

Guía N° 3 - Teorías de Campo Medio

Problema 1: *Modelo de Blume-Capel - Aproximación Variacional*

Considere el modelo de Blume-Capel a campo nulo en una red de coordinación z :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + D \sum_i s_i^2$$

donde $s_i = 0, \pm 1$, $D, J, B > 0$.

(a) Utilize el Hamiltoniano de prueba

$$\mathcal{H}_0 = -\eta \sum_i s_i + D \sum_i s_i^2$$

y la desigualdad variacional de Bogoliubov para obtener una expresión aproximada de la energía libre, esto es, obtenga una funcional $\Phi(T, B, \eta)$ tal que

$$f(T, B) = \min_{\eta} \Phi(T, B, \eta).$$

Verifique que el valor de η que minimiza la funcional es proporcional a la magnetización a campo nulo del sistema en la aproximación que estamos considerando.

(b) Mediante una expansión de Landau para $\Phi(T, B = 0, \eta)$ en potencias de η

$$\Phi(T, B = 0, \eta) = a_0 + a_2 \eta^2 + a_4 \eta^4 + a_6 \eta^6 + \dots$$

calcule la línea de segundo orden y localice el punto tricrítico.

Problema 2: *Modelo de Blume-Capel - Versión Curie-Weiss*

Considere la versión Curie-Weiss del modelo de Blume-Capel

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j} s_i s_j + D \sum_i s_i^2 - B \sum_i s_i$$

donde $s_i = 0, \pm 1$, $D, J, B > 0$.

(a) Obtenga una forma asintótica para la función partición en el $\lim N \rightarrow \infty$, y muestre que la energía libre puede escribirse como

$$f(T, B) = \min_m \Phi(T, B, m)$$

donde la variable m puede identificarse con la magnetización.

(b) Compare la expresión de esta funcional a campo nulo con la obtenida en el problema anterior. Compare el comportamiento crítico de ambas aproximaciones.

Problema 3: Teoría de Landau para puntos tricríticos

(a) Calcule los exponentes tricríticos clásicos α, β, γ y δ .

(b) Suponiendo dos parámetros termodinámicos (T, x) , muestre que las líneas de primer y segundo orden en el diagrama de fases (T, x) tienen la misma pendiente en el punto tricrítico.

Problema 4: Derivadas funcionales

(a) Sea una funcional $F[f(x)]$. Muestre que

$$\frac{\delta f(x_1)}{\delta f(x_0)} = \delta(x_0 - x_1)$$

(b) Muestre que

$$\frac{\delta}{\delta \eta(\vec{r})} \int d\vec{r}' \frac{1}{2} (\nabla \eta(\vec{r}'))^2 = -\nabla^2 \eta(\vec{r})$$

$$\frac{\delta}{\delta h(\vec{r})} \exp \left(\int d\vec{r}' h(\vec{r}') \eta(\vec{r}') \right) = \eta(\vec{r}) \exp \left(\int d\vec{r}' h(\vec{r}') \eta(\vec{r}') \right)$$

donde \vec{r} es un vector de posición d -dimensional.

Problema 5: Funcional de Landau-Ginzburg

Sea

$$Z = \int \mathcal{D}\eta(\vec{r}) e^{-\beta L[\eta(\vec{r})]}$$

donde $L[\eta(\vec{r})]$ es la funcional de Landau-Ginzburg

$$L = \int_{\Omega} d\vec{r} \left[\frac{1}{2} a t \eta(\vec{r})^2 + \frac{1}{4} b \eta(\vec{r})^4 - B(\vec{r}) \eta(\vec{r}) + \frac{c}{2} (\nabla \eta(\vec{r}))^2 \right]$$

y sea

$$\chi(\vec{r}, \vec{r}') \equiv \left. \frac{\delta \langle \eta(\vec{r}) \rangle}{\delta B(\vec{r}')} \right|_{B(\vec{r})=0}$$

la susceptibilidad generalizada.

(a) Muestre que

$$\chi(\vec{r}, \vec{r}') = \beta [\langle \eta(\vec{r}) \eta(\vec{r}') \rangle - \langle \eta(\vec{r}) \rangle \langle \eta(\vec{r}') \rangle]$$

(b) Muestre que la susceptibilidad isotérmica en un sistema con invariancia traslacional satisface

$$\chi_T = \left. \frac{\partial \langle \eta \rangle}{\partial B} \right|_{B=0} = \int \chi(\vec{r}) d\vec{r}$$

donde $\langle \eta \rangle = V^{-1} \int_{\Omega} \langle \eta(\vec{r}) \rangle d\vec{r}$ y V es el volumen de la muestra.