ÁLGEBRA III - Práctico 4

Mayo de 2012

(*) Se puede dejar para un repaso.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea W_1 un subespacio de V. Demostrar que existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean $W_1, \cdots, W_k$ subespacios de V tales que $V = W_1 + \cdots + W_k$ y $\dim V = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k$. Probar que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

3. Encontrar una proyección E que proyecte $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por (1,-1) según el subespacio generado por (1,2).

4. Verdadero o falso. Justificar.

   (a) Si E_1 y E_2 son proyecciones sobre subespacios independientes, entonces E_1+E_2 es una proyección.

   (b) Si T es diagonalizable y sus únicos autovalores son 0 y 1, entonces es una proyección.

   (c) Sea el espacio vectorial $V = W_1 + \cdots + W_k$ y sea W un subespacio vectorial de V. Entonces $W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k)$.

5. Probar que si E es la proyección sobre R según N, entonces $I - E$ es la proyección sobre N según R.

6. Sea F un subcuerpo de los complejos (o un cuerpo de característica cero), V un espacio vectorial sobre F y sean $E_1, \cdots, E_k$ proyecciones en V tales que $E_1 + \cdots + E_k = I$. Probar que $E_iE_j = 0$ para todo $i \neq j$.

7. Sea E una proyección de V y sea T un operador lineal en V.

   (a) Probar que el rango de E es T-invariante si y sólo si $ETE = TE$.

   (b) Probar que el rango y el espacio nulo de E son T-invariantes si y sólo si E y T conmutan, i.e. $ET = TE$.

8. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Sea W_1 el subespacio generado por $e_1 = (1, 0)$.

   (a) Probar que W_1 es T -invariante.

   (b) Probar que no existe ningún subespacio W_2, T -invariante tal que:

$$\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2.$$

9. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita V. Sea R la imagen de T y N el núcleo de T. Probar que R y N son independientes si y sólo si $V = R \oplus N$.

10. Sea T un operador lineal en V. Supongamos $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, donde cada W_j es invariante por T. Sea T_j el operador restricción en W_j.
    (a) Probar que $\det(T) = \det(T_1) \cdots \det(T_k)$
    (b) Probar que el polinomio característico de T, es el producto de los polinomios característicos de $T_1, \cdots, T_k$.
    (c) Probar que el polinomio minimal de T es el mínimo común múltiplo de los polinomios minimales de $T_1 \cdots T_k$.

11. Sea T un operador lineal en V que conmuta con todos los operadores proyección en V. ¿Qué puede decir de T?

12. (*) Sea V el espacio de las funciones continuas en el intervalo [-1,1], a valores reales. Sea W_I el subespacio de las funciones impares ($f(-x) = -f(x)$) y sea W_P el de las funciones pares ($f(-x) = f(x)$).
    (a) Probar que $V = W_I \oplus W_P$.
    (b) Si T es el operador integración indefinida, es decir

    $$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

    ¿son W_I y W_P T-invariantes?

13. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por la matriz

    $$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

    (a) Expresar el polinomio minimal p de T en la forma $p_1 p_2$, donde p_1 y p_2 son polinomios mónicos irreducibles sobre los números reales.
    (b) Si $W_i = Ker(p_i(T))$ y T_i el operador inducido por T en W_i. Encontrar una base $\mathcal{B}_i$ del espacio W_i y la matriz de T_i en esa base.

14. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por la matriz

    $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

    (a) Demostrar que existen un operador diagonalizable D y uno nilpotente N sobre $\mathbb{R}^3$ tales que $T = D + N$ y $DN = ND$.
    (b) Hallar las matrices de D y N en la base canónica.

15. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n, sobre un cuerpo F. Probar que el operador "derivación" es nilpotente.

16. Sea T un operador lineal sobre V, con polinomio característico

    $$f(x) = (x - c_1)^{e_1} . \cdots . (x - c_k)^{e_k}$$

    y polinomio minimal

    $$f(x) = (x - c_1)^{d_1} . \cdots . (x - c_k)^{d_k}.$$

    Sea $W_i = Ker(T - c_i I)^{d_i}$.

(a) Probar que W_i es el conjunto de todos los vectores $\alpha \in V$ tales que $(T - c_i)^m \alpha = 0$ para algún natural m (que dependerá de α).

(b) Probar que la dimensión de W_i es e_i.

17. (*) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sobre $\mathbb{C}$. Sea T un operador lineal sobre V y D la parte diagonalizable de T. Probar que si g es un polinomio con coeficientes complejos, entonces la parte diagonalizable de $g(T)$ es $g(D)$.

18. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F, y sea T un operador lineal sobre V tal que $\text{rang}(T) = 1$. Probar que T es diagonalizable o T es nilpotente, pero no ambas cosas simultáneamente.

19. (*) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre F, y sea T un operador lineal sobre V. Supongamos que T conmuta con todo operador lineal diagonalizable en V. Probar que T es un múltiplo escalar del operador identidad.

20. (a) Si N es un operador lineal nilpotente sobre un espacio de dimensión n, entonces el polinomio característico de N es x^n.

    (b) Dar un ejemplo de dos matrices nilpotentes 4×4 que tengan el mismo polinomio minimal pero que no sean semejantes.

21. Sea T una transformación lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, sea $p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ el polinomio minimal de T y sea $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ la descomposición prima de T, es decir $W_j = Ker(p_j(T)^{r_j})$.

    Sea W cualquier subespacio T-invariante de V. Probar que

$$W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k).$$

22. (a) Sea T un operador lineal sobre V con polinomio minimal de la forma p^n, donde p es un polinomio ireducible sobre el cuerpo de escalares. Probar que existe un vector $\alpha \in V$ tal que el T-anulador de α es p^n.

    (b) Usar a) y el teorema de descomposición prima para probar que si T es cualquier operador sobre un espacio vectorial V de dimensión finita entonces existe un vector $\alpha \in V$ tal que el T-anulador de α es el polinomio minimal de T.