

Capítulo 7

Percolación

7.1 Introducción: ¿Que es percolación?

De manera genérica, la teoría de percolación describe las propiedades emergentes de conectividad global de sistemas compuestos por un número grande de objetos microscópicos. Dichos objetos típicamente se encuentran distribuidos en el espacio y la conectividad global del sistema depende de las propiedades geométricas y topológicas de esta distribución, la cual es aleatoria. De esta manera, la percolación constituye un ejemplo interesante de un fenómeno crítico no térmico, ya que (las fluctuaciones que determinan el fenómeno no se originan en el contacto con un baño térmico (aunque como veremos mas adelante, el mismo resulta isomorfo a un problema térmico en un límite particular). Por el contrario, la percolación es un problema de geometría aleatoria.

Para fijar ideas, pensemos en una red hipercúbica d -dimensional de tamaño lineal L , cuyos sitios representan conectores. Cada enlace entre dos sitios primeros vecinos puede estar ocupado por una resistencia eléctrica de valor constante con probabilidad p o vacío (resistencia infinita o aislante perfecto) con probabilidad $1 - p$. p es nuestro parámetro de control (el cual reemplaza a la temperatura) y nos da la fracción de enlaces ocupados para una realización de la red de resistores. Esta configuración corresponde al problema de **percolación de enlaces**. Alternativamente,

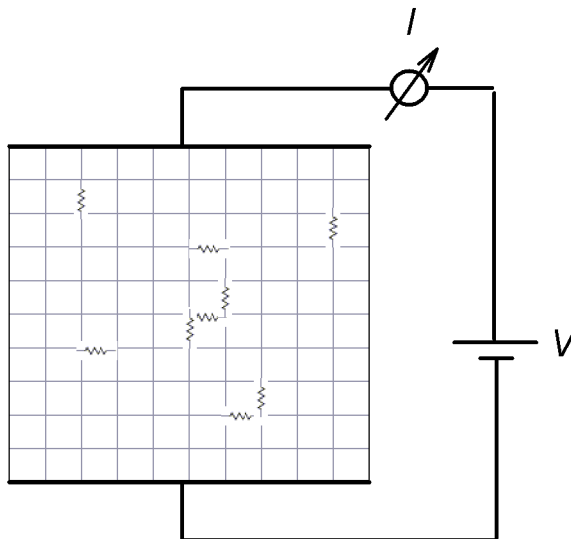


Figura 7.1: Percolación de enlaces

podemos considerar que todos los enlaces se encuentran ocupados por resistores del mismo valor de resistencia. Cada sitio puede en este caso estar ocupado por un conductor (conectando por lo tanto los resistores que convergen al mismo) con probabilidad p o un aislante con probabilidad $1 - p$. Esta configuración corresponde al problema de **percolación de sitios**. Si bien ambos problemas no son enteramente equivalentes, en lo que al fenómeno crítico respecta, ambos pertenecen a la misma clase de universalidad.

En cualquiera de las dos configuraciones, supongamos que conectamos dos de las superficies externas con placas conductoras y cerramos el circuito con una batería que suministra un voltaje V y medimos la corriente I que circula por el circuito mediante un amperímetro, tal como se muestra en la figura 7.1. Claramente, si $p \ll 1$ tendremos que la corriente $I = 0$. En el extremo opuesto, si $p \approx 1$, tendremos una corriente neta $I \neq 0$. Que ocurre para valores intermedios de p ?

De manera mas precisa, la pregunta relevante es: ¿Existe un valor p_c , tal que para $\forall p \leq p_c$ tenemos que $\langle I \rangle = 0$ (el valor medio se toma sobre diferentes realizaciones

del desorden) y para $\forall p > p_c$ tenemos que $\langle I \rangle \neq 0$? En ese caso estaremos ante una transición de fase entre un régimen no conductivo y uno conductivo. En la fase conductiva decimos que el sistema **percola**. El valor crítico del parámetro de control p_c se conoce como **umbral de percolación**. En lo que sigue, vamos a referirnos exclusivamente a la percolación de sitios.

Al igual que en el caso de los fenómenos térmicos, el umbral de percolación solo está bien definido en el límite de una red infinita $L \rightarrow \infty$. Consideremos el caso de una red finita y supongamos que comenzamos a aumentar p desde valores bajos. A medida que agregamos sitios, comenzaran a formarse clusters conexos de sitios ocupados. El sistema percola por vez primera cuando aparece un cluster que va de punta a punta, esto es, cuyo tamaño es del orden del tamaño del sistema. Podemos caracterizar entonces la presencia o no de percolación analizando la variación con p de la fracción de sitios en el cluster de mayor tamaño N_m/N ($N = L^d$), también conocido como cluster o componente gigante. Para $L \rightarrow \infty$ N_m/N tenderá a cero si N_m adopta un valor finito independiente de N (el resultado esperado en la fase no percolante) y tenderá a un valor finito si N_m es el orden del tamaño del sistema. En la figura 7.2 vemos el comportamiento de N_m/N en función de p para valores crecientes de L . Vemos que no existe un valor bien definido de p_c para ningún valor finito de L , pero vemos también como el mismo emerge para $L \rightarrow \infty$. Vamos a definir entonces

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_m}{N}, \quad (7.1)$$

cantidad que nos dá la probabilidad de que un sitio al azar pertenezca al cluster gigante. El umbral de percolación se define entonces como el valor p_c tal que

$$P_\infty = \begin{cases} 0 & \text{para } p \leq p_c \\ \neq 0 & \text{para } p > p_c \end{cases}. \quad (7.2)$$

P_∞ constituye entonces el parámetro de orden de la transición de percolación. De hecho, se observa que para $p \sim p_c$

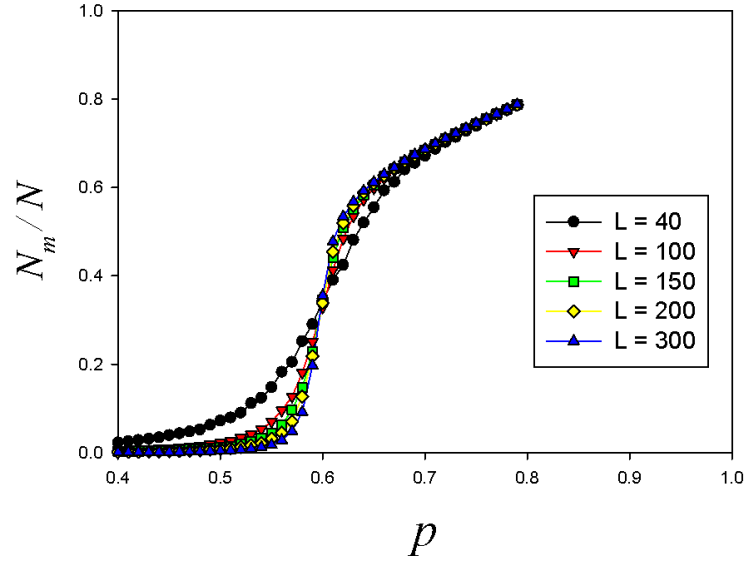


Figura 7.2: Fracción de sitios en el el cluster gigante como función de p para diferentes tamaños de sistema.

$$P_{\infty} = \begin{cases} 0 & \text{para } p \leq p_c \\ \sim (p - p_c)^{\beta} & \text{para } p > p_c \end{cases} \quad (7.3)$$

7.2 Estadística de clusters

Como en todo fenómeno crítico, el parámetro de orden no es suficiente para caracterizar la transición de percolación y debemos incluir un análisis de las fluctuaciones. Además del cluster gigante, existe una distribución de clusters de diferentes tamaños, cuya estadística caracteriza precisamente las fluctuaciones relevantes al fenómeno. A tal fin, se introduce el número de clusters de tamaño s ó s -clusters N_s y la fracción $n_s = N_s/N$, la cual puede interpretarse como una probabilidad no normalizada de tener un cluster de tamaño s . Dicha distribución depende de p y por convención no incluye el cluster gigante. Se observa que, para un sistema infinito en las cercanías del punto crítico, existe un tamaño característico s_{ξ} , tal que para $s < s_{\xi}$ la

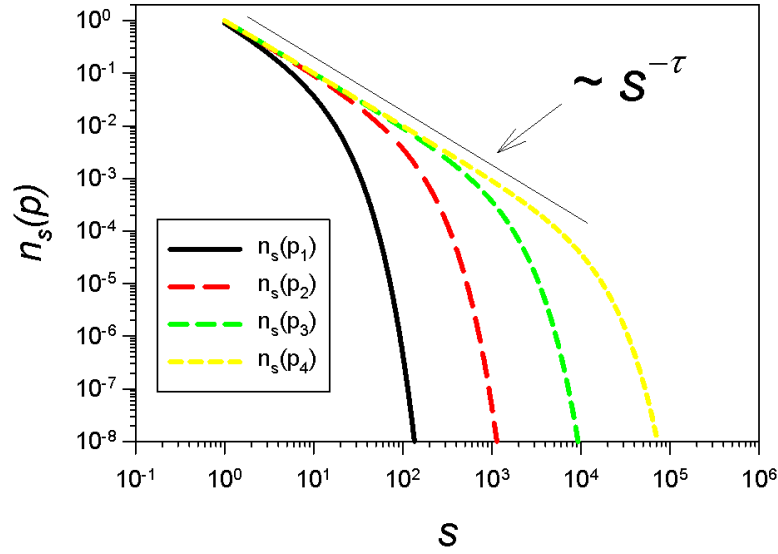


Figura 7.3: Comportamiento esquemático de $n_s(p)$ para diferentes valores de p : $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_c$, en un sistema infinito.

distribución $n_s \sim s^{-\tau}$. $\tau > 0$ se conoce como exponente crítico de Fisher. De esta manera

$$n_s(p) \sim s^{-\tau} f\left(\frac{s}{s_\xi}\right) \quad (7.4)$$

donde $f(x)$ es una función que decae rápidamente para $x \gg 1$; típicamente se observa $f(x) \sim e^{-x}$. s_ξ se conoce como *cutoff* de la distribución y exhibe en las cercanías de p_c el comportamiento

$$s_\xi \sim |p - p_c|^{-1/\sigma}, \quad (7.5)$$

donde $\sigma > 0$ es un nuevo exponente crítico. En la figura 7.3 se muestra cualitativamente el comportamiento de $n_s(p)$ para valores de $|p - p_c| \rightarrow 0$.

La probabilidad de un sitio de pertenecer a un s -cluster es $s n_s$. De esta manera

$$P_\infty + \sum_{s=1}^l s n_s = p \quad (7.6)$$

donde la suma primada excluye el cluster infinito. Sea ahora w_s la probabilidad condicional de que un sitio pertenezca a un s -cluster, *dado* que el mismo está ocupado. Tenemos entonces que

$$p w_s = s n_s$$

y $w_s = s n_s / p$. Para $p < p_c$

$$p = \sum_{s=1}^I s n_s$$

y

$$w_s = \frac{s n_s}{\sum_{s=1}^I s n_s}$$

El tamaño medio de un s -cluster viene dado por

$$\langle s \rangle(p) = \sum_{s=1}^I s w_s = \frac{\sum_{s=1}^I s^2 n_s(p)}{\sum_{s=1}^I s n_s(p)}. \quad (7.7)$$

Si bien esta expresión es estrictamente válida para $p < p_c$, se asume válida para todo valor de p suficientemente cerca de p_c , ya que $P_\infty \ll 1$. Empíricamente se observa que

$$\langle s \rangle \sim |p - p_c|^{-\gamma} \quad (7.8)$$

para $p \rightarrow p_c$. El exponente crítico γ claramente está relacionado con los exponentes τ y σ . Ahora bien, la cantidad en el denominador de la Ec.(7.7) no está relacionada con la divergencia de $\langle s \rangle$, ya que

$$\sum_{s=1}^I s n_s(p_c) = p_c. \quad (7.9)$$

Así, para $|p - p_c| \ll 1$ tenemos que

$$\langle s \rangle \propto \sum_{s=1}^I s^2 n_s(p)$$

$$\begin{aligned} &\propto \sum_{s=1}^{\infty} s^{2-\tau} e^{-s/s_{\xi}} \\ &\approx \int_1^{\infty} s^{2-\tau} e^{-s/s_{\xi}} ds. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = s/s_{\xi}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &\approx s_{\xi}^{3-\tau} \int_{1/s_{\xi}}^{\infty} z^{2-\tau} e^{-z} dz. \\ &\approx s_{\xi}^{3-\tau} \int_0^{\infty} z^{2-\tau} e^{-z} dz = s_{\xi}^{3-\tau} \Gamma(3-\tau). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Usando la ecuación (7.5) y comparando con la ecuación (7.11) obtenemos la relación de escala

$$\gamma = \frac{3-\tau}{\sigma}. \quad (7.11)$$

Dado que $\gamma > 0$, esta última relación implica que $\tau < 3$. Por otra parte, es fácil ver que la Ec.(7.9) implica que $\tau > 2$ y por lo tanto

$$2 < \tau < 3$$

Otra cantidad de interés es el número total de clusters (normalizado a N) o "masa"

$$M(p) = \sum_{s=1}^I n_s(p) \quad (7.12)$$

Para $p \sim p_c$

$$\begin{aligned} M(p) &\sim \int_1^{\infty} s^{-\tau} e^{-s/s_{\xi}} ds. \\ &\sim s_{\xi}^{1-\tau} \\ &\sim |p - p_c|^{(\tau-1)/\sigma}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Se define el exponente α a través de la relación

$$M(p) \sim |p - p_c|^{2-\alpha} \quad \text{para } p \sim p_c \quad (7.14)$$

de manera que

$$\alpha = 2 - \frac{\tau - 1}{\sigma}. \quad (7.15)$$

Finalmente, la estadística de clusters, dada por la distribución n_s nos permite derivar también el comportamiento del parámetro de orden para $p > p_c$ y $p \sim p_c$:

$$\begin{aligned} P_\infty(p) &= p - \sum_{s=1}^{\prime} s n_s(p) \\ &= p_c - \sum_{s=1}^{\prime} s n_s(p) + (p - p_c) \\ &= \sum_{s=1}^{\prime} s n_s(p_c) - \sum_{s=1}^{\prime} s n_s(p) + \mathcal{O}(p - p_c) \\ &= \sum_{s=1}^{\prime} s^{1-\tau} - \sum_{s=1}^{\prime} s^{1-\tau} e^{-s/s_\xi} + \mathcal{O}(p - p_c) \\ &= \sum_{s=1}^{\prime} s^{1-\tau} \left(1 - e^{-s/s_\xi}\right) + \mathcal{O}(p - p_c) \\ &\sim \int_1^\infty s^{1-\tau} \left(1 - e^{-s/s_\xi}\right) ds \end{aligned} \quad (7.16)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{dP_\infty}{d(1/s_\xi)} &\propto \int_1^\infty s^{2-\tau} e^{-s/s_\xi} ds \\ &\propto s_\xi^{3-\tau} \int_{1/s_\xi}^\infty z^{2-\tau} e^{-z} dz \\ &\propto \left(\frac{1}{s_\xi}\right)^{\tau-3}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

de donde

$$P_\infty = c_1 + c_2 \left(\frac{1}{s_\xi}\right)^{\tau-2}.$$

Para $p \rightarrow p_c$ tenemos que $s_\xi \rightarrow \infty$ y $P_\infty \rightarrow 0$ y por lo tanto $c_1 = 0$. Así

$$P_{\infty} \propto \left(\frac{1}{s_{\xi}} \right)^{\tau-2} \sim |p - p_c|^{(\tau-2)/\sigma},$$

de donde obtenemos la relación de escala

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \quad (7.18)$$

Combinando las ecuaciones (7.11), (7.15) y (7.18) verificamos que los exponentes de percolación satisfacen la igualdad de Rushbrooke

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

Claramente, la elección de los nombres de los exponentes críticos de percolación no fue casualidad. En 1969 Kasteleyn y Fortuin demostraron que el problema de percolación de enlaces (descrito por la misma estadística de clusters que la percolación de sitios y perteneciente a la misma clase de universalidad) corresponde a límite $q \rightarrow 1$ del modelo de Potts de q estados. De esta manera, el problema de percolación de enlaces resulta isomorfo a un fenómeno crítico térmico y la masa $M(p)$ corresponde a la energía libre.

7.3 Función de correlación y estructura de los clusters

Se define la función de correlación $C(\vec{r})$ como la probabilidad de que un sitio ocupado a una distancia $\vec{r}$ de otro sitio ocupado pertenezca al mismo cluster **finito** (esto es, se excluye el cluster gigante). Por definición, $C(0) = 1$ y para redes regulares claramente C solo depende del modulo $r = |\vec{r}|$. Se puede demostrar que

$$\sum_{\vec{r}} C(\vec{r}) = \langle s \rangle$$

lo cual claramente se deriva del teorema de Fluctuación-Disipación. La longitud de correlación se define como

$$\xi^2 = \frac{\sum_r r^2 C(r)}{\sum_r C(r)} \quad (7.19)$$

y se observa que

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$$

para $p \sim p_c$, como era de esperar.

El centro de masa de un s -cluster viene dado por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \vec{r}_i, \quad (7.20)$$

donde $\vec{r}_i$ es la posición del i -ésimo sitio del cluster. Se define el **radio** de un s -cluster R_s (también llamado radio de giración) como

$$R_s^2 = \langle |\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}|^2 \rangle = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s |\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}|^2. \quad (7.21)$$

Es facil demostrar (queda como ejercicio para el lector) que

$$R_s^2 = \frac{1}{2s^2} \sum_{i,j} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2, \quad (7.22)$$

esto es, $2R_s^2$ es la distancia cuadrática promedio entre los sitios de un s cluster. Si notamos además que un s -cluster contiene $s^2/2$ pares de sitios, podemos expresar la longitud de correlación como

$$\xi^2 = \frac{\sum'_s \frac{s^2}{2} N_s (2R_s^2)}{\sum'_s \frac{s^2}{2} N_s} = \frac{\sum'_s 2R_s^2 s^2 n_s}{\sum'_s s^2 n_s} \quad (7.23)$$

Para el caso de una red finita, se observa que el cluster gigante es un objeto **fractal**, esto es que

$$N_m \propto L^{d_f}$$

para $L \gg 1$ y $p \sim p_c$, donde la dimensión fractal d_f no es entera. Por ejemplo, para $d = 2$ tenemos que $d_f = 91/48 < 2$. Para $p \rightarrow p_c^-$, el cluster percolante surge a partir de los clusters de mayor tamaño $s \sim s_\xi$, donde $s_\xi \rightarrow \infty$ para $p \rightarrow p_c$. Así, resulta razonable **asumir** que $s \sim R_s^{d_f}$ para $s \gg 1$, siendo los términos correspondientes

quienes dominan las sumas en la Ec.(7.23). Así, reemplazando $R_s \sim s^{1/d_f}$ en la Ec.(7.23) y operando como antes obtenemos

$$\xi^2 \sim \frac{\sum'_s 2s^{2+2/d_f} n_s}{\sum'_s s^2 n_s} \sim |p - p_c|^{-\frac{2}{\sigma d_f}}, \quad (7.24)$$

de donde obtenemos la ley de escala

$$\nu = \frac{1}{\sigma d_f}. \quad (7.25)$$

Podemos ver que este resultado es consistente con

$$s_\xi \sim \xi^{d_f} \sim |p - p_c|^{-\nu d_f} \sim |p - p_c|^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

7.4 Percolación en $d = 1$

La probabilidad de tener un cluster percolante en una cadena de largo L es $\Pi(p, L) = p^L$. De aquí se sigue inmediatamente que $p_c = 1$, lo cual es fácil de interpretar. Un cluster percolante en la cadena implica que todos los sitios estén ocupados. En una red infinita, eso solo puede ocurrir si $p = 1$, ya que de otra manera tendríamos con certeza que al menos un sitio se encuentra vacío.

Un s -cluster en $d = 1$ consiste de s sitios contiguos ocupados y dos sitios vacíos en las puntas. La probabilidad de dicha configuración es $p^s (1 - p)^2$. Para $L \gg 1$ el número de maneras en que dicha configuración puede ocurrir es L (para una red muy grande podemos ignorar los efectos de bordes y las superposiciones). Así, el número de s -clusters es aproximadamente $N_s \approx L p^s (1 - p)^2$ y

$$n_s = p^s (1 - p)^2. \quad (7.26)$$

Esta expresión puede ser reescrita como

$$n_s = (1 - p)^2 e^{\ln p^s} = (p - p_c)^2 e^{-s/s_\xi}, \quad (7.27)$$

donde

$$s_\xi = -\frac{1}{\ln p}. \quad (7.28)$$

Para $p \rightarrow p_c$ tenemos

$$s_\xi = -\frac{1}{\ln(1 - (1 - p))} \sim \frac{1}{1 - p} = (p_c - p)^{-1} \quad (7.29)$$

de donde $\sigma = 1$. La Ec.(7.27) puede entonces ser reescrita como

$$n_s = s^{-2} [s(p_c - p)]^2 e^{-s/s_\xi} = s^{-2} f\left(\frac{s}{s_\xi}\right) \quad (7.30)$$

con $f(x) = x^2 e^{-x}$ y por lo tanto $\tau = 2$. Reemplazando en la relación de escala (7.18) obtenemos $\beta = 0$, lo cual resulta consistente con el hecho de que el parámetro de orden es siempre cero $\forall p \leq 1$. Usando la Ec.(7.27) puede demostrarse que

$$\langle s \rangle = \frac{1 + p}{1 - p} \sim (p_c - p)^{-1} \quad (7.31)$$

de donde $\gamma = 1$, lo cual resulta consistente con la relación (7.11). También resulta directo demostrar que

$$\sum_{s=1}^{\infty} n_s = p_c - p$$

de donde obtenemos $\alpha = 1$, valor que resulta consistente con la relación (7.15). Finalmente, analicemos la longitud de correlación. Si dos sitios ocupados a una distancia r pertenecen al mismo cluster, los $r - 1$ intermedios también están ocupados. La probabilidad de que esto ocurra es por lo tanto

$$C(r) = p^r = e^{-r/\xi} \quad \forall p < 1 \quad (7.32)$$

donde

$$\xi = -\frac{1}{\ln p} \sim (p_c - p)^{-1}, \quad (7.33)$$

con lo cual $\nu = 1$ y por lo tanto $d_f = 1$.

7.5 Percolación en la red de Bethe

La solución del problema de percolación de sitios en la red de Bethe es tal vez la forma mas sencilla de obtener el comprotamiento asociado de campo medio, es decir, el comportamiento en alta dimensionalidad. Estudios de Grupo de Renormalización muestran que la dimensión crítica superior para este problema es $d_c = 6$.

Consideremos entonces un arbol de Cayley in finito con z primeros vecinos, de manera que todos los sitios son equivalentes. Comencemos calculando el umbral de percolación p_c , el cual puede obtenerse considerando la probabilidad de tener un camino infinito a partir de un sitio "central", elegido arbitrariamente. Así, a partir de la primera generación luego del sitio central, en cada rama encontraremos un promedio de $p(z - 1)$ vecinos ocupados. Si este número es inferior a uno, el camino se interrumpirá y la probabilidad de tener un cluster infinito será cero. De esta manera $p_c(z - 1) = 1$, es decir

$$p_c = \frac{1}{z - 1}.$$

Notemos que para $z = 2$ ($d = 1$) recuperamos el resultado $p_c = 1$.

A fin de simplificar el tratamiento, vamos a considera ahora el caso $z = 3$ y luego generalizar a valores arbitrarios de z . Sea Q la probabilidad de que un sitio arbitrario ocupado NO esté conectado con el infinito a través de un camino que se origina en el. La probabilidad de que un sitio arbitrario pertenezca al custer infinito $P_\infty(p)$ puede expresarse como la probabilidad de que el sitio esté ocupado por la probabilidad de que exista **al menos un** camino que lo conecte con el infinito. Esto es:

$$P_\infty(p) = p(1 - Q^3)$$

Por otro lado Q , la probabilidad de que una rama que se origina en un sitio ocupado no conecte con infinito, vendrá dado por la probabilidad de que el vecino en el cual se origina la rama esté desocupado más la probabilidad de que, estando ocupado, ninguna de las subramas se conecte con infinito, esto es:

$$Q = (1 - p) + p Q^2$$

cuyas soluciones son $Q = 1$ y $Q = (1 - p)/p$ y por lo tanto (para $z = 3$)

$$P_{\infty}(p) = \begin{cases} 0 & p \leq p_c \\ p \left[1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^3 \right] & p > p_c \end{cases}$$

Para $z = 3$ tenemos que $p_c = 1/2$. Desarrollando en Taylor la expresión anterior en torno de $p = 1/2$ se obtiene que $P_{\infty}(p) \propto (p - p_c)$ y por lo tanto $\beta = 1$. Este último resultado puede verificarse que es válido para todo $z > 2$. Finalmente analicemos el comportamiento de $\langle s \rangle$ para $p < p_c$ (para $p > p_c$ la presencia del cluster gigante vuelve el cálculo bastante más complicado). Tomemos un sitio ocupado (central) y calculemos el tamaño medio del cluster al cual pertenece, el cual será la contribución del sitio mas las de las ramas que en él se originan, las cuales serán iguales por simetría. Llamando T a la cantidad media de sitios en una rama infinita tenemos

$$\langle s \rangle = 1 + zT.$$

Pero

$$T = p [1 + (z - 1)T],$$

de donde

$$T = \frac{p}{1 - p(z - 1)}$$

y

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{zp}{1 - p(z - 1)} = p_c \frac{1 + p}{p_c - p},$$

de donde $\gamma = 1$. Los restantes exponentes se obtienen de manera semejante. En la tabla 7.1 se resumen los exponentes criticos para $d = 1, 2, 3$ y $d \geq 6$ (Bethe).

Exponente	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d \geq 6$ (Bethe)
α	1	-2/3	-0.62	-1
β	0	5/36	0.41	1
γ	1	43/18	1.80	1
ν	1	4/3	0.88	1/2
σ	1	36/91	0.45	1/2
τ	2	187/91	2.18	5/2
d_f	1	91/48	2.53	4

Tabla 7.1: Exponentes críticos de percolación.

7.6 Grupo de Renormalización

El formalismo de Grupo de Renormalización aplicado al problema de percolación sigue exactamente los mismos pasos que en el caso de sistemas magnéticos. Comenzamos definiendo bloques de Kadanoff y asignamos una probabilidad de ocupación a los bloques $p' = R(p)$, para luego reescalar todas las longitudes $l \rightarrow l/b$. Esta ecuación de recurrencia tendrá, en el caso de existir una transición de percolación para un valor de p finito, dos puntos fijos triviales ($\xi = 0$): *i*) $p = 0$, correspondiente a la fase desordenada (no percolada) y *ii*) $p = 1$ correspondiente a la fase percolada. También presentará un punto fijo inestable, correspondiente al punto crítico

$$p_c = R(p_c).$$

Desarrollando la ecuación de recurrencia en torno de $p = p_c$ obtenemos $u' = \lambda u = b^y u$, donde $u \equiv |p - p_c|$ y

$$\lambda = \left. \frac{dR(p)}{dp} \right|_{p=p_c} = b^y.$$

Finalmente, de la relación de homogeneidad

$$\xi(p') = \xi(p)/b$$

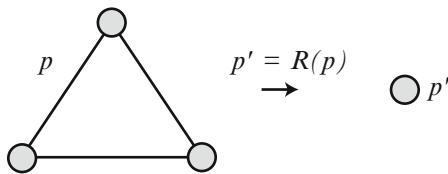


Figura 7.4: RG en la red triangular con $b = \sqrt{3}$.

se sigue inmediatamente que $y = 1/\nu$.

Veamos a continuación algunos ejemplos.

7.6.1 Regla de la mayoría en percolación de sitios

Vamos a considerar una red triangular con bloques de Kadanoff de tres sitios, como se muestra en la Fig.7.34, cuyo factor de escala es $b = \sqrt{3}$. La probabilidad de ocupación de un bloque p' se calcula, de acuerdo con la regla de la mayoría, sumando las probabilidades de aquellas configuraciones con al menos dos sitios ocupados, esto es

$$p' = p^3 + 3(1-p)p^2 \quad (7.34)$$

la cual claramente presenta los puntos fijos triviales $p = 0$ y $p = 1$. Es fácil verificar que la misma presenta también un punto fijo inestable $p_c = 1/2$, cuyo valor concuerda con el valor exacto para percolación de sitios en la red triangular. El autovalor asociado resulta $\lambda = 3/2$ y el correspondiente exponente crítico

$$\nu = \frac{\log(b)}{\log(\lambda)} = \frac{\log(\sqrt{3})}{\log(3/2)} = 1.35. \quad (7.35)$$

Comparado con el valor exacto $\nu = 4/3$, este resultado representa una excelente aproximación. No obstante, esto es una casualidad, ya que al aumentar el tamaño de los bloques, puede verse que la aproximación empeora.

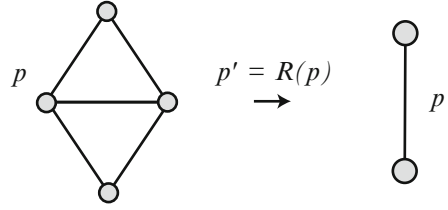


Figura 7.5: RG en una red jerárquica.

7.6.2 Decimación en percolación de enlaces (red jerárquica)

Vamos ahora a considerar el problema de percolación de enlaces en la red jerárquica definida por el cluster básico que se muestra en la Fig.7.5, el cual como vimos en el capítulo anterior se utiliza para aproximar el comportamiento de la red cuadrada.

La ecuación de recurrencia se obtiene en este caso sumando las probabilidades de todas las configuraciones que presentan al menos un camino que une las terminales del cluster, como se ejemplifica en la Fig.7.6. La ecuación de recurrencia resulta

$$p' = p^5 + 5(1-p)p^4 + 8(1-p)^2p^3 + 2(1-p)^3p^2. \quad (7.36)$$

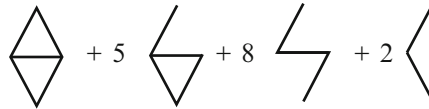


Figura 7.6: Configuraciones que contribuyen a la renormalización de la red jerárquica de la Fig.7.5.

Es fácil verificar que nuevamente $p_c = 1/2$ es solución de punto fijo de esta ecuación y esto concuerda con el umbral de percolación de enlaces exacto en la red cuadrada. Se verifica también fácilmente que $\lambda = 13/8$, con lo cual el exponente crítico resulta

$$\nu = \frac{\log(b)}{\log(\lambda)} = \frac{\log(2)}{\log(13/8)} = 1.43. \quad (7.37)$$

7.7 Percolación en sistemas finitos

Al igual que en cualquier fenómeno crítico, los efectos de tamaño finito en las cercanías de la criticalidad se pueden interpretar como un proceso de crossover provocado por la inversa del tamaño lineal actuando como un campo de escala relevante. Esto lleva a formular de manera general la siguiente

Hipótesis de escala: Sea Q una cantidad cualquiera que se comporta como $Q \sim |p - p_c|^x$ para $p \sim p_c$ en un sistema infinito, entonces en el correspondiente sistema finito de tamaño L :

$$Q(p, L) \sim (p - p_c)^x q\left(\frac{L}{\xi_\infty}\right) \quad (7.38)$$

donde $\xi_\infty \sim |p - p_c|^{-\nu}$, o bien

$$Q(p, L) \sim \xi^{-x/\nu} q\left(\frac{L}{\xi_\infty}\right) \quad (7.39)$$

donde $q(z) \rightarrow \text{cte} \neq 0$ para $z \rightarrow \infty$. A partir de estas relaciones de homogeneidad se puede demostrar (queda como ejercicio para el lector) que

$$Q(p, L) \sim L^{-x/\nu} q'\left(\frac{L}{\xi_\infty}\right) \quad (7.40)$$

y por lo tanto $Q(p_c, L) \sim L^{-x/\nu}$. Por ejemplo, en el caso la susceptibilidad tenemos que $x = -\gamma$ y por lo tanto

$$\max < s > \sim L^{\gamma/\nu}.$$

Otro ejemplo es el parámetro de orden. A partir de la hipótesis de escala tenemos que

$$\frac{N_m}{N} \sim L^{-\beta/\nu}$$

para $p \sim p_c$. Por otra parte, hemos visto que $N_m \sim L^{d_f}$. Entonces, para $L \gg 1$ y $p \sim p_c$

$$N_m \sim N L^{-\beta/\nu} \sim L^{d-\beta/\nu} \sim L^{d_f} \quad (7.41)$$

de donde obtenemos la ley de escala

$$d_f = d - \frac{\beta}{\nu} \quad (7.42)$$

Finalmente, la distribución de tamaños $n_s(p_c, L)$ claramente tiene que ir a cero para algún valor de cutoff característico $s^*(L)$, esto es

$$n_s(p_c, L) \sim s^{-\tau} g\left(\frac{s}{s^*(L)}\right) \quad (7.43)$$

donde $g(z)$ es una función de decaimiento rápido para $z \gg 1$, típicamente exponencial y $s^*(L) \rightarrow \infty$ para $L \rightarrow \infty$ (s^* no debe confundirse con el cutoff s_ξ analizado en la sección 7.2). Podemos asumir $s^*(L) \sim L^{d_f}$. Un cálculo semejante a los realizados en la sección 7.2 nos muestra que

$$\langle s \rangle \sim (s^*)^{3-\tau} \sim L^{d_f(3-\tau)}.$$

Pero acabamos de ver que $\langle s \rangle \sim L^{\gamma/\nu}$, de donde obtenemos la relación de escala

$$\frac{\gamma}{\nu} = d_f(3 - \tau),$$

la cual combinada con la ecuación (7.25) recupera la relación (7.11), lo cual muestra la consistencia de nuestra suposición.

Bibliografía

- [1] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, (University of Texas Press, 1984), cap. 10.
- [2] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, (Addison Wesley, 1992), Cap. 9.
- [3] C. J. Thompson, *Classical Equilibrium Statistical Mechanics*, Clarendon Press - Oxford, 1988, Cap. 7.
- [4] K. Binder and D. W. Heermann, *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, (Springer Verlag, 1992).
- [5] T. H. Berlin and M. Kac, Phys. Rev. **86**, 821 (1952).
- [6] T. Niemeijer and J.M.J. van Leeuwen, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, (C. Domb and M.S. Green Eds., Academic Press, 1976), p. 425.
- [7] K. Wilson, Scientific American **241**, 158 (1979).
- [8] T. W. Burkhardt, *Real Space Renormalization* (Springer - Verlag, 1982), p. 33.
- [9] J. R. Melrose, J. Phys. A **16**, 1041, 3077, L407 (1983).
- [10] C. Tsallis, J. Phys. C **18**, 6581 (1985).
- [11] S. A. Cannas, F. A. Tamarit and C. Tsallis, Phys. Rev B **45**, 10496 (1992); S. A. Cannas and C. Tsallis, Phys. Rev. B **46**, 6261 (1992).

- [12] B. Nienhuis and M. Nauenberg, Phys. Rev. Lett. **35**, 477 (1975).
- [13] Z. Glumac and K. Uzelac, Phys. Rev. E **58**, 4372 (1998).
- [14] S. A. Cannas, A. C. N. de Magalhães and F. A. Tamarit, Physical Review B **61**, 11521 (2000).
- [15] S. A. Cannas and A. C. N. de Magalhães, J. Phys. A: Math. and General **30**, 3345 (1997).
- [16] S. A. Cannas, Physical Review B **52**, 3034 (1995).
- [17] K. Binder and D. W. Heermann, *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, (Springer Verlag, 1992).