ÁLGEBRA III - Práctico 2

1. En cada uno de los siguientes casos, sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^2$ representado por la matriz A en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y sea U el operador lineal en $\mathbb{C}^2$ representado por A en la base canónica. Encontrar el polinomio característico de T y de U, hallar los autovalores de cada operador y para cada autovalor hallar una base del autoespacio correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre F. ¿Cuál es el polinomio característico del operador identidad en V? ¿y del operador nulo?

3. Sea A una matriz triangular sobre el cuerpo F. Probar que los valores característicos de A son las entradas diagonales de A, es decir los escalares a_{jj}.

4. Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que T es diagonalizable construyendo una base de $\mathbb{R}^3$, cuyos vectores sean vectores propios de T.

5. Sea T un operador lineal en $\mathbb{R}^4$, representado en la base canónica por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Decir bajo qué condiciones es T diagonalizable.

6. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión n, y supongamos que T tiene n valores propios *distintos*. Probar que T es diagonalizable.

7. Sea N una matriz compleja 2×2 tal que $N^2 = 0$. Probar que $N = 0$ o N es semejante sobre $\mathbb{C}$ a la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Use el resultado del ejercicio anterior para probar que si A es una matriz compleja 2×2, entonces A es semejante sobre $\mathbb{C}$ a una matriz de alguno de los siguientes tipos:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

9. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sea T el operador lineal en V definido por

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Probar que T no tiene vectores propios.

10. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Encontrar los polinomios característico y minimal de A. ¿Es A semejante sobre $\mathbb{C}$ a una matriz diagonal?

11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea T un operador lineal en V. Supongamos que existe un número natural k tal que $T^k = 0$. Probar que $T^n = 0$.

12. Encontrar una matriz 3×3 cuyo polinomio minimal sea x^2.

13. Sea n un número natural y sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado a lo sumo n. Sea D el operador "diferenciación" , es decir $D(p) = p'$. ¿Cúal es el polinomio minimal para D?

14. Sea P el operador en $\mathbb{R}^2$ que proyecta sobre el eje x, es decir $P(x, y) = (x, 0)$. Probar que P es lineal y decir cuál es el polinomio minimal para P.

15. El siguiente ejercicio muestra una manera de probar la existencia de autovalores y autovectores de una transformación lineal *sin usar determinantes*.

    Supongamos V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n y T una transformación lineal de V en V. Fijemos $v \in V$

    (a) Probar que $v, Tv, T^2v, ..., T^nv$ son linealmente dependientes en V.

    (b) Probar que existe un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(T)v = 0$.

    (c) Por el teorema fundamental del álgebra el polinomio p de b) se factoriza en $\mathbb{C}$, digamos
    $$p(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_n).$$
    Entonces la transformación lineal $S = (T - \lambda_1 I)...(T - \lambda_n I)$ no es no singular.

    (d) Deducir de c) que alguno de los $T - \lambda_j I$ no es no-singular, es decir existe un $w \in V$, $w \neq 0$, tal que $Tw = \lambda_j w$.

16. Si V es el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ sobre F y B es una matriz $n \times n$ dada sobre F, sea L_B el operador lineal sobre V definido por $L_B(A) = BA$. ¿Es cierto que B y L_B tienen los mismos valores característicos? ¿y el mismo polinomio minimal?

17. Verdadero o Falso. Justificar.

    (a) Si λ es autovalor de A y de B, entonces lo es de AB.

    (b) Si λ es autovalor de A y de B, entonces lo es de $A + B$.

    (c) Si v es autovector de A y de B, entonces lo es de AB y de $A + B$.

    (d) Si A es una matriz real y p es un polinomio entonces todo autovalor de $p(A)$ es de la forma $p(\lambda)$ para algún λ autovalor de A.

    (e) Idem que el anterior pero para una matriz compleja.

    (f) Los autovalores de una matriz con coeficientes enteros son siempre racionales.

    (g) La suma de los autovalores de una matriz con coeficientes racionales es siempre racional.

(h) El producto de los autovalores de una matriz con coeficientes racionales es siempre racional.

(i) Toda matriz real $n \times n$ con n impar tiene un vector propio no nulo.

(j) A y A^t tienen los mismos valores propios.

(k) A y A^t tienen los mismos vectores propios.

(l) Para todo par de matrices A, B sobre un cuerpo F, AB y BA tienen los mismos valores propios.