Elementos de la Teoría de los Fenómenos Críticos

Agosto de 2021

Guía N° 2 - Modelos exactamente solubles

Problema 1: ***Interacciones de corto alcance***

Use el teorema de Perron-Frobenius para mostrar que el modelo de Ising en $d = 1$ con interaciones de corto alcance :

$$\mathcal{H} \,=\, -\sum_{i<j\leq N} J(j-i)\,\sigma_i\sigma_j \,-\, B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$$

con $J(n) = 0 \;\; \forall n > n_0$, no presenta transición de fase para $T > 0$.

Problema 2: ***Modelo de Ising Antiferromagnético unidimensional***

El hamiltoniano de este modelo en presencia de un campo B y de un "campo alterno" B_a , en $d = 1$ es

$$\mathcal{H} \,=\, +J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} \,-\, B\sum_{i=1}^{N}\,\sigma_i \,-\, B_a\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\,\sigma_i$$

con $J > 0$. Suponga que N es par e imponga condiciones períodicas de contorno.

(a) Construya una matriz de transferencia simétrica, y calcule sus autovalores.

(b) Calcule la energía libre, la magnetizacion y la magnetizacion alterna m_a . Verifique que $m_a = 0$ para $B_a = 0$.

(c) Calcule la forma asintótica de los autovalores, la energía y la entropía para $B_a = 0$; $T \to 0$ . .

Problema 3: ***Modelo de Blume-Capel unidimensional***

Considere el modelo de Blume-Capel a campo nulo en $d = 1$ con condiciones períodicas de contorno :

$$\mathcal{H} \,=\, -J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} \,+\, D\sum_i s_i^2$$

donde $s_i \,=\, 0, \pm 1$ y $D, J > 0$.

(a) Calcule los autovalores de la matriz de transferencia.

(b) Calcule la energía libre y la entropía por spin.

(c) Estudie el estado fundamental como funcion de D/J . Calcule la forma asintótica de los autovalores de la matriz de transferencia para $T \to 0$ en las tres regiones características y analice el comportamiento de la entropía y la longitud de correlación.

Problema 4: ***Modelo n-vectorial unidimensional***

Considere el modelo $n-$vectorial a campo nulo definido sobre una cadena lineal con condiciones de contorno libres :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^{N-1} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1}$$

donde $\vec{s}_i$ es un vector de n componentes con $|\vec{s}_i| = n$.

(a) Calcule la función partición.

(b) Calcule la energía libre y el calor específico. Particularice para $n = 3$ y calcule el límite de $C(T)$ para $T \to 0$.

(c) Calcule la función correlación de pares $< \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+l} >$. Compruebe que decae exponencialmente para $l \to \infty$.

(d) Muestre que para $n \to 1$, se reobtienen las funciones calculadas para el modelo de Ising.

Problema 5: ***Modelo de Ising bidimensional: matriz de transferencia***

Considere el modelo de Ising ferromagnético con interacciones a primeros vecinos, definido sobre una red cuadrada con m filas y n columnas (tal que $N = m \times n$) y condiciones de contorno periódicas.

Muestre que la función de partición puede escribirse como

$$Z = \mathrm{Tr}\ V^n = \mathrm{Tr}\ \left(V_2^{1/2} V_1 V_2^{1/2} \right)^n \tag{1}$$

donde las matrices $m \times m$ son

$$V_1 = g(K)^m \exp\left(K^* \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^x \right) \tag{2}$$

$$V_2 = \exp\left(K \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right), \tag{3}$$

siendo $g(K) = \sqrt{2\sinh(2K)}$, K^* la solución de la ecuación $e^{-2K} = \tanh(K^*)$ y σ_i^α, con $i = 1, \ldots, m$ y $\alpha = x, y, z$, los operadores

$$\begin{aligned}
\sigma_1^\alpha &= \sigma^\alpha \otimes I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \\
\sigma_2^\alpha &= I \otimes \sigma^\alpha \otimes I \otimes \cdots \otimes I \\
\vdots &= \vdots \\
\sigma_m^\alpha &= I \otimes I \otimes I \otimes \cdots \otimes \sigma^\alpha
\end{aligned}$$

donde σ^α son las matrices de Pauli e I es la identidad 2×2.

Problema 6: ***Modelo de Ising bidimensional: representación de Majorana***

Sean los operadores

$$\psi_1(j) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1^x\sigma_2^x\cdots\sigma_{j-1}^x\sigma_j^y \tag{4}$$

$$\psi_2(j) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1^x\sigma_2^x\cdots\sigma_{j-1}^x\sigma_j^z \tag{5}$$

definidos a partir de los operadores de Pauli introducidos en el problema anterior.

(a) Muestre que los mismos satisfacen las relaciones de anticonmutación de los Fermiones de Majorana

$$\{\psi_a(j),\psi_b(l)\} = \psi_a(j)\psi_b(l) + \psi_b(l)\psi_a(j) = \delta_{a,b}\delta_{j,l}. \tag{6}$$

(b) Verifique explícitamente las condiciones de contorno que cumplen los operadores de Majorana. Muestre que

$$[\sigma_{prod},\psi_1(i)\psi_2(i)] = [\sigma_{prod},\psi_1(i)\psi_2(i+1)] = 0 \quad \forall i.$$

siendo $\sigma_{prod} = \sigma_1^x\,\sigma_2^x\cdots\sigma_m^x$. Esto implica que σ_{prod} y el producto V_1V_2 pueden ser diagonalizados simultaneamente.

Problema 7: ***Modelo de Ising bidimensional: diagonalización de la matriz de trnasferencia en el espacio de Fourier***

Defina los operadores fermionicos "usuales" en el espacio recíproco

$$\psi_a(j) = \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{q\geq 0}\left(e^{iqj}C_a(q) + e^{-iqj}C_a^\dagger(q)\right) \quad a=1,2 \tag{7}$$

donde el vector de onda q satisface $e^{iqm} = \pm 1$, dependiendo de la condición de contorno utilizada para los operadores de Majorana.

(a) Muestre que la matriz de transferencia puede escribirse como

$$V = g(K)^m \prod_{q\geq 0} V_2(q)^{1/2}V_1(q)V_2(q)^{1/2}$$

donde

$$V_1(q) = \exp\left[-2iK^*\left(C_1(q)C_2^\dagger(q) + C_1^\dagger(q)C_2(q)\right)\right]$$

$$V_2(q) = \exp\left[2iK\left(e^{-iq}C_1(q)C_2^\dagger(q) + e^{iq}C_1^\dagger(q)C_2(q)\right)\right]$$

(b) Muestre que la energía libre for spin resulta

$$\beta f(T) = -\ln\left(2\cosh 2\beta J\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\phi \ln\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\kappa^2 \mathrm{sen}^2\phi}\right)\right]$$

donde

$$\kappa = \frac{2\,\mathrm{senh}(2\,K)}{\cosh^2(2\,K)}$$

Problema 8: *Modelo esférico tridimensional*

Considere el modelo esférico en $d = 3$. Muestre que

(a) La susceptibilidad magnética a campo nulo χ diverge como $(T - T_c)^{-\gamma}$ para $T \to T_c^+$. Calcule el exponente γ.

(b) El calor específico a campo nulo es continuo en $T = T_c$, siendo constante para $T < T_c$, y que su derivada es discontinua en $T = T_c$.