ÁLGEBRA III - Práctico 5

1. (a) Sean N_1 y N_2 matrices 3×3 nilpotentes sobre el cuerpo F. Demostrar que N_1 y N_2 son semejantes si, y sólo si, tienen el mismo polinomio minimal.
   (b) Usar la parte (a) y la forma de Jordan para probar que si A y B son matrices $n \times n$, sobre el cuerpo F que tienen el mismo polinomio característico
   $$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k},$$
   el mismo polinomio minimal y ningún d_i es mayor que 3 entonces A y B son semejantes.

2. Sea A una matriz compleja con polinomio característico
   $$f = (x-2)^3(x+7)^2$$
   y polinomio minimal $(x-2)^2(x+7)$. Encontrar la forma de Jordan de A.

3. ¿Cuántas posibles formas de Jordan hay para una matriz compleja 6×6 con polinomio característico $f = (x+2)^4(x-1)^2$?

   ¿Cuál es la forma de Jordan para esta matriz?

4. Encontrar la forma de Jordan de la siguiente matriz
   $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Clasificar salvo semejanza, las matrices complejas A, 3×3, tales que $A^3 = I$.

6. **(*)** Sea $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ y sea N una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo F tal que $N^n = 0$, pero $N^{n-1} \neq 0$. Probar que N no tiene una raíz cuadrada; es decir, que no existe una matriz A, $n \times n$, tal que $A^2 = N$.

7. Sean N_1 y N_2 dos matrices nilpotentes 6×6, que tienen el mismo polinomio minimal y la misma nulidad. Probar que N_1 y N_2 son semejantes. ¿Es cierto para matrices 7×7?.

8. Sean A y B dos matrices $n \times n$, sobre el cuerpo F que tienen el mismo polinomio característico
   $$f(x) = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$
   y el mismo polinomio minimal. Supongamos que para cada i, los espacios solución de $(A - c_i I)$ y $(B - c_i I)$ tienen la misma dimensión y ningún d_i es mayor que 6. Probar que A y B son semejantes. (Ayuda: Usar el ejercicio anterior y la forma de Jordan.)

9. Verdadero o Falso. Justificar. Sea T la transformación traslación sobre el espacio P_3 de polinomios de grado ≤ 3, es decir $(T_p)(x) = p(x+1)$. Entonces los polinomios característico y minimal de T coinciden.

10. Si A es una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo F con polinomio característico

$$f(x) = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

Calcule la traza de A.

11. El operador derivacińn sobre el espacio P_3 de polinomios de grado ≤ 3 est representado en la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ por la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine la forma de Jordan de esa matriz.