ÁLGEBRA III - Práctico 1

14 de Marzo de 2012

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que su matriz en la base ordenada $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,-1)\}$ es
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Hallar $T(3,7,-5)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por
$$T(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, 3x_1-3x_2, 2x_2-3x_1).$$
Considerar en $\mathbb{R}^2$ la base canónica y en $\mathbb{R}^3$ la misma base ordenada $\mathcal{B}$ que en el ejercicio anterior. Hallar la matriz de T en dichas bases. ¿Es T sobreyectiva?

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar.
   (a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que la dimensión del núcleo es igual a la dimensión de la imagen.
   (b) Existe una base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de matrices 2×2, tal que $tr(A_i) = 0$ para todo $i = 1, ..., 4$.
   (c) Existe una base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de matrices 2×2, tal que $A_i^2 = 0$ para todo $i = 1, ..., 4$.

4. Sea V el espacio vectorial de todos los polinomios de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de grado ≤ 2, y sean t_1, t_2, t_3 tres números reales distintos.
   (a) Probar que las funcionales L_1, L_2, L_3 sobre V definidas por $L_i(p) = p(t_i)$ son linealmente independientes.
   (b) Hallar una base $\{p_1, p_2, p_3\}$ de V tal que $\{L_1, L_2, L_3\} \subset V^*$ sea su base dual.
   (c) Escribir cualquier polinomio $p \in V$ en términos de la base $\{p_1, p_2, p_3\}$.
   (d) Si consideramos las funcionales sobre V
$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx, \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx, \qquad f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)\,dx,$$
probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de V^* dando la base de V para la cual $\{f_1, f_2, f_3\}$ es dual.
   (e) Sea f la funcional lineal sobre V dada por
$$f(p) = \int_a^b p(x)\,dx, \qquad a < b.$$
Hallar $D^t f$ si D es el operador diferenciación sobre V.

5. Sea A una matriz 2×2 sobre el cuerpo F. Demostrar que A es inversible si, y sólo si, $\det A \neq 0$. Si A es inversible, hallar una fórmula para A^{-1}.

6. Si A es una matriz $n \times n$ inversible sobre un cuerpo, demostrar que $\det A \neq 0$.

7. Una matriz $n \times n$ se dice *triangular* si $A_{ij} = 0$ para todo $i > j$ o si $A_{ij} = 0$ para todo $i < j$. Demostrar que el determinante de una matriz triangular es el producto $A_{11}A_{22} \dots A_{nn}$ de los elementos de su diagonal.

8. Una matriz $n \times n$, A, sobre un cuerpo F se dice

   simétrica si $A^t = A$;

   antisimétrica si $A^t = -A$;

   ortogonal si $AA^t = I$;

   unitaria si $A^*A = I$; en este último caso el cuerpo es $F = \mathbb{C}$ y A^* denota la transpuesta conjugada de A.

   Demostrar que:

   (a) $\det A = \det A^t$;
   (b) si A es antisimétrica y n es impar entonces $\det A = 0$;
   (c) si A es ortogonal entonces $\det A = \pm 1$;
   (d) si A es unitaria entonces $|\det A| = 1$.

9. Si V es el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ sobre F y B es una matriz $n \times n$ dada sobre F, sean L_B y R_B los operadores lineales sobre V definidos por $L_B(A) = BA$ y $R_B(A) = AB$. Demostrar que

   (a) $\det L_B = (\det B)^n$;
   (b) $\det R_B = (\det B)^n$.

10. Hallar el cociente y el resto que se obtienen al dividir f por g en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $\quad g(x) = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x + 8$;
    (b) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$, $\quad g(x) = 2x^2 + 6x + 8$;
    (c) $f(x) = -4x^3 + x^2$, $\quad g(x) = x + 1/2$;
    (d) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\quad g(x) = x - 1$.

11. Sea $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ un polinomio con coeficientes reales, i.e. $a_j \in \mathbb{R}$, $\forall j = 1 \dots n$. Probar que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de f entonces $\overline{z}$, el conjugado de z, también es raíz de f.

    Ayuda: Recordar que en $\mathbb{C}$ se cumplen $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ y $\overline{0} = 0$.

12. Si a y b son elementos de un cuerpo F y $a \neq 0$, demostrar que los polinomios 1, $ax+b$, $(ax+b)^2$, $(ax+b)^3, \dots$ forman una base de $F[x]$ (es decir, forman un conjunto linealmente independiente y todo elemento de $F[x]$ es combinación lineal finita de ellos).

13. Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Q}[x]$ son ideales. Cuando el conjunto sea un ideal, encontrar su generador mónico.

(a) Todos los f de grado par.

(b) Todos los f de grado ≥ 5.

(c) Todos los f tales que $f(0) = 0$.

(d) Todos los f tales que $f(2) = f(4) = 0$.

14. Sea A una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo F. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios f en $F[x]$, tales que $f(A) = 0$ es un ideal en $F[x]$.

15. Encontrar el generador mónico del ideal $\{f \in \mathbb{C}[x] : f(A) = 0\}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

16. Sea F un cuerpo. Demostrar que la intersección de cualquier número de ideales en $F[x]$ es un ideal.

17. Si f y g son polinomios sobre el cuerpo de los números complejos, entonces el m.c.d.$(f, g) = 1$ si, y sólo si, f y g no tienen raíces en común.

18. Si p es un polinomio irreducible y p divide a fg, demostrar que p divide a f o a g. Dar un ejemplo que muestre que esto es falso si p no es irreducible.

19. Sea A la matriz 2×2 sobre $\mathbf{C}$ dada por $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3i \end{bmatrix}$. Calcular $f(A)$ para los siguientes polinomios f:

(a) $f(x) = x^2 - x + 2$;

(b) $f(x) = x^2 - 5x + 7$.