ÁLGEBRA III - Práctico 3

Abril de 2012

1. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^2$, cuya matriz en la base canónica es
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
   (a) Probar que los únicos subespacios T-invariantes de $\mathbb{R}^2$ son $\mathbb{R}^2$ y el subespacio nulo.
   (b) Sea U la tranformación lineal sobre $\mathbb{C}^2$, tal que la matriz de U en la base canónica es A. Probar que existe un subespacio U–invariante de dimensión 1.

2. Sea W un subespacio invariante para T. Demostrar, sin usar matrices, que el polinomio minimal para el operador restricción T_W divide al polinomio minimal de T.

3. Sea c un autovalor de T y sea W el autoespacio asociado a c. Decir cómo es el operador restricción T_W.

4. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$
   ¿Es A semejante sobre $\mathbb{R}$ a una matriz triangular? Si es así hallar tal matriz. ¿Es A semejante a una matriz diagonal?

5. Probar que toda matriz A que satisface $A^2 = A$ es semejante a una matriz diagonal.

6. Sea T un operador lineal diagonalizable sobre un espacio vectorial V de dimensión finita y sea W un subespacio T-invariante. Probar que la restricción T_W es diagonalizable.

7. Sea T un operador lineal en V tal que todo subespacio de V es T invariante. Probar que T es un múltiplo de la identidad.

8. Sea T el operador en $\mathbb{R}^2$ que hace rotar a cada vector en un ángulo θ en sentido antihorario. Obtenga la matriz de T en la base canónica y calcule los subespacios T-invariantes.

9. Sea T el operador
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$
   en el espacio de funciones continuas en el [0,1]. Decir si los siguientes subespacios son invariantes por T:
   (a) El espacio de funciones polinomiales.
   (b) El espacio de funciones f satisfaciendo $f(x) \geq 1$ para todo $x \in [0, 1]$.
   (c) El espacio de funciones diferenciables.

(d) El espacio de funciones que se anulan en $x = \frac{1}{2}$.

10. Sea A una matriz real 3×3. Probar que si A no es semejante sobre $\mathbb{R}$ a una matriz triangular entonces A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

11. Sea V el espacio de matrices $n \times n$ sobre un cuerpo F. Sea T_A el operador lineal en V definido por
$$T_A(B) = AB - BA$$
Probar que los operadores en la familia $\{T_A : A \text{ es diagonal}\}$ son simultáneamente diagonalizables.

12. Decidir si existe una matriz real inversible P tal que $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ sean ambas diagonales y en caso afirmativo encontrar P.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$

13. Verdadero o falso. Justificar.

(a) Una matriz B es semejante a una matriz diagonal si y sólo si la transfomación L_B definida en el Ej. 9 del Prac. 1 es diagonalizable.

(b) Si una matriz compleja A satisface que $A^k = I$ para algún $k > 0$ entonces A es semejante sobre $\mathbb{C}$ a una matriz diagonal.

(c) Si una matriz triangular A es semejante a una matriz diagonal entonces A es diagonal.

(d) Existe una matriz 3×3 sobre cualquier cuerpo $\mathbf{F}$ tal que su polinomio minimal es x^2.

(e) Si A y B son dos transformaciones complejas tales que sus respectivos conjuntos de autovalores son disjuntos, y p_1, p_2 son dos polinomios cualesquiera, entonces existe un polinomio p tal que $p(A) = p_1(A)$ y $p(B) = p_2(B)$.