

## Guía N° 1 - Exponentes Críticos

### Problema 1: *Gas de Van der Walls.*

Considere la ecuación de Van der Walls para un fluido simple:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = RT$$

- (a) Calcule los parámetros críticos  $v_c$ ,  $T_c$ ,  $p_c$ .  
 (b) Muestre que esta ecuación de estado puede escribirse en la forma

$$\pi = \frac{4(1+t)}{1 + \frac{3}{2}\omega} - \frac{3}{(1+\omega)^2} - 1$$

donde

$$\pi \equiv \frac{p - p_c}{p_c}; \quad \omega \equiv \frac{v - v_c}{v_c}; \quad t \equiv \frac{T - T_c}{T_c}$$

se denominan variables reducidas. Note que la Ec. de V. der W. escrita en términos de estas variables resulta independiente del material.

- (c) Muestre que, en un entorno del punto crítico se obtiene la forma asintótica

$$\pi = 4t - 6t\omega - \frac{3}{2}\omega^3 + O(\omega^4, t\omega^2)$$

(d) A partir de las isothermas de Van der Walls, corregidas por la construcción de Maxwell, obtenga una forma asintótica, válida en un entorno del punto crítico, para la curva de coexistencia, es decir, obtenga formas asintóticas para  $\omega_1 (< 0)$ ;  $\omega_2 (> 0)$  y  $\pi$  en función de  $t$  para  $t \rightarrow 0^-$ . Observe que se justifica a posteriori el truncamiento hecho en el punto anterior.

(e) Muestre que, en el diagrama  $p-T$  la línea de coexistencia de fases y la curva definida por la condición  $v = v_c$  tienen igual tangente en el punto crítico.

(f) Calcule los exponentes críticos  $\beta$ , asociado a la curva de coexistencia en el plano  $p-v$  y  $\delta$  asociado a la isoterma crítica en el plano  $p-v$ .

- (g) Calcule las siguientes formas asintóticas para la compresibilidad isotérmica

$$\kappa_T(T, v = v_c) \sim Ct^{-\gamma}; \quad t \rightarrow 0^+$$

$$\kappa_T(T = T_c, p) \sim \tilde{C}\pi^{-\tilde{\gamma}}; \quad \pi \rightarrow 0$$

de los valores de  $C$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$ .

### Problema 2: *Gas de Berthelot*

Considere el gas de Berthelot, cuya ecuación de estado es

$$\left(p + \frac{a}{Tv^2}\right) (v - b) = RT$$

- (a) Calcule los parámetros críticos  $v_c$ ,  $T_c$ ,  $p_c$ .
- (b) Obtenga una expresión para la energía libre de Helmholtz  $f(T, v)$  a menos de una función arbitraria de la temperatura.
- (c) Calcule los exponentes críticos  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  y  $\alpha$ .

### Problema 3: *Ecuación de Curie-Weiss de Ferromagnetismo*

En la teoría de campo medio para el ferromagnetismo la magnetización se obtiene como solución de la ecuación trascendente de Curie-Weiss

$$m = \tanh(\beta B + \beta \lambda m)$$

donde  $B$  es el campo magnético externo y  $\lambda$  una constante.

- (a) Obtenga las formas asintóticas

$$\chi(T, B = 0) \sim Ct^{-\gamma} ; t \rightarrow 0^+$$

$$\chi(T, B = 0) \sim C'(-t)^{-\gamma'} ; t \rightarrow 0^-$$

- (b) Obtenga la forma asintótica para  $\chi(T_c, B)$  para  $B \rightarrow 0$ .
- (c) Obtenga las formas asintóticas de la magnetización espontánea para  $T \rightarrow T_c^-$  y para  $T \ll T_c$  ( $T \rightarrow 0$ ).

### Problema 4: *Desigualdades entre exponentes críticos*

Use argumentos termodinámicos para demostrar las siguientes relaciones entre exponentes críticos:

- (a) *Desigualdad de Rushbrooke:*

$$\alpha + \gamma + 2\beta \geq 2$$

- (b) *Desigualdad de Griffiths:*

$$\alpha + \beta(1 + \delta) \geq 2$$