sqrt{52}$
6. $\sqrt{97}$

Sección 5.3

1. (a) $(x-1)^2+(y-3)^2=4$
   (b) $(x+2)^2+(y-5)^2=1$
   (c) $(x+5)^2+(y+1)^2=\dfrac{1}{4}$
   (d) $(x-1)^2+(y-2)^2=0.25$
   (e) $(x+2)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$
   (f) $(x+0.1)^2+\left(y-\dfrac{7}{4}\right)^2=5$

2. (a) $(x-1)^2+y^2=8$
   (b) $(x+1)^2+(y-3)^2=40$
   (c) $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=13+6\sqrt{3}$
   (d) $(x-a)^2+(y-b)^2=(c-a)^2+(d-b)^2$

3. (a) $C=(0,\,1);\ r=2$
   (b) $C=(-4,\,-3);\ r=2$
   (c) $C=(3,\,2);\ r=2$
   (d) $C=(-4,\,0);\ r=2$
   (e) $C=\left(\dfrac{3}{2},\,2\right);\ r=\dfrac{\sqrt{61}}{2}$
   (f) $C=(3,\,-2);\ r=\sqrt{13}$
   (g) $C=(1,\,-2);\ r=3$

4. (a) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{17}{2}$
   (b) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{17}{4}$
   (c) $(x-5)^2+(y-2)^2=9$

5. (a) $y=-x+3$
   (b) $y=x+2$

6. (a) $y=-x+1$
   (b) $y=3\,x+1$
   (c) $y=2\,x+1$
   (d) $y=3\,x-13$

7. (a) Son paralelas
   (b) Se cortan en (5, 2)
   (c) Se cortan en (2, −1)

Capítulo 6

Sección 6.1

2. (a) $x > 2$
   (b) $x < -\dfrac{1}{11}$
   (c) $x > \dfrac{17}{11}$
   (d) $x < 7$
   (e) $z > \dfrac{52}{35}$
   (f) $x > -2$
   (g) $x < 32$
   (h) $u \geq 0$
   (i) $x > -2$
   (j) $t < \dfrac{30}{11}$
   (k) $u < -\dfrac{3}{4}$
   (l) $x < 3$

4. (a) $x \in (-2,\, 1)$
   (b) $x \in \left(-2,\, \dfrac{1}{2}\right)$
   (c) $x \in (-\infty,\, 0) \cup (16,\, \infty)$
   (d) $x \in (0,\, 1) \cup (2,\, \infty)$
   (e) $x \in \left(-5,\, \dfrac{-1}{2}\right) \cup (3,\, \infty)$
   (f) $x \in (-\infty,\, 1] \cup (2,\, 6]$
   (g) $x \in \left[\dfrac{-1}{2},\, 0\right) \cup [1,\, \infty)$

Sección 6.2

1. (a) 10
   (b) 15
   (c) 9
   (d) $\sqrt{2}$
   (e) $\dfrac{3\,\pi}{2}$

2. (a) 2
   (b) 0
   (c) 2
   (d) $\sqrt{15} - \sqrt{14}$
   (e) $\pi - 2$

3. (a) $x = \pm 2$
   (b) $x = \dfrac{5}{2};\, \dfrac{3}{2}$
   (c) $x = 5;\, 1$
   (d) $x = -3;\, 1$

5. (a) $x \in (-3,\, 1)$
   (b) $x \in \left(\dfrac{3}{2},\, \dfrac{5}{2}\right)$
   (c) $x \in (-\infty,\, -7) \cup (3,\, \infty)$
   (d) $x \in \left(-\infty,\, \dfrac{2}{3}\right) \cup (2,\, \infty)$

Sección 6.3

1. $y = -3\,x + 5$

3. $C = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$; $r = \frac{5}{2}$

4. $x \in \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup (3, \infty)$

5. $x \in (-2, 0)$

6. $x \in (-5, -1)$

Capítulo 7

1. (a) 2
   (b) 3
   (c) $-\pi$
   (d) $\frac{1}{3}$
   (e) 17.7
   (f) 0
   (g) 1
   (h) 2
   (i) $\frac{1}{2}$
2. (a) -2
   (b) $-\frac{1}{2}$
   (c) 3
3. (a) $x = \ln 9$
   (b) $x = 10^{-1}$
   (c) $x = e^{2/3}$
   (d) $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$
   (e) $x = \log_2 6$
   (f) $x = a^{1/2}$
4. (a) 0
   (b) 0
   (c) 2
   (d) 2
   (e) $\ln 6$
5. $\log_2 x = \frac{\log_8 x}{\log_8 2}$
6. 4
7. $\lg a = \frac{\lg x}{\log_a x}$
8. (a) $\frac{1}{2}\ln(x^4 - 1)$
   (b) $2\ln\frac{x-1}{x+1}$
9. (a) $\lg 2 + 2\lg 3 = 1.2552$
   (b) $2\lg 3 - 3\lg 2 = 1.8572$
   (c) $3\lg 2 - 2\lg 3 = -0.0512$

Sección 7.1

1. (a) $x = \frac{64}{5}$
   (b) $x = \frac{25 \pm 5\sqrt{5}}{2}$
   (c) $x = 3$
   (d) $x = 1;\ e^2$
   (e) $x = 1;\ e^4$
   (f) $x = \frac{9}{2};\ \frac{25}{8}$
2. $u = \dfrac{-v}{\ln\left(1 - \frac{m_0}{M_s}\right)}$

3. $K = \dfrac{\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}{\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right) - \lg\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$

4. (a) $x = \dfrac{1}{2}$
   (b) $x = 2$
   (c) $x = \mathrm{e};\ \mathrm{e}^{-1}$
   (d) $x = 10;\ 10^{-1}$
   (e) $x = 10^2;\ 10^{-1}$
   (f) $x = \dfrac{\ln 3}{2}$

5. $y = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{\mathrm{e}^{3x} + 1}\right)^2$

Sección 7.2

1. 0.5682
2. 0.4343
3. 3.9068
4. 2.3026
5. -1.5850

Capítulo 8

Sección 8.2

1. (a) y es función de x
   x no es función de y

   (b) u no es función de z
   z es función de u

2. (a) Sí (b) No (c) Sí

Sección 8.3

1. (a) $f(3) = \frac{3}{2}$; $f(-5) = \frac{-5}{2}$; $f(2+a) = \frac{2+a}{2}$; $f(3\,b) = \frac{3\,b}{2}$

   (b) $f(-2) = -5$; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{2}$

   (c) $f(-1) = \frac{1}{4}$; $f(5) = \frac{11}{2}$; $f(t) = \frac{2\,t+1}{t-3}$; $f(u) = \frac{2\,u+1}{u-3}$; $f(4-j) = \frac{9-2\,j}{1-j}$

   (d) $f(-1) = 1$; $f(a-b) = b-a$; $f(3\,z) = -3\,z$; $f(3\,t-1) = 1-3\,t$

   (e) $f(3+\sqrt{5}) = 43 + 18\sqrt{5}$; $f\left(\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{29}{2} + 6\sqrt{5}$;
   $f\left(1 + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{32 + 6\,(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15})}{5}$

2. (a) $f(a\,b) = \frac{(a^2b^2-1)}{a\,b}$; $f(a)\,f(b) = \frac{(a^1-1)(b^2-1)}{a\,b}$; $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(a^2-b^2)}{a\,b}$;
   $\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{b\,(a^2-1)}{a\,(b^2-1)}$

   (b) $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$; $f(a) + \frac{1}{f(a)} = \frac{a^4-a^2+1}{a\,(a^2-1)}$

3. (a) $3\,x^2 + 6\,x\,h + 3\,h^2 - 8$ (b) $6\,x + 3\,h$

4. (a) 55 m^3 (b) 11 m^3/h

Sección 8.4

1. $I\!R$
2. $[5,\, \infty)$
3. $[2,\, 3] \cup [6,\, \infty)$
4. $[-2,\, \infty)$
5. $(-\infty,\, -1] \cup [1,\, \infty)$
6. $I\!R$
7. $(-\infty,\, -1) \cup (1,\, \infty)$
8. $I\!R - \{-2,\, 2\}$
9. $I\!R - \{-4,\, 4\}$
10. $[0,\, 9) \cup (9,\, \infty)$
11. $I\!R - \{0\}$
12. $I\!R - \{-3\}$
13. $I\!R - \{-2,\, 3\}$

Sección 8.5

3. (a) $x_{max} = \dfrac{3}{2};\ f(x_{max}) = \dfrac{23}{4}$

   (b) $x_{min} = \dfrac{3}{2};\ f(x_{min}) = -\dfrac{7}{2}$

6. $x \in (-\infty,\, -4] \cup [-1,\, \infty)$

7. (a) $S = \dfrac{b}{2}\sqrt{100 - \dfrac{b^2}{4}}$

   (b) $b \in [0,\, 20]$

8. $U = 1.06$ V

9. $\kappa = 1.4$

Sección 8.6

1. $x = 1 \pm \sqrt{2}$

2. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

3. (a) $I\!R - \{-1,\, 0,\, 1\}$

   (b) $f(a) = \dfrac{1}{a(a-1)};\ f(x+1) = \dfrac{2}{(x+1)^2 - 1} - \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

5. (a) $c = \dfrac{8}{9};\ K = \ln\dfrac{3}{2}$ (b) 4.5 (c) $x = \dfrac{\ln 4.5}{\ln 1.5} \approx 3.71$

Capítulo 9

Sección 9.1

1. $x^2 + y^2 = 1$

2. (a) $180°$ (b) $720°$ (c) $120°$ (d) $576°$

3. (a) $45°$ (b) $-135°$ (c) $1080°$

Sección 9.2

1. (a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) 0 (e) 0 (f) 0 (g) 1 (h) 0 (i) 1 (j) 1 (k) 1 (l) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (m) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (n) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (o) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (p) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (q) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (r) $\frac{1}{2}$ (s) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (t) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (u) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) $-\frac{1}{2}$ (w) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (x) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (y) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (z) $-\frac{1}{2}$

2. (a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right) = -\frac{1}{3}$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{1}{3}$

   (b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + v\right) = \frac{1}{4}$; $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{1}{4}$

4. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. (a) $\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ (b) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

Sección 9.3

1. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\,n\,\pi$
2. $x = \pm 1 + 2\,n\,\pi$
3. $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi$
4. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\,n\,\pi$
5. $x = \pm\dfrac{5\,\pi}{6} + 2\,n\,\pi$
6. $x = \dfrac{\pi}{5} + 2\,n\,\pi;\ \dfrac{4\,\pi}{5} + 2\,n\,\pi$
7. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\,n\,\pi;\ \dfrac{2\,\pi}{3} + 2\,n\,\pi$
8. $x = n\,\pi$
9. $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\,n\,\pi;\ -\dfrac{5\,\pi}{6} + 2\,n\,\pi$
10. $x = 2 + 2\,n\,\pi;\ \pi - 2 + 2\,n\,\pi$
11. $x = 53 + 2\,n\,\pi;\ \pi - 53 + 2\,n\,\pi$

Sección 9.4

1. (a) 1 (b) $-\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$
2. (a) $x = \dfrac{\pi}{4} + n\,\pi$
   (b) $x = \dfrac{\pi}{6} + n\,\pi$
   (c) $x = 1 + n\,\pi$
   (d) $x = \dfrac{\pi}{3} + n\,\pi$

Sección 9.5

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{1}{2}$
3. $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{3}$

Sección 9.6

2. (a) $\frac{7}{25}$ (b) 0

3. (a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

6. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

7. (a) $v = 8°27'\,40'' = 0.147$ rad (c) $v = 7°0'\,34'' = 0.122$ rad
   (b) $AD = 8.612$ cm

Sección 9.7

1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\,n\,\pi$
2. $x = \frac{\pi}{6} + 2\,n\,\pi;\ \frac{5\,\pi}{6} + 2\,n\,\pi;\ -\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi$
3. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi;\ n\,\pi$
4. $x = n\,\pi$
5. $x = \frac{\pi}{6} + 2\,n\,\pi;\ \frac{5\,\pi}{6} + 2\,n\,\pi$
6. $x = \frac{\pi}{3}\left(n + \frac{1}{12}\right);\ \frac{\pi}{3}\left(n + \frac{5}{12}\right)$
7. $x = \frac{\pi}{14} + 2\,n\,\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi$
8. $x = \frac{\pi}{12} + 2\,n\,\pi;\ -\frac{5\,\pi}{12} + 2\,n\,\pi;\ \frac{7\,\pi}{12} + 2\,n\,\pi;\ \frac{11\,\pi}{12} + 2\,n\,\pi$
9. $x = \frac{\pi}{20};\ \frac{9\,\pi}{20};\ \frac{17\,\pi}{20}$
10. $x = \frac{289}{4}\pi$
11. $x = \frac{95}{12}\pi;\ \frac{269}{36}\pi$
12. $x = -\frac{28\,\pi}{3}$

13. $x = \pi \left(n - \dfrac{3}{8} \right);\ n = 1, 2, \ldots, 144.$

14. $x = -7\,\pi$

15. $x = 18\,\pi;\ 19\,\pi$

16. $x = -\dfrac{31\,\pi}{4};\ -\dfrac{15\,\pi}{2};\ -\dfrac{17\,\pi}{2};\ -\dfrac{19\,\pi}{2}$

ISBN 987-9383-14-1